

## Schiefe in der Portfolioselektion

Von Frank Guse und Markus Rudolf, Vallendar\*

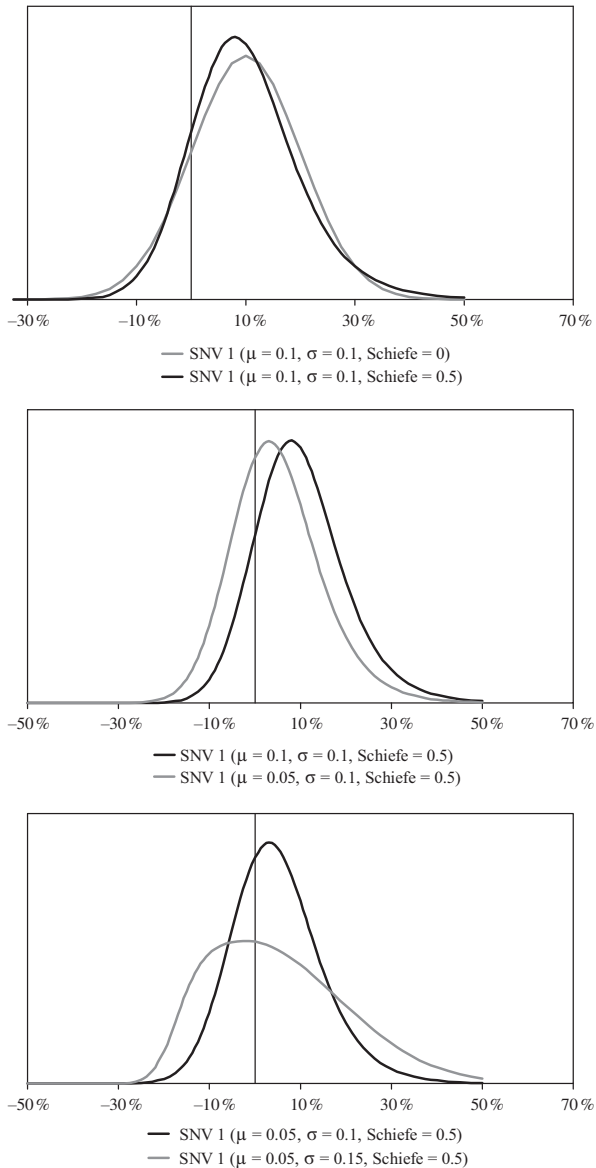
### I. Einleitung

Sind die Anlagerenditen normalverteilt, so wird ein Investor auf Grundlage der Mean-Variance-Optimierung eindeutig ein Portfolio mit niedrigerer Varianz bei gleicher erwarteter Rendite bevorzugen und umgekehrt ein Portfolio mit höherer Rendite bei gleicher Varianz. Sind die Anlagerenditen jedoch nicht mehr normalverteilt, so ist das Verhältnis der beiden Entscheidungsgrößen nicht mehr eindeutig. Vielmehr ist das Mean-Variance-Kriterium unter nicht normalverteilten Renditen nicht mehr zwangsläufig ein gültiges Kriterium zur Auswahl eines Portfolios. Stattdessen gibt es Hinweise auf die Präferenz für positive Schiefe bei Investoren. Solche Hinweise finden sich bereits bei *Jean* (1971) und bei *Francis* (1975). In den letzten Jahren finden sich Beiträge zur Portfolioselektion bei nicht normalverteilten Anlagen u. a. bei *Harvey/Liechty/Müller* (2003) und *Jondeau/Rockinger* (2003). Abbildung 1 veranschaulicht diese Diskussion. Dazu sind jeweils zwei Verteilungen dargestellt, bei denen zwei Momente jeweils gleich sind, das dritte jedoch unterschiedlich.

In Abbildung 1 entspricht die mutmaßlich attraktivere Verteilung jeweils der schwarzen Linie. In der oberen Abbildung hat die schwarze Linie beispielsweise ein höheres Aufwärtspotenzial und gleichzeitig ein geringeres Abwärtspotenzial als die graue Linie. Dennoch stimmen Erwartungswert und Varianz bei beiden Verteilungen überein. Die dunklere Verteilung hat aber eine höhere Schiefe, was offenbar ausschlaggebend für die höhere Attraktivität ist. Im zweiten Bild in Abbildung 1 unter-

---

\* Wir danken Matthias Muck, Michael Adams, Volker Anger, Karl Keiber, einem anonymen Gutachter dieser Zeitschrift und dem Organisationsteam der Tagung der Deutschen Gesellschaft für Finanzwirtschaft (DGF) in Augsburg 2005 für ihre hilfreichen Kommentare. Wir danken auch für die finanzielle Unterstützung der Dresdner Bank AG, die diese Studie ermöglicht hat. Eventuelle, verbleibende Fehler sind selbstverständlich eigenes Verschulden.



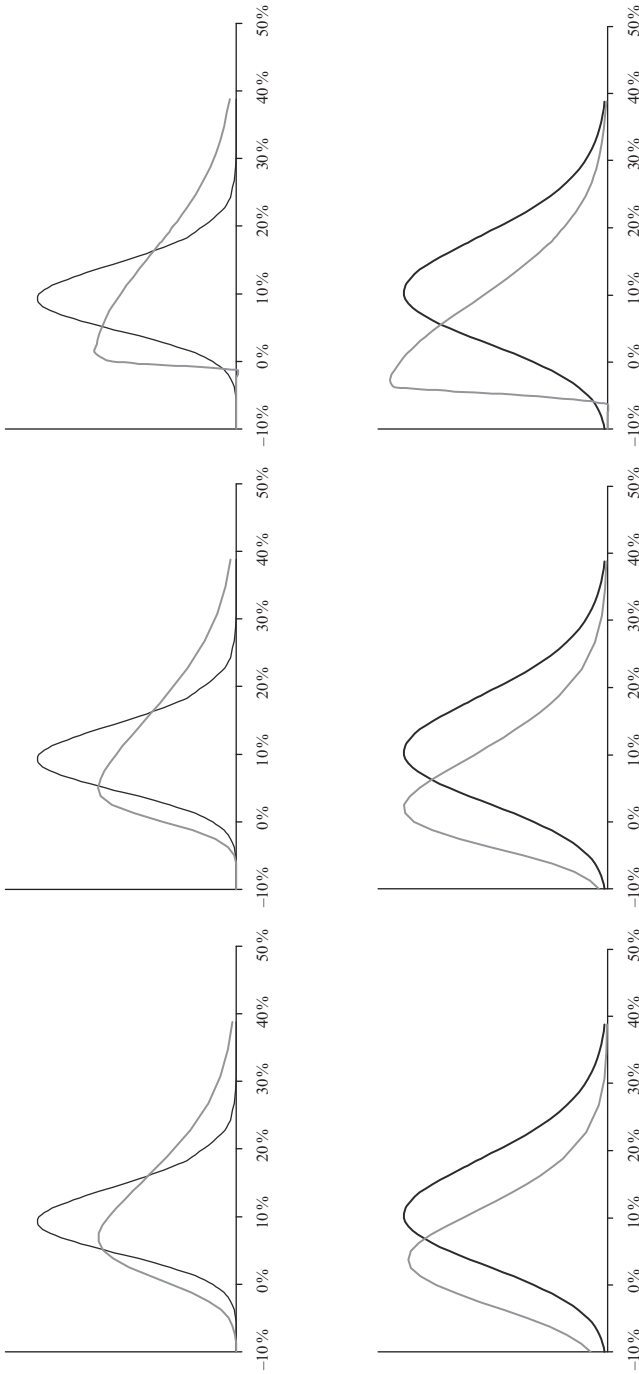
*Abbildung 1: Verteilungen mit unterschiedlichen Momentkombinationen: Die Abbildung zeigt jeweils zwei Verteilungen, bei denen zwei Momente gleich sind, das dritte Moment jedoch unterschiedlich. Bei den obersten Verteilungen sind die Schiefen verschieden, bei den nächsten die Erwartungswerte und bei der untersten Grafik die Standardabweichungen.*

scheiden sich die Verteilungen nur im Erwartungswert. Es ist klar, dass die Verteilung mit dem höheren Erwartungswert die attraktivere ist. Beim unteren Bild unterscheiden sich schließlich die Varianzen der beiden Verteilungen, Schiefe und Erwartungswert sind identisch. Beide Verteilungen sind aber schief. Obwohl die klassische Entscheidungstheorie die Verteilung mit der niedrigeren Varianz präferieren würde, ist das beim dritten Bild in Abbildung 1 nicht eindeutig. Die höhere Varianz der grauen Linie führt nicht nur zu einem höheren Verlustpotenzial, sondern gleichzeitig auch zu einem höheren Gewinnpotenzial. Liegt also Schiefe vor, ist das klassische Mean/Variance-Kriterium nicht mehr unbedingt gültig.

Spielt Schiefe zusätzlich zur Varianz eine Rolle bei Portfolioentscheidungen, dann ist die Frage zu beantworten, welchen Ausgleich zwischen den Momenten ein Investor anstrebt. Um wie viel muss beispielsweise die Schiefe ansteigen, um den Investor für eine höhere Varianz zu entschädigen. Abbildung 2 greift dazu die Beispiele mit unterschiedlicher Varianz und unterschiedlichem Erwartungswert wieder auf. Diese beiden Abbildungen finden sich jeweils links. Nach rechts wird nun schrittweise die Schiefe der bisher inferioren Verteilung erhöht.

Vor allem im oberen Teil der Abbildung 2 wird deutlich, dass die Verteilung mit höherer Standardabweichung durch eine Erhöhung der Schiefe für den Investor deutlich interessanter wird. Damit kann insbesondere intuitiv illustriert werden, dass eine höhere Schiefe den Investor für eine höhere Varianz oder eine geringere Erwartungsrendite entschädigen kann.

Diese Intuition bezüglich der höheren Momente der Portfoliorenditeverteilung lässt sich auch analytisch begründen. *Scott/Horvath* (1980) zeigen, dass rationale Investoren eine Präferenz für ungerade Momente (Rendite, Schiefe) und eine Aversion gegen gerade Momente (Varianz, Kurtosis) haben, sofern die Nutzenfunktion des Investors nicht quadratisch ist. Zum Beweis expandieren *Jondeau/Rockinger* (2004) die Taylor-Reihe um die Erwartungsrendite. Sie zeigen dadurch, dass sich der Erwartungsnutzen mit der Schiefe erhöht und mit zunehmender Kurtosis senkt. Ähnliche, lineare Approximationen zur Nutzenfunktion benutzen unter anderem *Chunhachinda/Dandapani/Hamid/Prakash* (1997) und *Harvey/Liechty/Liechty/Müller* (2003). *Kane* (1982) zeigt den Einfluss des hier hergeleiteten Schiefekoeffizienten für häufig verwendete, ganz spezifische Nutzenfunktionen. Im vorliegenden Papier werden nur die ersten drei Momente in einem empirischen Anwendungsfall optimiert.



*Abbildung 2: Rendite-Verteilungen mit unterschiedlichen Momentkombinationen: Im oberen Teil der Abbildung finden sich jeweils zwei Verteilungen mit gleicher Erwartungrendite, unterschiedlicher Varianz und zunächst gleicher Schiefe. Die Schiefe der Verteilung mit höherer Varianz steigt in den Diagrammen rechts schrittweise an. Im unteren Teil der Abbildung dagegen weist eine Verteilung eine niedrigere Erwartungrendite bei gleicher Varianz auf. Auch für diese Verteilung wird dann in den Darstellungen rechts die Schiefe erhöht.*

## II. Daten

Im Laufe dieser Arbeit werden exemplarisch die Größenindizes des Dow Jones STOXX 600 analysiert. Dieser Index deckt einen bedeutenden Teil der europäischen Marktkapitalisierung ab. Die Größenindizes fassen die jeweils 200 größten, mittleren und kleinsten Aktien dieses Indexes zusammen. Tabelle 1 bildet die Momente dieser Indexgruppe ab.

Tabelle 1

**Momente der Größenindizes: Momente für Größenindizes  
des Dow Jones STOXX 600**

	$\mu$ (%)	$\sigma$ (%)	$s$	$k$
Large	0.18	2.48	0.033	5.42
Mid	0.13	2.17	-0.265	6.10
Small	0.06	2.09	-0.408	7.78

Wöchentliche Renditen im Zeitraum 1.1.1991–31.12.2003. Insgesamt 573 Beobachtungen. Alle Indizes sind mit 95%-Konfidenz nicht normalverteilt.

Die Schiefe ist für die Indizes der mittleren und kleinsten Aktien signifikant, die Kurtosis ist für alle drei Indizes signifikant. Auf Grundlage eines Jarque-Bera-Tests sind alle drei Indizes nicht normalverteilt mit 95%-Konfidenz.

Besonderes Augenmerk muss an dieser Stelle auch auf die Koschiefen zwischen den Anlagen gelegt werden. Die Schiefe ist ein statistisches Maß für die Asymmetrie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Asymmetrie wird als dritte Potenz der Abweichungen der Realisationen vom Mittelwert gemessen. Entsprechend stellen die Koschiefen asymmetrische Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen dar. Zur besseren Illustration sind die Koschiefen für die drei in Tabelle 1 gegebenen Größenindizes in Abbildung 3 dargestellt.

Unmittelbar zu erkennen ist, dass auch die Koschiefen zwischen den Anlagen zum Teil deutlich ausgeprägt sind. Das gilt insbesondere für die Koschiefe zwischen mittleren und kleinsten Aktien (an den Positionen (MM,S) und (MM,M) bzw. (MS,S), (MS,M), (SS,S) und (SS,M)). Hinweise

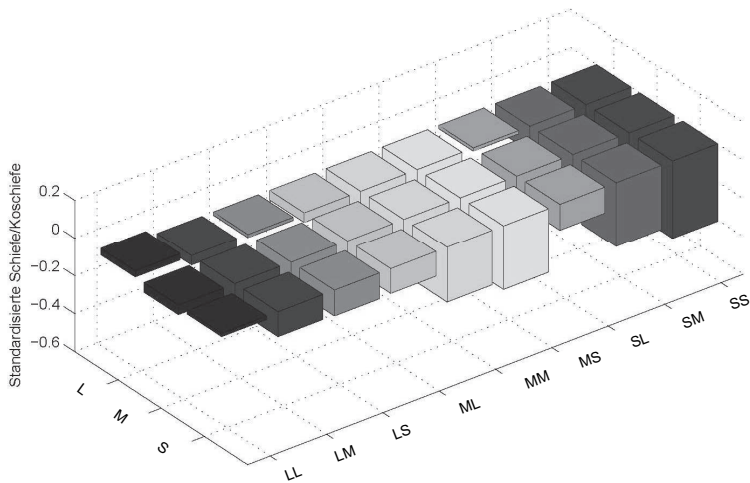


Abbildung 3: Schiefen und Koschiefen der Größenindizes: Die Abbildung stellt die  $3 \times 9$ -Schiefe-Koschiefe-Matrix der in Tabelle 1 gegebenen drei Größenindizes Large (L), Mid (M) und Small (S) dar. Dabei sind an der vertikalen Achse die standardisierten Schiefen und Koschiefen dargestellt. Die anderen beiden Achsen stellen die Position in der Schiefe-Koschiefe-Matrix dar.

auf die Bedeutung der Koschiefen im Kontext der Portfoliotheorie finden sich bei *Harvey/Siddique* (2000).<sup>1</sup>

### III. Optimierung historischer Momente

Sind die Anlagerenditen nicht normalverteilt, so stellt eine Mean-Variance-Optimierung allenfalls eine Approximation des tatsächlichen Optimierungsproblems dar. Die dreidimensionale Optimierung historischer Momente stellt die unmittelbare Erweiterung der klassischen Mean-Variance-Optimierung dar und verringert damit den Approximationsfehler bei nicht normalverteilten Renditen. Dabei werden nun zusätzlich die Schiefen und Koschiefen der Anlagerenditen explizit berücksichtigt, die Analyse wird also um eine zusätzliche Dimension erweitert.

Nachfolgend wird ein Anlageuniversum bestehend aus  $n$  Anlagen unterstellt. Die ersten drei Momente eines Portfolios ( $\mu_p$ ,  $\sigma_p^2$  und  $s_p$ ) lassen

<sup>1</sup> Darüber hinaus finden sich auch bei *Friend/Westerfield* (1980) erste Hinweise auf die Bedeutung der Koschiefe. In den letzten Jahren ist diesem Aspekt wieder verstärkt Aufmerksamkeit gewidmet worden.

sich in Abhängigkeit des Vektors der Erwartungsrenditen  $\boldsymbol{\mu}$ , der Varianz/Kovarianz-Matrix  $\mathbf{V}$  und der Schiefe/Koschiefe-Matrix  $\mathbf{S}$  schreiben als:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \mu_p &= \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \cdot \mu_i \\
 (2) \quad \sigma_p^2 &= \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j \cdot \sigma_{ij} \\
 (3) \quad s_p &= \mathbf{w}'\mathbf{S}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_k \cdot s_{ijk}
 \end{aligned}$$

Hierin bezeichnet  $\otimes$  das „Kronecker“-Produkt.<sup>2</sup>

Während die Varianz eine quadratische Funktion der Anlagegewichte  $\mathbf{w}$  ist, ist die Schiefe eine kubische Funktion dieser Gewichte. Eine analytische Lösung des Optimierungsproblems über die Schiefe ist daher nicht mehr möglich. Grundsätzlich muss es jedoch aufgrund der Parameterpräferenzen des Investors Ziel sein, Erwartungsrendite und Schiefe zu maximieren sowie gleichzeitig die Varianz zu minimieren. Ein möglicher Ansatz ist dann, für jede gegebene Rendite und Schiefe die Varianz zu minimieren.<sup>3</sup> Dies führt zu dem folgenden Optimierungsproblem unter Berücksichtigung der Schiefe:<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \min \quad & \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} \\
 \text{udN:} \quad & \mu_p = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \\
 & s_p = \mathbf{w}'\mathbf{S}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w})
 \end{aligned}$$

Zur Lösung des Minimierungsproblems aus Gleichung 4 wird die Lagrangefunktion aufgestellt, es ergibt sich also:

$$(5) \quad L = \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} + \lambda_1(\mu_p - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}) + \lambda_2(s_p - \mathbf{w}'\mathbf{S}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}))$$

<sup>2</sup>  $\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}$  ergibt einen  $1 \times n^2$ -Vektor, der alle möglichen paarweisen Kombinationen der beiden Faktoren enthält. Die Matrix  $\mathbf{S} = (s_{ijk})_{1 \leq i, j, k \leq n}$  stellt sämtliche Koschiefen und Schiefen der Verteilungen dar. Für  $n$  Anlagegegenstände wird der allgemeinen Konvention folgend  $\mathbf{S}$  nicht als  $n \times n \times n$  Würfel geschrieben, sondern als  $n \times n^2$ -Matrix. Der Vektor  $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_i)_{1 \leq i \leq n}$  ist der  $n$ -dimensionale Vektor der Portfoliogewichte,  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$  der  $n$ -dimensionale Vektor der erwarteten Renditen und  $\mathbf{V} = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  die  $n \times n$ -dimensionale Kovarianzmatrix.

<sup>3</sup> Eine ähnliche Darstellung findet sich z.B. in den Ausführungen von *Athayde/Flores* (2001), aber auch bei *Jondeau/Rockinger* (2004). Eine gleichzeitige Optimierung verschiedener höherer Momente kann durch das Polynomial-Goal-Programm erreicht werden. Vergleiche hierzu beispielsweise *Chunhachinda/Dandapani/Hamid/Prakash* (1997).

<sup>4</sup> Soll zusätzlich die Kurtosis des Portfolios berücksichtigt werden, so muss als Nebenbedingung lediglich die Portfoliokurtosis ergänzt werden.

Daraus folgen die Bedingungen erster Ordnung für die Anlagegewichte  $\mathbf{w}$  und die Lagrangemultiplikatoren  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ :

$$(6) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{V}\mathbf{w} - \lambda_1\boldsymbol{\mu} - 3\lambda_2\mathbf{S}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{0}$$

$$(7) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \mu_P - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = 0$$

$$(8) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = s_P - \mathbf{w}'\mathbf{S}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) = 0$$

Dieses Gleichungssystem beschreibt die Kandidaten für exakte Lösungen in Abhängigkeit von  $\mathbf{w}$ . Die kubische Spezifikation der Schiefe macht den Einsatz numerischer Lösungsverfahren zur Bestimmung der Portfoliogewichte  $\mathbf{w}$  erforderlich. Die Minimierung der Varianz ist aber unter der angegebenen Nebenbedingung mithilfe von Standardsoftware weitestgehend problemlos möglich. Wir verwenden das Gradientenverfahren. Die Optimierung kann beschleunigt werden, wenn die Gradienten der Nebenbedingungen und der Zielfunktion analytisch bestimmt werden. Die Gradienten sind sämtliche Ableitungen der Nebenbedingungen nach den  $n$  Elementen von  $\mathbf{w}$ . Die Gradienten in diesem Falle sind gegeben durch  $G_1 = \boldsymbol{\mu}$ ,  $G_2 = 2\mathbf{V}\mathbf{w}$  und  $G_3 = 3\mathbf{S}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w})$ . Für die Kurtosis gilt analog  $G_4 = 4\mathbf{K}[\mathbf{w} \otimes (\mathbf{w} \otimes \mathbf{w})]$ . Dabei ist  $\mathbf{K}$  eine  $n \times n^3$ -dimensionale Matrix der Kurtosen und Kokurtosen aller Anlagen.

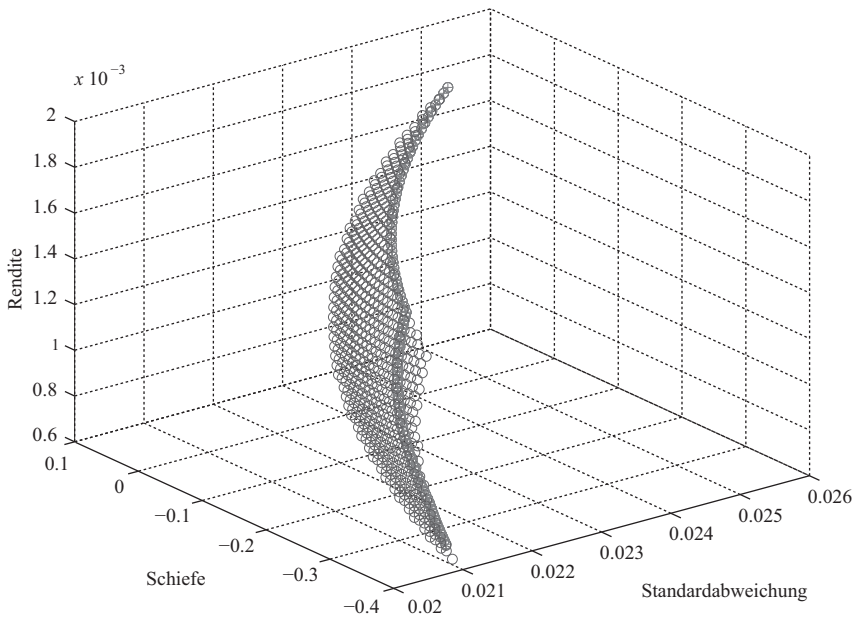
Die Gradienten sind damit  $n$ -dimensionale Spaltenvektoren. Durch Iteration über verschiedene Kombinationen von  $\mu_P$  und  $s_P$  ergibt sich die Gesamtmenge aller Portfolios mit minimaler Varianz. Die Selektion eines dieser Portfolios hängt dann, wie auch bei der klassischen Mean-Variance-Selektion, von der individuellen Präferenz des Investors ab. Gegenüber der klassischen Mean-Variance-Selektion ergeben sich die optimalen Portfolios aber nicht mehr als Linie der Efficient Frontier, sondern als Ebene im dreidimensionalen Raum.

Nachfolgend wird das Optimierungsverfahren auf einen Datensatz bestehend aus europäischen Aktienrenditen angewandt. In dieser empirischen Analyse schließen wir zusätzlich Leerverkäufe aus. Außerdem wird eine weitere Nebenbedingung eingeführt, die gewährleistet, dass die Gewichte sich zu eins aufsummieren. Mit diesen zusätzlichen Nebenbedingungen erzeugt man ein Gitter in der Rendite-Schiefe-Ebene und minimiert die Varianz für jede dieser Kombinationen für die Größenindizes des STOXX 600 aus Tabelle 1. Zusätzlich werden die Momente der Portfolios entlang der Efficient Frontier berechnet. Das Ergebnis der Opti-



mierung ist die Menge aller varianzminimalen Portfolios entlang des Gitters von möglichen  $\mu_p/s_p$ -Kombinationen. Für beide Parameter werden jeweils 100 Punkte zwischen minimaler und maximaler Rendite bzw. Schiefe gewählt und damit also insgesamt maximal 10.000 mögliche Kombinationen erzeugt. Ein Teil dieser Kombinationen wird allerdings nicht effizient sein. Dies gilt insbesondere für die Kombinationen mit geringer Rendite und Schiefe. Außerdem wird nur ein Teil dieser möglichen Kombinationen auch tatsächlich erreichbar sein, d.h., die Menge der durch den Algorithmus tatsächlich generierten Portfolios wird kleiner sein als die Menge aller möglichen Portfolios.

Abbildung 4 zeigt das Ergebnis der Optimierung. Dabei wurden für die Größenindizes 2.137 varianzminimale Portfolios durch den Algorithmus generiert. Die Abbildung zeigt die dreidimensionale Mittelwert-Varianz-Schiefe-Grenze sowie die Momente der Portfolios entlang der Efficient



*Abbildung 4: MVS-Grenze sowie MV-Efficient-Frontier: Die Abbildung zeigt die dreidimensionale Ausprägung der optimalen Portfolios sowie die klassische Efficient Frontier. Ein effizientes Portfolio gemäß des vorgestellten Optimierungsproblems muss auf der dunkel dargestellten Fläche liegen, es muss aber nicht zwangsläufig auch auf der MV-Efficient-Frontier liegen.*

Frontier. Aus dieser Darstellung ist bereits ersichtlich, dass auch Portfolios abweichend von der Efficient Frontier als optimale Portfolios generiert worden sind. Zur besseren Illustration werden in den folgenden Grafiken jeweils die Betrachtungswinkel so verändert, dass jeweils eine Aufsicht auf die Rendite-Varianz- und die Rendite-Schiefe-Ebene ermöglicht wird. Die beiden Graphen in Abbildung 5 zeigen diese Schnittbilder.

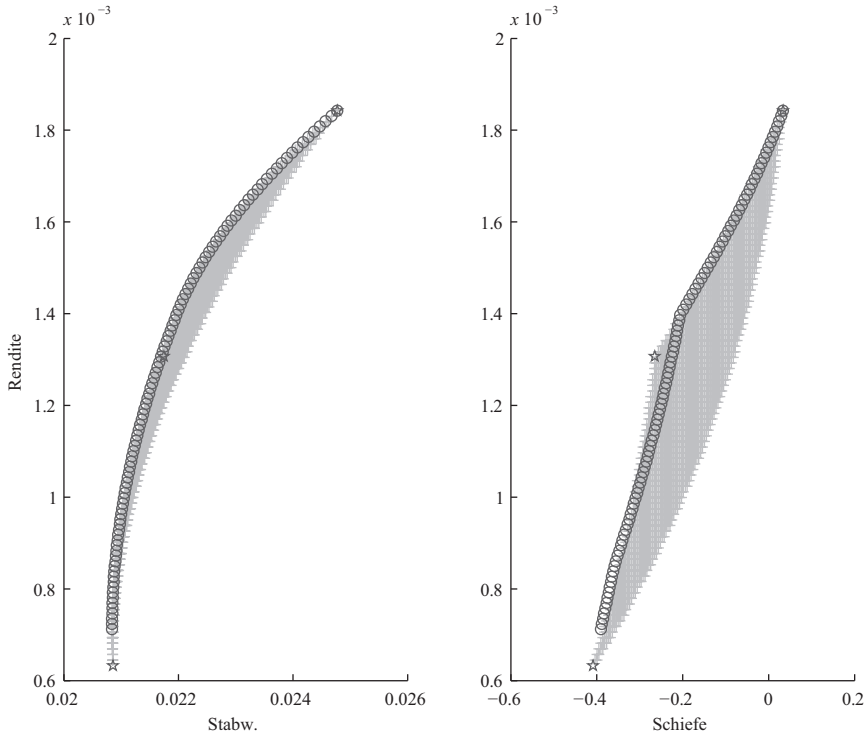
Betrachtet man in Abb. 5 die rechte Grafik, die den erwarteten Rendite/Schiefe-Trade-off darstellt, so sind alle Portfolios links der dunkel dargestellten Efficient Frontier nicht Mean/Variance-effizient. Zu jedem dieser Portfolios existiert mindestens ein Portfolio mit höherer Schiefe und geringerer Varianz bei gleicher Erwartungsrendite. Allerdings existieren Portfolios rechts der Efficient Frontier. Hierbei handelt es sich um Portfolios, die gemäß der Präferenzen über Rendite, Varianz und Schiefe durchaus auch effizient sind. Die zwangsläufig höhere Varianz unterhalb der Efficient Frontier in der linken Grafik kann durch eine höhere Schiefe rechts der Efficient Frontier in der rechten Grafik ausgeglichen werden. Man erkennt, dass bei nur geringfügig höherer Standardabweichung deutlich höhere Portfolioschiefen erreicht werden können.

Die Auswahl eines Portfolios erfolgt dann für jeden Investor anhand seiner Nutzenfunktion. Diese muss geeignete Präferenzen über drei Momente bilden. Sollte der Investor dem dritten Moment gegenüber indifferent sein, so wählt er ein Portfolio auf der klassischen Efficient Frontier. Dies ist allerdings nur für quadratische Nutzenfunktionen der Fall. Betrachten wir z.B. die Größenindizes in Abbildung 5 und beschränken die Diskussion auf diejenigen Portfolios mit einer wöchentlichen Erwartungsrendite von 0.14%. Das zugehörige Portfolio auf der Efficient Frontier weist eine Standardabweichung von  $\sigma = 0.0220$  und eine Schiefe von  $s_p = -0.20$  auf. Rechts der Efficient Frontier sind Portfolios mit höherer Schiefe und Standardabweichung möglich. Die Schiefe dieser Portfolios steigt auf bis zu  $s_p = -0.055$  an, während die Standardabweichung bis auf  $\sigma = 0.0225$  zunimmt. Die höhere Schiefe macht aber hohe positive Renditen wahrscheinlicher. Investoren, die diese Rechtsschiefe der Renditen, bzw. in diesem Falle geringere Linksschiefe, in ihrer Nutzenfunktion berücksichtigen, würden dann das in der klassischen zweidimensionalen Sichtweise ineffiziente Portfolio wählen.<sup>5</sup>

Während die soeben vorgestellte direkte Optimierung historischer Momente eine intuitive Erweiterung der Mean-Variance-Optimierung dar-

---

<sup>5</sup> Vergleiche hierzu insbesondere auch die Darstellung in Abbildung 2.



Die Portfoliomomente sind als Sterne eingezeichnet, die dunkle Linie gibt die Mean-Variance-Efficient Frontier wieder, während die graue Fläche die Menge aller Drei-Moment-Portfolios angibt. Der Rendite-Schiefe-Trade-off zeigt eine Vielzahl von Portfolios rechts der Efficient Frontier. Diese weisen eine höhere positive Schiefe auf und können daher von Investoren mit geeigneter Präferenz bevorzugt werden.

*Abbildung 5: Rendite/Varianz und Rendite/Schiefe-Trade-off für varianzminimale Portfolios – Größenindizes: Trade-off der ersten drei Momente für die Größenindizes des Dow Jones STOXX 600*

stellt, ist die Beschränkung auf lediglich drei Momente in dieser Vorgehensweise keinesfalls begründet: Sind die Renditeverteilungen nicht normalverteilt, so wird zwar über die Schiefe bereits ein Teil der Nicht-Normalität erfasst,<sup>6</sup> die höheren Momente (Kurtosis etc.) werden jedoch ignoriert. Die Berücksichtigung der Kurtosis erfordert jedoch zusätzlich die Erfassung einer  $n \times n^3$ -Matrix. Im Folgenden soll daher nun auch ein Modell vorgestellt werden, das für Anlagerenditen eine Verteilung vorgibt, die genau durch drei Parameter bestimmt ist und damit eine Be-

<sup>6</sup> Die Analyse ist damit in jedem Falle genauer als eine Mean-Variance-Analyse.

schränkung auf die ersten drei Momente ermöglicht. Sämtliche höheren Momente sind damit durch die ersten drei Momente bestimmt und können daher ignoriert werden.

#### IV. Schiefe Verteilungen

Bereits die Ansätze von *Ingersoll* (1987) und *Gamba/Rossi* (1998) verwenden eine Art schiefe Normalverteilung. Durch die Darstellung von Anlagerenditen als Summe einer multivariaten Normalverteilung und einer für alle Anlagen gleichen Schiefequelle<sup>7</sup> entsteht eine mit der Normalverteilung eng verwandte schiefe Verteilung. *Gamba/Rossi* (1998) zeigen, wie sich solch eine Annahme über Anlagerenditen in der Portfolioselektion niederschlägt. Die getroffenen Annahmen, insbesondere über die Schiefequelle, sind jedoch weitestgehend ad hoc eingeführt und nicht standardisiert. Darüber hinaus ergeben sich Probleme bei der Schätzung, da die Verteilungsfunktionen der Schiefequelle nur schwierig erfasst werden können. Schließlich ist das entwickelte Modell nicht in der Lage, empirisch valide Ergebnisse zu erzeugen. Die Erfassung der Schiefe als linearer Zusammenhang gelingt damit nicht. Die Entwicklung der schiefen Normalverteilung greift diese ersten Ansätze auf, verfeinert und standardisiert aber die Quelle der Schiefe in der Verteilung.

Eine multivariate schiefe Normalverteilung wird statistisch genau erst von *Azzalini/Valle* (1996) und *Azzalini/Captaino* (1999) beschrieben. Grundsätzlich konstruieren die Autoren die schiefe Normalverteilung als Produkt einer multivariaten Normalverteilung und einer kumulativen univariaten Normalverteilungsfunktion. Die Verteilungsfunktion stellt also in diesem Falle eine spezielle Annahme für die Schiefequelle aus den ersten Ansätzen dar. Weitere Verbesserungen zu der schiefen Normalverteilung leisten *Sahu/Dey/Branco* (2003) und *Azzalini/Capitanio* (2003). Obwohl die Autoren jeweils verschiedene Darstellungen der Verteilungen wählen, sind die konzeptionellen Unterschiede im Vorgehen der einzelnen Spezifikationen jedoch eher gering. Anwendungen der schiefen Normalverteilung zur Portfolioselektion finden sich beispielsweise in *Adcock* (2002) und *Harvey/Liechty/Liechty/Müller* (2003). Im weiteren Verlauf dieses Kapitels beschränken wir uns auf die Spezifika-

---

<sup>7</sup> Die Schiefequelle ist hierbei zunächst nicht näher spezifiziert. *Ingersoll* schlägt die Verwendung von verschiedenen schiefen Verteilungen vor, während z. B. *Simaan* (1993) eine beidseitig beschränkte Normalverteilung verwendet.

tionen von *Azzalini/Capitanio* (1999). Dazu sei zunächst die Definition eines multivariat schief normalverteilten Zufallsvektors gegeben:

Für den  $n$ -dimensionalen, multivariat schief normalverteilten (MSN) Renditeprozess  $\mathbf{X}$  ergibt sich die Dichtefunktion in der Spezifikation von *Azzalini/Capitanio* (1999) ( $n$ : Anzahl der Anlagegegenstände) als:<sup>8</sup>

$$(9) \quad f_{SNV}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha}) = 2 \cdot f_{NV}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}) \cdot \Phi_{NV}[\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}].$$

Hierin bezeichnet  $f_{SNV}$  die multivariate Dichtefunktion der schiefen Normalverteilung,  $f_{NV}$  die Dichtefunktion der  $n$ -variaten Normalverteilung und  $\Phi_{NV}$  eine univariate kumulative Normalverteilung.  $\boldsymbol{\mu}$  ist ein Vektor von  $n$  Erwartungswerten und  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$  ein Vektor, der die Schiefe der Verteilung reguliert. Durch diesen Parameter lässt sich die Schiefe der gewünschten Verteilung konkret wählen, im Unterschied z. B. zur Log-Normalverteilung. Schließlich bezeichnet  $\mathbf{X}$  die Realisation eines  $n$ -dimensionalen Zufallsvektors, d. h. derjenigen  $n$  Anlagerenditen, deren gemeinsame Wahrscheinlichkeit berechnet werden soll. Wir schreiben in diesem Fall:

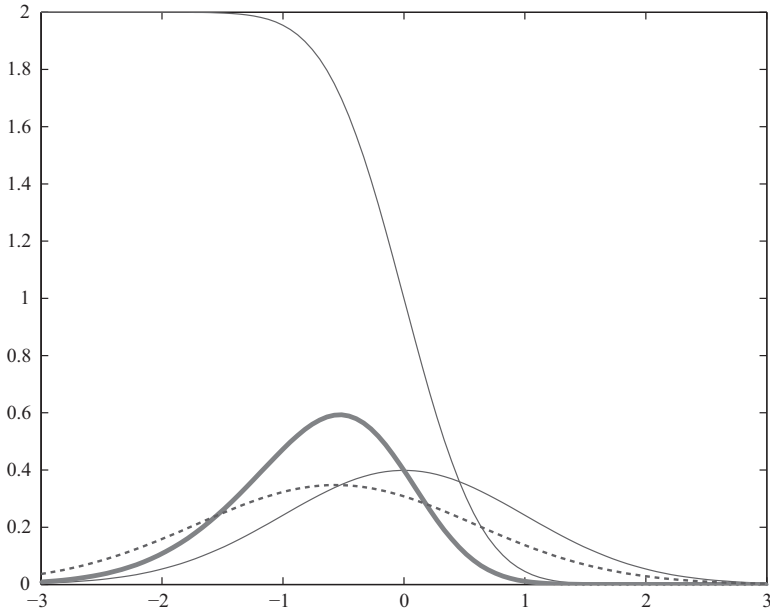
$$(10) \quad \mathbf{X} \sim \text{MSN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha})$$

Für  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$  entspricht die in Gleichung 9 beschriebene Verteilung der Normalverteilung.<sup>9</sup> Die Auswirkungen der Modellierung von *Azzalini/Valle* (1996) erkennt man bei Betrachtung der Bestandteile der Gleichung 9: Die kumulative Normalverteilung hat einen Wertebereich  $[0,1]$  und nimmt beim Mittelwert einen Wert von 0.5 an.

Abbildung 6 veranschaulicht dieses Vorgehen. Dort ist eine univariate schiefe Normalverteilung mit den Parametern  $\mu_i = 0$ ,  $\sigma_i^2 = 1$  und  $\alpha_i = -2$  dargestellt. Zusätzlich sind die beiden Faktoren aus Gleichung 9 dargestellt, die zu der schiefen Normalverteilung führen. Außerdem ist als gepunktete Linie die Normalverteilung eingetragen, die denselben Mittelwert und dieselbe Varianz wie die schiefe Verteilung aufweist. Die Skalierung der Normalverteilung durch die kumulative Verteilung ist deutlich zu erkennen. Ebenso werden die Unterschiede beider Verteilungen mit gleichem Mittelwert und Varianz aber unterschiedlicher Schiefe deutlich.

<sup>8</sup> Diese Form findet sich auch in *Azzalini/Valle* (1996). Eine ähnliche Spezifikation wählen *Ferreira/Steel* (2003), obwohl die Notation leicht unterschiedlich ist, ist die grundsätzliche Vorgehensweise identisch.

<sup>9</sup> Für  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$  ist  $\Phi_{NV}(0) = 0.5$  und die Dichte reduziert sich zu  $f_{SNV}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}) = f_{NV}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{V})$ .



Die Abbildung veranschaulicht, wie die schiefe Normalverteilung aus dem Produkt der kumulativen Verteilung und der Dichte entsteht. Die schiefe Normalverteilung ist fett dargestellt. Darunter findet sich gestrichelt die Normalverteilung mit gleichem Erwartungswert und gleicher Varianz. Die asymmetrische Ausprägung der schiefen Normalverteilung ist deutlich zu erkennen.

*Abbildung 6: Skalierung der univariaten schiefen Normalverteilung:  
Univariate schiefe Normalverteilung mit  $\mu_i = 0$ ,  $\sigma_i^2 = 1$  und  $\alpha_i = -2$*

Eine explizite Herleitung der Momente der schiefen Normalverteilung aus der Kumulantfunktion findet sich in der Arbeit von *Azzalini/Capitanio* (1999). Es zeigt sich, dass für die schiefe Normalverteilung die ersten drei Verteilungsmomente unabhängig voneinander bestimmt sind. Die Kurtosis unterscheidet sich auch von der Kurtosis der Normalverteilung. Sie ist aber direkt abhängig von der Schiefe der Verteilung und kann damit nicht separat modelliert werden.

Zur Schätzung der Verteilung, d.h. zur Bestimmung der Parameter  $(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha})$ , ist die Loglikelihood der beobachteten Renditen zu maximieren. Ist eine multivariate Verteilung aus den beobachteten Renditen geschätzt, so werden zur Portfolioselektion die multivariaten Einzelanlagen in ein univariates Portfolio überführt und die Parameter dieses Portfolios in Abhängigkeit von den Portfoliogewichtungen und der entsprechenden Nutzenfunktion optimiert.

Sind die Einzelanlagen multivariat schief normalverteilt (MSN)<sup>10</sup> und bezeichnet  $\mathbf{w}$  den Vektor der Gewichte in den Einzelanlagen, dann gilt für die Portfoliorendite  $P$  ( $\mu_P$  ist der Portfolioerwartungswert,  $\sigma_P^2$  ist die Portfoliovarianz und  $\alpha_P$  ist die Portfolioschiefe):

$$(11) \quad P = \mathbf{w}'\mathbf{X} \sim \text{SNV}(\mu_P, \sigma_P^2, \alpha_P)$$

mit:

$$\begin{aligned} \mu_P &= \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \\ \sigma_P^2 &= \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} \\ \alpha_P &= g(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned}$$

Dabei ist die Funktion  $g$  eine nicht lineare Funktion in den Parametern der Verteilung. Ein Portfolio aus Anlagen, die multivariat schief normalverteilt sind, weist also selber eine univariat schiefe Renditeverteilung auf.<sup>11</sup>

Für den hier dargestellten Fall eines dreidimensionalen Anlageuniversums ist die schiefe Normalverteilung durch drei zusätzliche Parameter bestimmt, mit deren Hilfe 3 Schiefen und 9 Koschiefen erfasst werden müssen. Bereits auf Grundlage dieser Einschränkung wird unmittelbar deutlich, dass die schiefe Normalverteilung keine absolut exakte Erfassung der Schiefen und Koschiefen gewährleisten kann und damit gegenüber der direkten Optimierung lediglich ein approximatives Verfahren darstellt. Der Unterschied beider Verfahren sei hier noch einmal deutlich dargestellt: Die Optimierung über die ersten drei empirischen Momente ist approximativ, weil keine hinreichenden Gründe für das Weglassen der höheren Momente existieren. Demgegenüber rechtfertigt die schiefe Normalverteilung als Renditemodell das Weglassen höherer Momente, erfasst aber wiederum die ersten drei empirischen Momente nur approximativ.

Eine einfache Berechnung der Parameter der schiefen Verteilungen direkt aus den beobachteten empirischen Renditen ist nicht möglich. Die Bestimmung der Parameter erfolgt über Maximum-Likelihood-Methoden. Die Parameter werden also so gewählt, dass die Anpassung der Verteilung an die empirischen Renditen gemessen an der Log-Wahrscheinlichkeit<sup>12</sup> maximal ist. Dazu wird die Summe der logarithmierten Wahr-

<sup>10</sup> Formal:  $\mathbf{X} \sim \text{MSN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha})$ .

<sup>11</sup> Vergleiche zu diesem Ergebnis insbesondere die Herleitung von *Azzalini/Capitanio* (1999), Gleichung 11.

<sup>12</sup> Die Loglikelihood kann im Folgenden dann auch als Gütemaß für die Kalibrierung der schiefen Normalverteilung herangezogen werden.

scheinlichkeiten für die beobachteten Renditezeitreihen maximiert. Formal wird für eine Beobachtung von  $x_i (i = 1, \dots, n)$  Datenpunkten  $LL = \sum_{i=1}^n \log(f_{SNV}(x_i))$  maximiert, wobei  $f$  die multivariate Dichtefunktion der  $x_1, \dots, x_n$  aus Gleichung 9 ist. Intuitiv wird also diejenige Verteilung gesucht, aus der die beobachteten Renditen mit höchster Wahrscheinlichkeit gezogen worden sein könnten. Für die schiefe Normalverteilung ergibt sich formal:

$$\begin{aligned} \max_{\mu, \mathbf{V}, \alpha'} LL &= \sum_{i=1}^n \log[f_{SNV}(x_i, \mu, \mathbf{V}, \alpha')] \\ &= n \cdot \log 2 + \sum_{i=1}^n \log[f_{NV}(x_i; \mu, \mathbf{V})] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \log[\Phi_{NV}(\alpha_i \cdot x_i; \alpha' \mu; 1)] \end{aligned} \tag{12}$$

Diese Maximierung ist bei Anwendung des Gradientenverfahrens mithilfe von Standardsoftware möglich. Die Gradienten, d.h. die Ableitungen der  $LL$ -Funktion nach den zu optimierenden Parametern, können entsprechend an die Maximierungsroutine übergeben werden und beschleunigen die Lösung des Maximierungsproblems. Wir benutzen die Funktion „fmincon“ in Matlab sowie eine adaptierte Version der Optimierungsroutinen von Azzalini.<sup>13</sup>

Die Kalibrierung der schiefen Normalverteilung auf die drei Größenindizes erfolgt in Matlab. Es ergeben sich die im Folgenden dargestellten Parameter für die schiefe Normalverteilung:

$$\mu' = (0.0071 \quad 0.0120 \quad 0.0141) \tag{13}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.6401 & 0.5477 & 0.5016 \\ 0.5477 & 0.5861 & 0.5723 \\ 0.5016 & 0.5723 & 0.6158 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\alpha' = (1.6178 \quad -0.3988 \quad -2.1862) \tag{15}$$

Anhand der geschätzten Verteilung lassen sich die geschätzten Momente berechnen und mit den empirischen Momenten vergleichen. Die Anpassung an die empirische Erwartungsrendite und die empirische Varianz-/Kovarianz-Matrix gelingt dabei sehr gut und es ergeben sich nur

<sup>13</sup> Diese finden sich unter <http://azzalini.stat.unipd.it/SN>. Die MSN-Funktionen haben wir im Wesentlichen auf die neueren Funktionen von Matlab umgestellt.



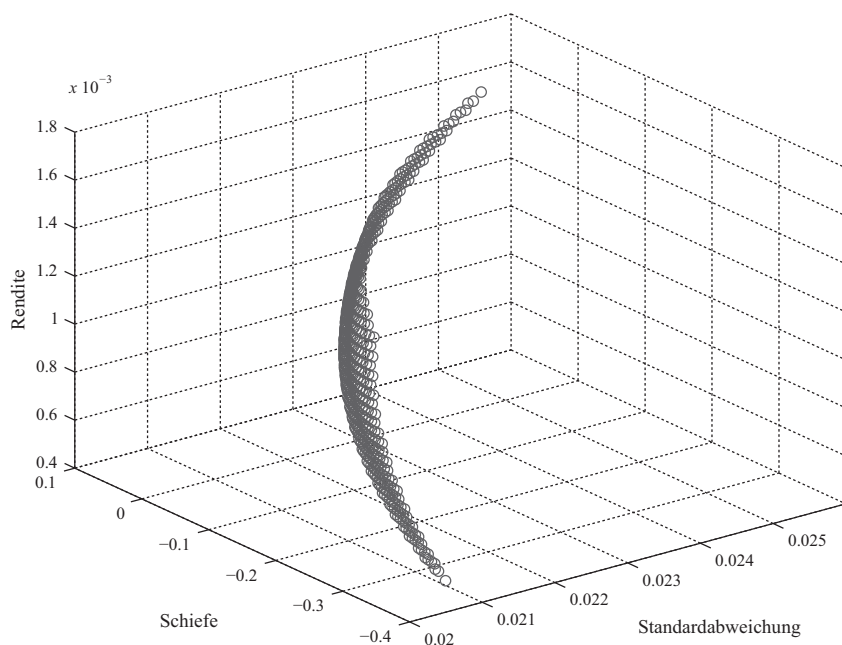


Abbildung 7: MVS-Grenze unter der schiefen Normalverteilung: Dreidimensionale Fläche effizienter Portfolios unter schiefer Normalverteilung

geringfügige Abweichungen von den empirischen Momenten. Die Anpassung der Schiefen der Verteilung an die empirische Schiefe-/Koschiefe-Matrix wird wesentlich durch die Parameter  $\alpha$  gesteuert. Damit stehen nun lediglich drei zusätzliche Parameter zur Kalibrierung von 12 Schiefen und Koschiefen zur Verfügung. Trotzdem kann die kalibrierte schiefe Normalverteilung die empirischen dritten Momente relativ exakt abbilden.

Grundsätzlich ist die Anpassung relativ genau. Gerade für den Index der mittelgroßen Aktien ergeben sich jedoch deutliche Unterschiede.<sup>14</sup> Mithilfe der Loglikelihood lässt sich die Anpassung an die empirischen Indizes auch mit alternativen Verteilungsannahmen vergleichen. Die schiefe Normalverteilung bietet auch auf Grundlage dieser statistischen Tests eine bessere Anpassung an die empirischen Renditen. Bildet man

<sup>14</sup> Während die empirische Schiefe für diesen Index  $-0.265$  beträgt, ergibt sich aufgrund der schiefen Normalverteilung lediglich eine Schiefe von  $-0.168$ . Der absolute Unterschied von  $0.0963$  stellt zugleich den größten Unterschied in der Anpassung dar.

nun erneut eine dreidimensionale Fläche, auf der zu jeder Kombination von Erwartungsrendite und Standardabweichung das Portfolio mit minimaler Varianz abgetragen wird, so ergibt sich die Abbildung 7.

Trotzdem ergeben sich auch für die Portfolioselektion unter der schiefen Normalverteilung verglichen mit einer rein zweidimensionalen Analyse deutlich mehr effiziente Portfolios, weil die Schiefe als zusätzliches Entscheidungskriterium in die Analyse einbezogen wird.

## V. Zusammenfassung

Möchte man die Annahme normalverteilter Renditen im Rahmen der Portfolioselektion aufgeben, so ergeben sich grundsätzlich zwei verschiedene Vorgehensweisen: Zum einen besteht die Möglichkeit, die zu untersuchenden höheren Momente direkt statistisch zu erfassen und zu optimieren, zum anderen kann ein alternatives Renditemodell unterstellt werden. In dieser Arbeit wurden beide Ansätze exemplarisch vorgestellt. Dabei erfolgte die Erweiterung unter besonderer Berücksichtigung der Schiefen und Koschiefen der Anlagerenditen. Entlang der drei Dimensionen Erwartungsrendite, Standardabweichung und Schiefe werden dann effiziente Portfolios bestimmt und dargestellt. Die Auswahl eines Portfolios für einen Investor kann jedoch nur anhand der spezifischen Nutzenfunktion erfolgen.

Neben der Schiefe der Anlagerenditen hat auch die Kurtosis der Anlagerenditen verstärkte Aufmerksamkeit erfahren. Während eine direkte Erfassung und Optimierung auch der statistischen Ausprägung der Kurtosis sehr aufwändig ist, bietet die schiefe  $t$ -Verteilung eine Möglichkeit, auch die Kurtosis der Anlagerenditen zu erfassen. Auch die schiefe  $t$ -Verteilung kann empirisch gute Ergebnisse für Anlagerenditen erzielen.

## Literatur

- Adcock, C. (2002): Asset pricing and portfolio selection based on the multivariate skew-student distribution. Working Paper, University of Sheffield. – Azzalini, A./Capitanio, A. (1999): „Statistical applications of the multivariate skew-normal distribution“, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 61, 579–602. – Azzalini, A./Capitanio, A. (2003): „Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew  $t$  distribution“, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 65, 367–389. – Azzalini, A./Valle, A. D. (1996): „The multivariate skew-normal distribution“, *Biometrika* 83(4), 715–726. – Chunchachinda, P./Dandapani, K./Hamid, S./Prakash, A. J. (1997): „Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets“, *Journal of Banking and Finance* 21, 143–167. – de Athayde, G. M./Flores, R. (2004): „Finding a maximum skewness portfolio – a general solution to three-moments portfolio choice“, *Journal of Economic Dynamics and Control* 28(7), 1335–1352. – Ferreira, J. T./Steel, M. F. (2003): Bayesian multivariate regression analysis with a new class of skewed distributions. Working Paper, University of Warwick. – Francis, J. C. (1975): „Skewness and investors' decision“, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 10(1), 163–172. – Friend, I./Westerfield, R. (1980): „Co-skewness and capital asset pricing“, *The Journal of Finance* 35(4), 897–913. – Gamba, A./Rossi, F. A. (1998): „A three-moment based portfolio selection model“, *Revista di Matematica Applicata alla Scienze Economiche e Sociali* 21, 25–48. – Harvey, C. R./Liechty, J. C./Liechty, M. W./Müller, P. (2003): Portfolio selection with higher moments. Working Paper, Duke University. – Harvey, C. R./Siddique, A. (2000): „Conditional skewness in asset pricing tests“, *Journal of Finance* 54(3), 1263–1295. – Ingersoll, J. E. (1987): *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield. – Jean, W. H. (1971): „The extension of portfolio analysis to three or more parameters“, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 6(1), 505–515. – Jondeau, E./Rockinger, M. (2003): „Conditional volatility, skewness, and kurtosis: Existence and persistence“, *Journal of Economic Dynamics and Control* 27(10), 1699–1737. – Jondeau, E./Rockinger, M. (2004): Conditional asset allocation under non-normality: How costly is the mean-variance criterion? Working Paper, HEC Lausanne and FAME. – Kane, A. (1982): „Skewness preference and portfolio choice“, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17(1), 15–25. – Markowitz, H.M. (1952): „Portfolio selection“, *Journal of Finance* 7(1), 77–91. – Sahu, S. K./Dey, D. K./Branco, M. D. (2003): „A new class of multivariate skew distributions with applications to bayesian regression models“, *Canadian Journal of Statistics* 31, 129–150. – Scott, R. C./Horvath, P. A. (1980): „On the direction of preference for moments of higher order than the variance“, *Journal of Finance* 35(4), 915–919. – Simaan, Y. (1993): „Portfolio selection and asset pricing – three-parameter framework“, *Management Science* 39(5), 568–577.

## **Zusammenfassung**

### **Schiefe in der Portfolioselektion**

In dieser Arbeit untersuchen wir die Einflüsse von nicht normalverteilten Anlagerenditen auf die Portfoliooptimierung. Dabei konzentrieren wir uns auf die Analyse höherer Momente der Renditeverteilung und hierbei insbesondere auf die Schiefe als drittes Moment der Verteilung. Das Vorgehen in dieser Arbeit stellt damit die unmittelbare Weiterführung der Mean-Variance-Selektion von Markowitz (1952) dar. (JEL G11)

## **Summary**

### **Lopsided Portfolio Selection**

In this Article we have analysed the implications for portfolio optimisation of returns on investment not distributed normally. We have focused our activities on analysing higher moments of distribution of returns and, in particular, on lopsidedness as the third moment of distribution. So, the approach selected for this article represents an immediate continuation of the mean variance selection by Markowitz (1952).