

## **Optimale Darlehensbündel in der privaten Immobilienfinanzierung bei steigender Zinsstrukturkurve**

Von Frank Schuhmacher, Leipzig

### **I. Einleitung**

Private Immobilienkäufer verwenden in der Regel (zu Recht) sehr viel Zeit für die Suche und den Vergleich verschiedener Immobilienfinanzierungen. Häufig wählen sie bei Einhaltung bestimmter Randbedingungen (Annuität, Laufzeit, Restschuld etc.) letztendlich das Bankdarlehen mit der niedrigsten Effektivverzinsung, das möglicherweise noch mit in der Förderhöhe begrenzten Förderdarlehen kombiniert wird.

Diese auf den ersten Blick sinnvolle und überzeugende Vorgehensweise führt jedoch gerade in der heutigen Zeit (mit einer steigenden Zinsstrukturkurve auf relativ niedrigem Niveau) in der privaten Immobilienfinanzierung zu systematischen Fehlentscheidungen und ungenutzten Optimierungspotenzialen. Wie in diesem Aufsatz analytisch gezeigt wird, und wie es praktisch tätigen Wissenschaftlern wohl bekannt ist, ist es im Fall einer steigenden Zinsstrukturkurve durchaus sinnvoll, anstelle eines einzelnen Annuitätendarlehens ein Bündel aus verschiedenen Annuitätendarlehen mit verschiedenen Zinsbindungen abzuschließen.

Am besten kann man das Problem mit einem einfachen und aktuellen Zahlenbeispiel illustrieren. Am 27.4.2011 konnte man auf der Homepage der nach eigener Aussage beliebtesten Bank Deutschlands folgende Konditionen für eine Baufinanzierung nachlesen (siehe nächste Seite).

Zusätzlich – und diese Informationen konnte man ebenfalls am 27.4.2011 derselben Homepage entnehmen – sind kostenlose Sondertilgungen in Höhe von 5 % der Darlehenssumme pro Jahr sowie zwei kostenlose Änderungen des Tilgungssatzes möglich, wobei der Tilgungssatz zwischen 1 % und 10 % frei wählbar ist.

Das Beispiel betrachtet einen privaten Haushalt, der eine Immobilie zur Selbstnutzung erwerben möchte, für die Finanzierung der Immobilie mit einer monatlichen Annuität von 4.000 € rechnet und den Zinssatz für

Tabelle 1

**Konditionen bei Finanzierung bis zu 50 % des Kaufpreises  
bzw. der Herstellungskosten**

Laufzeit	Finanzierungssumme	Fester Sollzins p. a.	Effektiver Jahreszins
5 Jahre	ab 200.000 EUR	3,55 %	3,61 %
10 Jahre	ab 200.000 EUR	4,15 %	4,23 %
15 Jahre	ab 200.000 EUR	4,65 %	4,75 %

die Immobilienfinanzierung über 15 Jahre festschreiben möchte. Unter der vereinfachenden Annahme, dass der Haushalt nach 15 Jahren schuldenfrei sein möchte, stellt er sich die Frage, welche Darlehenssumme er maximal aufnehmen kann.

Falls der Haushalt mit der Bank einen einzelnen Darlehensvertrag mit einer Zinsbindung von 15 Jahren abschließt, dann kann er eine Darlehenssumme von 517.678 € finanzieren und ist am Ende der 15 Jahre vollkommen schuldenfrei.<sup>1</sup> Der dazugehörige effektive Jahreszinssatz ist 4,75 %. Alternativ kann der Haushalt mit der Bank zwei Darlehensverträge mit zwei Zinsbindungen über 10 und 15 Jahre abschließen. Mit einer Änderung des anfänglichen Tilgungssatzes kann er dieses Darlehensbündel genau so gestalten, dass er wie beim zuvor betrachteten, einzelnen Darlehensvertrag mit 15-jähriger Zinsbindung keinem Zinsänderungsrisiko ausgesetzt ist. Konkret sieht das optimale Darlehensbündel wie folgt aus:<sup>2</sup> Das Darlehen mit 10-jähriger Zinsbindung beinhaltet eine Darlehenssumme von 279.233 €, eine monatliche Annuität von 2.847 € und ist nach 10 Jahren vollständig getilgt. Für dieses Darlehen ist keine Anschlussfinanzierung notwendig und insofern führt es auch zu keinem Zinsänderungsrisiko. Das Darlehen mit 15-jähriger Zinsbindung beinhaltet eine Darlehenssumme von 244.876 €, eine monatliche Annuität von 1.153 € in den ersten 10 Jahren und 4.000 € in den letzten 5 Jahren. Die Erhöhung der Annuität nach 10 Jahren erreicht der Haushalt über eine

<sup>1</sup> Rechnet man den Sollzinssatz 4,65 % p. a. in einen monatlichen Sollzinssatz um, so erhält man  $I = 0,3875\%$ . Bei einer monatlichen Annuität von  $A = 4.000$  €, einem monatlichen Sollzinssatz von  $I = 0,3875\%$  und  $N = 180$  Monaten berechnet man mithilfe des Rentenbarwertfaktors eine Darlehenssumme von  $517.678 \text{ €} = A \cdot (1/I - 1/[I \cdot (1 + I)^N])$ .

<sup>2</sup> Die Berechnung des optimalen Darlehensbündels wird im Folgenden detailliert dargestellt.

kostenlose Erhöhung des anfänglichen Tilgungssatzes. Somit kann der Haushalt bei Vereinbarung dieses Darlehensbündels insgesamt eine Darlehenssumme von 524.108 € finanzieren. Man kann zeigen, dass der dazugehörige effektive Jahreszinssatz 4,56 % beträgt. Der Vorteil des Darlehensbündels im Vergleich zum einzelnen Darlehensvertrag beträgt somit als höhere Darlehenssumme ausgedrückt 6.430 € oder als effektiver Jahreszinssatz ausgedrückt 0,19 %-Punkte. Man kann den Vorteil auch als Prozentsatz in Bezug auf die neue Darlehenssumme ausdrücken und erhält so einen Wert von 1,23 %.

Dieses einfache und aktuelle Zahlenbeispiel illustriert, dass bei einer steigenden Zinsstrukturkurve ein Darlehensbündel aus mehreren Darlehen mit verschiedenen Zinsbindungen durchaus Mehrwert schaffen kann. Somit stellt sich die Frage nach der generellen Vorteilhaftigkeit von Darlehensbündeln im Vergleich zu einzelnen Darlehen bei einer steigenden Zinsstrukturkurve.

Obwohl die Beantwortung dieser Frage praktisch wichtig ist, findet man dazu bislang keine wissenschaftliche oder praktische Literatur.<sup>3</sup> Verschiedene praxisorientierte Ratgeber zur Immobilienfinanzierung weisen zwar auf einen sogenannten Hypothekenmix hin, wie etwa *Hörling* (2011), *Brückner/Lücke* (2004) oder *Schulze/Stein* (2004). Diese Hinweise haben aber in der Regel einen anderen Hintergrund als eine steigende Zinsstrukturkurve. Weitere Optimalitätsanalysen findet man etwa in *Schöpe* (2000), wobei allerdings Abhängigkeiten zwischen verschiedenen einzelnen Darlehen grundsätzlich vernachlässigt werden. Die optimale Wahl eines Disagios untersucht *Wolfersberger* (2000), wobei für selbstgenutzte Wohnimmobilien in der Regel ein Disagio von null optimal ist. Leasingverträge in der privaten Immobilienfinanzierung untersuchen zum Beispiel *Buhl et al.* (1999). Am nächsten zu der in diesem Beitrag untersuchten Problemstellung ist *Kundisch/Dzienziol* (2009), die ebenfalls optimale Darlehensbündel untersuchen, allerdings bei identischer Zinsbindung.

Der vorliegende Aufsatz möchte das gerade beispielhaft aufgezeigte Optimierungspotenzial in der privaten Immobilienfinanzierung im Rahmen eines relativ allgemeinen Modells analysieren und analog zu *Kundisch/Dzienziol* (2009) folgende Forschungsfragen beantworten:

---

<sup>3</sup> Zumindest hat der Autor trotz einer gewissen Suche keine Literatur zur optimalen Kombination verschiedener Annuitätendarlehen mit verschiedenen Zinsbindungsauern bei einer steigenden Zinsstrukturkurve gefunden.

1. In welcher Situation ist für den Darlehensnehmer ein Darlehensbündel mit verschiedenen Zinsbindungen – und nicht ein einzelnes Darlehen mit nur einer einzelnen Zinsbindung – die optimale Lösung?
2. Welches ist die optimale Aufteilung der Darlehenssumme und Annuität auf die verschiedenen Darlehen mit den verschiedenen Zinsbindungen, falls ein Darlehensbündel optimal ist?

## II. Das Modell

### 1. Annahmen

- (AN1) Es wird ein privater Haushalt betrachtet, der eine Immobilie zur Selbstnutzung erwerben und den Zinssatz für die Immobilienfinanzierung für  $N$  Monate festschreiben möchte. Er rechnet mit einer monatlichen Annuität von  $A$  und einer Restschuld von  $R$  nach  $N$  Monaten. Der private Haushalt verfolgt das Ziel, die Darlehenssumme in  $T = 0$  zu maximieren.
- (AN2) Zur Auswahl stehen drei Darlehensverträge einer Bank mit den in Monaten ausgedrückten Zinsbindungen  $K$ ,  $M$  und  $L$ , wobei  $K < M < L = N$  gilt. Zur Vereinfachung werden die Darlehensverträge als kurz-, mittel- und langfristige Verträge bezeichnet. Die dazugehörigen Sollzinssätze sind  $I_K$ ,  $I_M$  und  $I_L$ , die zur Vereinfachung monatliche Zinssätze sind. Die Auszahlungskurse der einzelnen Darlehen betragen jeweils 100%. Die Zins- und Tilgungsverrechnung erfolgt unmittelbar zum Ende eines jeden Monats. Die anfänglichen Tilgungssätze können zwischen 1% und 10% frei gewählt und zweimal kostenlos geändert werden.<sup>4</sup>
- (AN3) Der Haushalt kann einen langfristigen Darlehensvertrag abschließen. Er kann diesen langfristigen Darlehensvertrag aber auch kombinieren mit einem oder zwei weiteren Darlehensverträgen, die alle gleichzeitig in  $T = 0$  abgeschlossen werden. Solche Kombinationen aus mehreren Darlehensverträgen werden im Folgenden als Darlehensbündel bezeichnet. Diese Kombinationen sollen dabei jeweils so erfolgen, dass für Darlehensverträge

---

<sup>4</sup> Mittlerweile bietet die in der Einleitung erwähnte Bank kostenlose Änderungen des anfänglichen Tilgungssatzes zumindest bei Neufinanzierungen nicht mehr an. Stattdessen betragen die Kosten 100 € pro Änderung. Lediglich bei Anschlussfinanzierungen bietet die Bank zwei kostenlose Änderungen des Tilgungssatzes an.

mit kürzeren Zinsbindungen keine Anschlussfinanzierungen notwendig sind, d.h., diese werden vollständig während der Zinsbindungsfrist getilgt. Damit werden zugleich Zinsänderungsrisiken ausgeschlossen. Insgesamt stehen dem Haushalt in  $T = 0$  die folgenden Alternativen zur Verfügung:<sup>5</sup>

- Alternative 1 besteht in dem Abschluss des einzelnen, langfristigen Darlehensvertrags.
- Alternative 2 ist das Darlehensbündel aus mittel- und langfristigem Darlehensvertrag. Zur Vereinfachung wird dieses Darlehensbündel im Folgenden als mittel- bis langfristiges Darlehensbündel bezeichnet.
- Alternative 3 ist das kurz- bis langfristige Darlehensbündel, das aus einem kurz-, einem mittel- und einem langfristigen Darlehensvertrag besteht.
- Die letzte Alternative 4, das kurz- und langfristige Darlehensbündel, besteht aus einem kurz- und einem langfristigen Darlehensvertrag.

Die Diskussion dieser Annahmen (AN1) bis (AN3) folgt im Anschluss an die Analyse. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass der Leser direkt erkennen kann, welche Auswirkungen alternative Annahmen auf die Analyse haben.

Im Folgenden bezeichnet  $RBF(I, X)$  den Rentenbarwertfaktor bei einem monatlichen Zinssatz von  $I$  und einer Laufzeit von  $X$  Monaten:  $RBF(I, X) = 1/I - 1/[I \cdot (1 + I)^X]$ .<sup>6</sup>

## 2. Analyse

Für die Ermittlung des insgesamt optimalen Darlehensbündels ist es zweckmäßig, zunächst mit der Analyse der Alternative 1, dem einzelnen, langfristigen Darlehensvertrag, zu beginnen. Der einzelne, langfristige

---

<sup>5</sup> In jeder Alternative muss der langfristige Darlehensvertrag enthalten sein, damit der Haushalt den Zinssatz für  $N$  Monate festschreiben kann. Zur Vereinfachung wird die Annahme zweimaliger kostenloser Änderungen des Tilgungssatzes aufrechterhalten. Man kann dies rechtfertigen, weil zum einen Kosten in Höhe von 100 € für Änderungen des Tilgungssatzes relativ klein sind. Und zum anderen kann man mit kostenlosen Sondertilgungen arbeiten.

<sup>6</sup> Weitere Informationen zum Rentenbarwertfaktor findet man etwa in *Locarek-Junge* (1997) oder *Kruschwitz* (2010).

Darlehensvertrag beinhaltet bei einer Zinsbindung von  $L$  Monaten und einem Sollzinssatz von  $I_L$  eine monatliche Annuität von  $A$ . Bei einer Restschuld von  $R$  kann der Haushalt mit diesem Vertrag folgende Darlehenssumme finanzieren:

$$(1) \quad D_1 = A \cdot RBF(I_L, L) + R/(1 + I_L)^L$$

Mit Formel (1) kann man den anfänglichen, monatlichen Tilgungssatz  $T_{1L}$  berechnen und überprüfen, ob er die Nebenbedingungen der Annahme (AN2) erfüllt. Die Formel zur Berechnung des anfänglichen, monatlichen Tilgungssatzes und die dazugehörigen Nebenbedingungen lauten:<sup>7</sup>

$$(2a) \quad T_{1L} = A/[A \cdot RBF(I_L, L) + R/(1 + I_L)^L] - I_L$$

$$(2b) \quad 1\% < 12 \cdot T_{1L} \leq 10\%$$

Für die weitere Vorgehensweise ist es wichtig, dass der anfängliche, monatliche Tilgungssatz  $T_{1L}$  die Ungleichungen (2b) erfüllt. Insbesondere muss der anfängliche, jährliche Tilgungssatz strikt größer als 1 % sein, damit ein Optimierungspotenzial besteht. Wäre er gleich 1 %, dann wären zwar die Nebenbedingungen in Annahme (AN2) erfüllt, aber es wäre keine Senkung der anfänglichen Annuität und damit einhergehend auch keine Optimierung möglich.

Für das Eingangsbeispiel berechnet man für Alternative 1 mit Formel (1) eine Darlehenssumme von  $D_1 = 517.678$  € und mit Formel (2a) einen anfänglichen, monatlichen Tilgungssatz von 0,385 % bzw. einen anfänglichen, jährlichen Tilgungssatz von 4,62 %, die augenscheinlich die Ungleichungen in (2b) erfüllen.

Im Falle einer steigenden Zinsstrukturkurve mit  $I_M < I_L$  stellt sich die Frage, ob der Haushalt seine insgesamt finanzierbare Darlehenssumme erhöhen kann, indem er von der Alternative 1 (dem langfristigen Darlehensvertrag) zur Alternative 2 (dem mittel- bis langfristigen Darlehensbündel) wechselt. Der Vorteil dieses Wechsels besteht darin, dass der Haushalt zumindest einen Teil seiner Darlehenssumme zu dem relativ niedrigen Sollzinssatz  $I_M$  (anstatt zu dem relativ hohen Sollzinssatz  $I_L$ ) finanzieren kann. Beim Wechsel von Alternative 1 zur Alternative 2 senkt

---

<sup>7</sup> Für den anfänglichen, monatlichen Tilgungssatz gilt  $A = D_1 \cdot (I_L + T_{1L})$ . Löst man diese Gleichung nach  $T_{1L}$  auf und setzt für  $D_1$  die rechte Seite der Gleichung (1) ein, so erhält man Gleichung (2a).

der Haushalt die im langfristigen Darlehensvertrag vereinbarte Annuität in den ersten  $M$  Monaten von  $A$  auf  $A_L$ , um mit der Bank einen mittelfristigen Darlehensvertrag mit einer Zinsbindung und Laufzeit von  $M$  Monaten und einer monatlichen Annuität von  $A_M = A - A_L$  zu vereinbaren. Dadurch kann der Haushalt seine insgesamt finanzierbare Darlehenssumme gemäß Anhang 1 um folgenden Betrag erhöhen:

$$(3) \quad \begin{aligned} D_2(A_L) - D_1 &= (A - A_L) \cdot RBF(I_M, M) - (A - A_L) \cdot RBF(I_L, M) \\ &= (A - A_L) \cdot [RBF(I_M, M) - RBF(I_L, M)] \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $D_1$  die Darlehenssumme der Alternative 1, die in Formel (1) berechnet wird, und  $D_2(A_L)$  die Darlehenssumme der Alternative 2, die im Anhang 1 berechnet wird. Bei der Darlehenssumme  $D_2(A_L)$  ist zu beachten, dass diese zum einen lediglich von der Annuität  $A_L$  in den ersten  $M$  Monaten abhängt und zum anderen sich aus den Darlehenssummen  $D_{2M}(A_L)$  und  $D_{2L}(A_L)$  des mittel- und langfristigen Darlehensvertrags zusammensetzt.

Am einfachsten kann man Gleichung (3) interpretieren, indem man die Bestandteile der Differenz in der oberen Zeile einzeln betrachtet. Der Minuend beschreibt, um wie viel Euro die insgesamt finanzierbare Darlehenssumme steigt infolge der Erhöhung der monatlichen Annuität des mittelfristigen Vertrags um  $A_M = A - A_L$ . Der Subtrahend beschreibt, um wie viel Euro die insgesamt finanzierbare Darlehenssumme sinkt infolge der Senkung der Annuität des langfristigen Vertrags in den ersten  $M$  Monaten um  $A_M = A - A_L$ .

Alternativ kann man die untere Zeile der Gleichung (3) wie folgt interpretieren: Der erste Faktor  $A_M = A - A_L$  beschreibt, wie viel Euro beim Wechsel von Alternative 1 zur Alternative 2 in den ersten  $M$  Monaten monatlich vom langfristigen in den mittelfristigen Darlehensvertrag umgelenkt werden. Der zweite Faktor beschreibt den Vorteil dieses Wechsels pro umgelenkten Euro. Augenscheinlich ist dieser Vorteil genau dann positiv, wenn eine steigende Zinsstrukturkurve mit  $I_M < I_L$  vorliegt.

Für das Eingangsbeispiel berechnet man für den Wechsel von Alternative 1 zur Alternative 2 einen Vorteil von 2,26 € pro umgelenkten Euro.

Aus Formel (3) folgt, dass es im Rahmen der Alternative 2 optimal ist, für die ersten  $M$  Monate die Annuität  $A_L$  möglichst weit zu senken und damit einhergehend die Annuität  $A_M = A - A_L$  möglichst weit zu erhöhen. Dabei sind jedoch die Nebenbedingungen der Annahme (AN2) zu beachten, dass die anfänglichen, jährlichen Tilgungssätze der beiden

Darlehen zwischen 1 % und 10 % liegen müssen. Wie im Anhang 2 gezeigt wird, ist im Rahmen der Alternative 2 der anfängliche, monatliche Tilgungssatz  $T_{2M}$  des mittelfristigen Darlehensvertrags gleich

$$(4) \quad T_{2M} = 1/RBF(I_M, M) - I_M.$$

Aus Formel (4) erkennt man, dass  $T_{2M}$  nicht von der Annuität  $A_M$ , sondern nur von dem Zinssatz  $I_M$  und der Zinsbindungsdauer  $M$  abhängt. Auf den ersten Blick mag dieses Ergebnis überraschen, dass der anfängliche, monatliche Tilgungssatz  $T_{2M}$  nicht von der monatlichen Annuität  $A_M$  abhängt. Bei genauerer Betrachtung erkennt man aber, dass dieses Ergebnis genau dann gilt, wenn die Restschuld des Darlehens am Ende der Zinsbindungsdauer gleich null ist. Denn in diesem Fall führt eine Erhöhung der monatlichen Annuität  $A_M$  zu einer proportionalen Erhöhung der Darlehenssumme  $D_{2M}(A_M)$ , sodass der Quotient aus monatlicher Annuität und Darlehenssumme sich nicht verändert und damit zusammenhängend der anfängliche Tilgungssatz sich ebenfalls nicht verändert.

Für die Ermittlung der optimalen Alternative 2 führt dieses Ergebnis zu folgendem Vorgehen. Zunächst überprüft der Haushalt, ob der über Formel (4) berechnete anfängliche Tilgungssatz des mittelfristigen Darlehens die Nebenbedingungen erfüllt. Falls dies nicht der Fall ist, existiert keine optimale Alternative 2. Falls dies doch der Fall ist, existiert eine optimale Alternative 2 und die dazugehörigen optimalen Annuitäten berechnet der Haushalt über die bindende Nebenbedingung, dass der anfängliche, monatliche Tilgungssatz des langfristigen Darlehens 0,01/12 ist. Dies führt gemäß Anhang 3 zu folgender Formel:

$$(5) \quad A_{L^*} = [A \cdot RBF(I_L, L - M)/(1 + I_L)^M + R/(1 + I_L)^L] \cdot (0,01/12 + I_L)/[1 - RBF(I_L, M) \cdot (0,01/12 + I_L)]$$

In Anhang 3 wird weiterhin gezeigt, dass unter der Annahme (2b) stets  $A_{L^*} < A$  gilt.

Für das Eingangsbeispiel berechnet man für das mittelfristige Darlehen mit Formel (4) einen anfänglichen, monatlichen Tilgungssatz von 0,675 % bzw. einen anfänglichen, jährlichen Tilgungssatz von 8,1 %, der augenscheinlich die Nebenbedingungen der Annahme (A2) erfüllt. Für das langfristige Darlehen ist der anfängliche, jährliche Tilgungssatz gleich 1 % und gemäß Formel (5) die dazugehörige optimale Annuität gleich  $A_{L^*} = 1.153$  €. Daraus folgt die optimale Annuität für den mittelfristigen Darlehensvertrag von  $A_{M^*} = 2.847$  €. Das heißt, der Haushalt

zahlt in den ersten 10 Jahren gemäß dem mittelfristigen Darlehensvertrag 2.847 € und gemäß dem langfristigen Darlehensvertrag 1.153 € an die Bank. In den letzten 5 Jahren zahlt der Haushalt gemäß dem verbleibenden, langfristigen Darlehensvertrag die gesamte Annuität von 4.000 € an die Bank. Weiterhin kann man mit Formel (3) den Vorteil der optimalen Alternative 2 gegenüber der Alternative 1 berechnen und erhält  $D_2(A_{L^*}) - D_1 = 2.847 \cdot 2,26 = 6.430$  €. Damit ist die Darlehenssumme der optimalen Alternative 2 gleich  $D_2(A_{M^*}) = 517.678 + 6.430 = 524.108$  €.

Nach Berechnung der optimalen Alternative 2 stellt sich im Falle einer steigenden Zinsstrukturkurve mit  $I_K < I_M$  wiederum die Frage, ob der Haushalt seine insgesamt finanzierbare Darlehenssumme noch weiter erhöhen kann, indem er von der optimalen Alternative 2 (dem mittel- bis langfristigen Darlehensbündel) zur Alternative 3 (dem kurz- bis langfristigen Darlehensbündel) wechselt. Beim Vergleich dieser beiden Alternativen ist unmittelbar klar, dass der langfristige Darlehensvertrag mit der in Formel (5) berechneten Annuität  $A_{L^*}$  für die ersten  $M$  Monate optimal ist. Eine Verringerung dieser Annuität ist nicht möglich, weil dies zu einem anfänglichen, jährlichen Tilgungssatz unter 1% und damit zu einer Verletzung der Nebenbedingung führen würde. Eine Erhöhung dieser Annuität ist gemäß den Ausführungen des vorhergehenden Absatzes ebenfalls nicht optimal. Das heißt, beim Wechsel von Alternative 2 zur Alternative 3 steht lediglich die Überlegung im Raum, in den ersten  $K$  Monaten die im mittelfristigen Darlehensvertrag vereinbarte, monatliche Annuität um den Betrag  $A_K$  zu senken und diesen Betrag als monatliche Annuität in den kurzfristigen Darlehensvertrag fließen zu lassen. Dadurch kann der Haushalt seine insgesamt finanzierbare Darlehenssumme gemäß Anhang 4 um folgenden Betrag erhöhen:

$$(6) \quad \begin{aligned} D_3(A_K|A_{L^*}) - D_2(A_{L^*}) &= A_K \cdot RBF(I_K, K) - A_K \cdot RBF(I_M, K) \\ &= A_K \cdot [RBF(I_K, K) - RBF(I_M, K)] \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $A_{L^*}$  die gemäß Formel (5) berechnete Annuität und  $D_2(A_{L^*})$  die dazugehörige Darlehenssumme der optimalen Alternative 2, die im Anhang 1 berechnet wird. Weiterhin bezeichnet  $D_3(A_K|A_{L^*})$  die Darlehenssumme der Alternative 3, die im Anhang 4 berechnet wird. Bei der Darlehenssumme  $D_3(A_K|A_{L^*})$  ist zu beachten, dass diese bei gegebener Annuität  $A_{L^*}$  lediglich von der Wahl der Annuität  $A_K$  abhängt. Formel (6) kann man ähnlich wie Formel (3) auf zwei verschiedene Arten interpretieren. Für die weitere Vorgehensweise ist die Interpretation der zweiten Zeile wichtiger, die hier nochmals kurz wiederholt wird. Der

erste Faktor  $A_K$  beschreibt, wie viel Euro beim Wechsel von Alternative 2 zur Alternative 3 in den ersten  $K$  Monaten monatlich vom mittelfristigen in den kurzfristigen Darlehensvertrag umgelenkt werden. Der zweite Faktor beschreibt den Vorteil dieses Wechsels pro umgelenkten Euro. Augenscheinlich ist dieser Vorteil genau dann positiv, wenn eine steigende Zinsstrukturkurve mit  $I_K < I_M$  vorliegt.

Für das Eingangsbeispiel berechnet man für den Übergang von Alternative 2 zur Alternative 3 einen Vorteil von 0,53 € pro umgelenkten Euro.

Aus Formel (6) folgt wiederum, dass es im Rahmen der Alternative 3 optimal ist, für die ersten  $K$  Monate die Annuität  $A_K$  möglichst weit zu erhöhen und damit einhergehend die Annuität  $A_M = A - A_{L^*} - A_K$  möglichst weit zu senken. Dabei sind wiederum die Nebenbedingungen zu beachten, dass die anfänglichen Tilgungssätze des kurz- und mittelfristigen Darlehensvertrags zwischen 1 % und 10 % liegen müssen. Im Rahmen der Alternative 3 gelten für den anfänglichen Tilgungssatz des kurzfristigen Darlehens ähnliche Aussagen wie für den anfänglichen Tilgungssatz des mittelfristigen Darlehens im Rahmen der Alternative 2. Das heißt, im Rahmen der Alternative 3 ist der anfängliche, monatliche Tilgungssatz  $T_{3K}$  des kurzfristigen Darlehens unabhängig von der monatlichen Annuität  $A_K$  gemäß Anhang 5 gegeben durch

$$(7) \quad T_{3K} = 1/RBF(I_K, K) - I_K.$$

Für die Ermittlung der optimalen Alternative 3 führt dieses Ergebnis zu einem ähnlichen Vorgehen wie bei der Ermittlung der optimalen Alternative 2. Zunächst muss der Haushalt überprüfen, ob der über Formel (7) berechnete anfängliche, jährliche Tilgungssatz des kurzfristigen Darlehens die Nebenbedingungen der Annahme (AN2) erfüllt. Falls dies nicht der Fall ist, dann existiert keine optimale Alternative 3. Falls dies doch der Fall ist, dann existiert eine optimale Alternative 3 und die dazugehörigen optimalen Annuitäten berechnet man wiederum über die Nebenbedingung, dass der anfängliche, monatliche Tilgungssatz des kurzfristigen Darlehens 0,01/12 ist. Dies führt gemäß Anhang 6 zu folgender Formel:

$$(8) \quad A_{M^*} = [(A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, M - K) / (1 + I_M)^K] \cdot (0,01/12 + I_M) / [1 - RBF(I_M, K) \cdot (0,01/12 + I_M)]$$

Für das Eingangsbeispiel berechnet man für das kurzfristige Darlehen mit Formel (7) einen anfänglichen, jährlichen Tilgungssatz von 18,2 %.

Dieser Tilgungssatz verletzt augenscheinlich die Nebenbedingung, sodass zumindest für das Eingangsbeispiel keine optimale Alternative 3 existiert.

Als letztes muss der Haushalt noch Alternative 4, das Darlehensbündel aus einem lang- und einem kurzfristigen Darlehensvertrag, überprüfen. Am einfachsten ist es, diese Alternative von der Alternative 1 ausgehend zu analysieren. Diese Analyse ist nämlich ähnlich wie die Analyse des Wechsels von der Alternative 1 zur Alternative 2. Beim Wechsel von Alternative 1 zur Alternative 4 senkt der Haushalt die im langfristigen Darlehensvertrag vereinbarte Annuität in den ersten  $K$  Monaten von  $A$  auf  $A_L$ , um mit der Bank einen kurzfristigen Darlehensvertrag mit einer Zinsbindung und Laufzeit von  $K$  Monaten und einer monatlichen Annuität von  $A_K = A - A_L$  zu vereinbaren. Dadurch kann der Haushalt seine insgesamt finanzierbare Darlehenssumme gemäß Anhang 7 um folgenden Betrag erhöhen:

$$(9) \quad \begin{aligned} D_4(A_K) - D_1 &= (A - A_L) \cdot RBF(I_K, K) - (A - A_L) \cdot RBF(I_L, K) \\ &= (A - A_L) \cdot [RBF(I_K, K) - RBF(I_L, K)] \end{aligned}$$

Für die optimale Alternative 4 gelten ähnliche Aussagen wie für die optimale Alternative 2. Aus Formel (9) folgt, dass es im Rahmen der Alternative 4 optimal ist, für die ersten  $K$  Monate die Annuität  $A_L$  möglichst weit zu senken und damit einhergehend die Annuität  $A_K = A - A_L$  möglichst weit zu erhöhen. Dabei sind jedoch die Nebenbedingungen der Annahme (AN2) zu beachten, dass die anfänglichen, jährlichen Tilgungssätze der beiden Darlehen zwischen 1% und 10% liegen müssen. Die Formel zur Berechnung des anfänglichen, monatlichen Tilgungssatzes des kurzfristigen Darlehens ist identisch mit Formel (7). Der dazugehörige anfängliche, jährliche Tilgungssatz des kurzfristigen Darlehens muss wiederum die Nebenbedingungen der Annahme (AN2) erfüllen. Falls er sie nicht erfüllt, existiert keine optimale Alternative 4. Falls er sie doch erfüllt, existiert eine optimale Alternative 4 und die dazugehörigen optimalen Annuitäten berechnet man wiederum über die Nebenbedingung, dass der anfängliche, monatliche Tilgungssatz des langfristigen Darlehens 0,01/12 ist und erhält gemäß Anhang 8 folgende Formel:

$$(10) \quad \begin{aligned} A_{L^*} &= [A \cdot RBF(I_L, L - K) / (1 + I_L)^K + R / (1 + I_L)^L] \\ &\quad \cdot (0,01/12 + I_L) / [1 - RBF(I_L, K) \cdot (0,01/12 + I_L)] \end{aligned}$$

Augenscheinlich existiert eine optimale Alternative 4 genau dann, wenn auch eine optimale Alternative 3 existiert. Leider ist es nicht mög-

lich, eine einfache Formel aufzuschreiben, die den Vor- oder Nachteil beim Wechsel von der Alternative 3 zur Alternative 4 beschreibt. Aus diesem Grund muss der Haushalt für die Ermittlung des insgesamt optimalen Darlehensbündels stets die Darlehenssummen der Alternativen 3 und 4 – sofern sie existieren – miteinander vergleichen. Mithilfe von Zahlenbeispielen kann man zeigen, dass Alternative 4 durchaus zu einer höheren Darlehenssumme führen kann als Alternative 3, falls die Differenz zwischen den Zinssätzen  $I_L$  und  $I_M$  hinreichend klein und die Differenz zwischen den Zinssätzen  $I_M$  und  $I_K$  hinreichend groß ist.

Zum Ende dieses Unterabschnitts sollen die Ergebnisse bzw. die Antworten auf die eingangs gestellten Forschungsfragen zusammengefasst werden.

Ergebnis 1: Darlehensbündel mit verschiedenen Zinsbindungen können genau dann optimal sein, wenn eine steigende Zinsstrukturkurve bzgl. der Sollzinssätze vorliegt.

Ergebnis 2: Das optimale Darlehensbündel ist dadurch charakterisiert, dass Annuitätendarlehen mit kürzeren Zinsbindungen im maximalen Umfang enthalten sind.

### 3. Diskussion der Annahmen

In diesem Abschnitt sollen kurz die Implikationen alternativer Annahmen diskutiert werden. Annahme (AN1) ist durchaus realistisch. Das heißt, es gibt Haushalte, die bei gegebener monatlicher Annuität und gegebener Restschuld ihre Darlehenssumme maximieren möchten, um anschließend durch Addition ihres Eigenkapitals ihre Gesamtkostengrenze für die Immobilie zu berechnen. Freilich gibt es auch Haushalte, die anders vorgehen. Es gibt zum Beispiel Haushalte, die ihre Darlehenssumme und monatliche Annuität festlegen und ihre Restschuld nach  $N$  Monaten minimieren möchten. Die Annahme (AN1) wurde gewählt, weil sie erstens – wie gerade erläutert wurde – durchaus realistisch ist und zweitens der typisch akademischen Vorgehensweise – nämlich der Maximierung des Barwerts – entspricht. Anstelle eines Haushalts, der die Darlehenssumme in  $t = 0$  maximieren möchte (bei gegebener monatlicher Annuität und gegebener Restschuld nach  $N$  Monaten), kann man auch einen Haushalt annehmen, der die Restschuld nach  $N$  Monaten minimieren möchte (bei gegebener monatlicher Annuität und gegebener Darlehenssumme). Die grundlegenden Ergebnisse gelten freilich auch für diese Annahme, weil man leicht die als höhere Darlehenssummen ausgedrückten Vorteile

$\Delta D$  in als geringere Restschuld ausgedrückte Vorteile  $\Delta R = (1 + I_L) \cdot \Delta D$  umrechnen kann. Daraus folgt, dass ein Darlehensbündel genau dann gemäß der Darlehenssumme vorteilhaft ist, wenn es gemäß der Restschuld vorteilhaft ist. Das bedeutet, die Ergebnisse 1 und 2 gelten auch bei Annahme eines Haushalts, der die Restschuld minimieren möchte.

Annahme (AN2) ist ebenfalls realistisch und beschreibt eine Situation, wie sie viele Haushalte vorfinden und wie sie im Eingangsbeispiel beschrieben ist. Aber auch für diese Annahme gilt, dass man sich viele weitere, genauso realistische Situationen (mit mehr als drei verschiedenen Zinsbindungen, mit von der Darlehenshöhe abhängigen Sollzinssätzen usw.) vorstellen kann. Die Analyse eines solchen allgemeinen Modells würde sehr unübersichtlich und unhandlich werden und keinen zusätzlichen Erkenntnisgewinn liefern. Das heißt, die Ergebnisse 1 und 2 würden ebenfalls im Rahmen eines solchen allgemeinen Modells gelten.

Eine weitere implizite Annahme ist die vollständige Ausblendung von auf bestimmte Darlehenshöhen begrenzte Förderdarlehen, wie zum Beispiel die Angebote der KfW. Solche Angebote könnte und sollte man mit in die Analyse integrieren, indem man das – gemessen am Effektivzinssatz – vorteilhafteste zuerst und in möglichst großem Umfang ausnutzt, daran anschließend das zweitbeste usw. Die bisherige Analyse könnte man dann auf die übrig bleibende Annuität anwenden.

#### 4. Praktische Probleme

In diesem Abschnitt soll kurz untersucht werden, ob sogenannte praktische Probleme existieren, die einen Abschluss eines Darlehensbündels verhindern können. An erster Stelle könnte man an die Bestellung der Grundsuld denken. Das heißt, würde man die einzelnen Darlehensverträge mit verschiedenen Banken abschließen, könnten mit der Bestellung der Grundsuld tatsächlich höhere Kosten einhergehen. Die in diesem Beitrag betrachteten Darlehensbündel bestehen aber aus verschiedenen Verträgen, die alle mit ein und derselben Bank abgeschlossen werden. Aus diesem Grund sind hier keine höheren Kosten bei der Bestellung der Grundsuld zu erwarten.

Weiterhin sind die Kosten für die Änderungen des anfänglichen Tilgungssatzes zu berücksichtigen. Im Folgenden wird mit Kosten in Höhe von 100 € pro Änderung gerechnet, was ein durchaus realistischer Wert ist. Das heißt, bei einem Darlehensbündel, das aus einem lang- und einem mittelfristigen Darlehensvertrag besteht, muss man den anfäng-

lichen Tilgungssatz einmal ändern, weshalb man den über Formel (3) berechneten Vorteil um 100 € reduzieren muss. Ob der Mehrwert des Darlehensbündels unter Berücksichtigung dieser Kosten immer noch relevant ist, hängt von der Darlehenssumme ab. Rechnet man beispielhaft mit einer Darlehenssumme von 100.000 € und einem Vorteil des Darlehensbündels in Höhe von 1 %, so beträgt der in Geldeinheiten ausgedrückte Vorteil 1.000 €. Bei Berücksichtigung der Kosten für die Änderung des Tilgungssatzes reduziert sich dieser Vorteil auf 900 €. Das heißt, selbst bei einer relativ geringen Darlehenssumme kann der Mehrwert des Darlehensbündels durchaus relevant sein.

### III. Praktische Relevanz

Zur Untersuchung der praktischen Relevanz soll in diesem Abschnitt eine kleine empirische Analyse über die letzten 15 Jahre erfolgen. Konkret wird der prozentuale Vorteil des optimalen Darlehensbündels zu Beginn jeden Monats über die letzten 15 Jahre berechnet und grafisch dargestellt. Für diese Berechnung benötigt man historische Zinssätze für Immobilienfinanzierungen. Da diese Zinssätze jedoch nicht zur Verfügung stehen, muss man diese mithilfe anderer Zinssätze approximieren. Grundsätzlich bieten sich hierfür historische Pfandbriefrenditen, Renditen von Bundesanleihen oder sogenannte Swaprates an. Grundlage der folgenden Berechnungen sind historische Swaprates, weil für 20-jährige Laufzeiten keine Pfandbriefrenditen zur Verfügung stehen und Swaprates eher als Renditen von Bundesanleihen die Opportunitätskosten der Banken beschreiben. Konkret liegen den folgenden Berechnungen 5-, 10-, 15- und 20-jährige Swaprates für den Zeitraum vom 1.7.1999 bis 1.10.2011 mit einer monatlichen Frequenz zugrunde. Die folgende Abbildung 1 stellt die Entwicklung dieser vier Zinssätze grafisch dar. Aus dieser Grafik kann man die Unterschiede zwischen den Zinssätzen verschiedener Laufzeiten grob erkennen. Augenscheinlich waren diese Unterschiede im September 2008 (Insolvenz Lehmann Brothers) praktisch gleich null, sodass auch für diesen Zeitraum keine Vorteile des optimalen Darlehensbündels zu erwarten sind.

Freilich sind Swaprates nicht identisch mit Zinssätzen für Immobilienfinanzierungen. Aktuell betragen die Unterschiede (Spreads) zwischen Swaprates und Zinssätzen für Immobilienfinanzierungen bei bester Bonität 36 Basispunkte für 5-jährige, 40 Basispunkte für 10-jährige, 48 Basispunkte für 15-jährige und 58 Basispunkte für 20-jährige Zinsbindun-

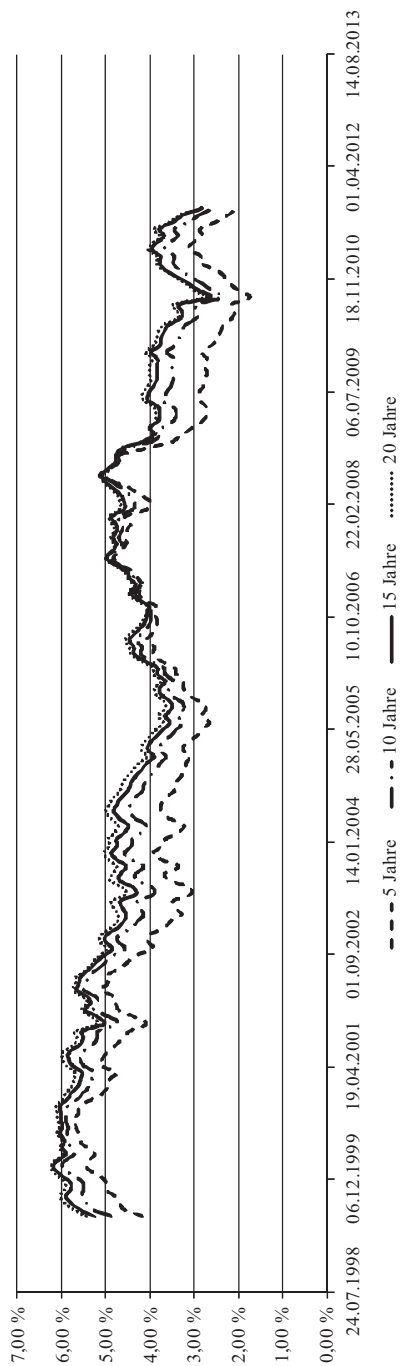


Abbildung 1: 5-, 10-, 15- und 20-jährige Swaprates für den Zeitraum vom 1.7.1999 bis 1.10.2011

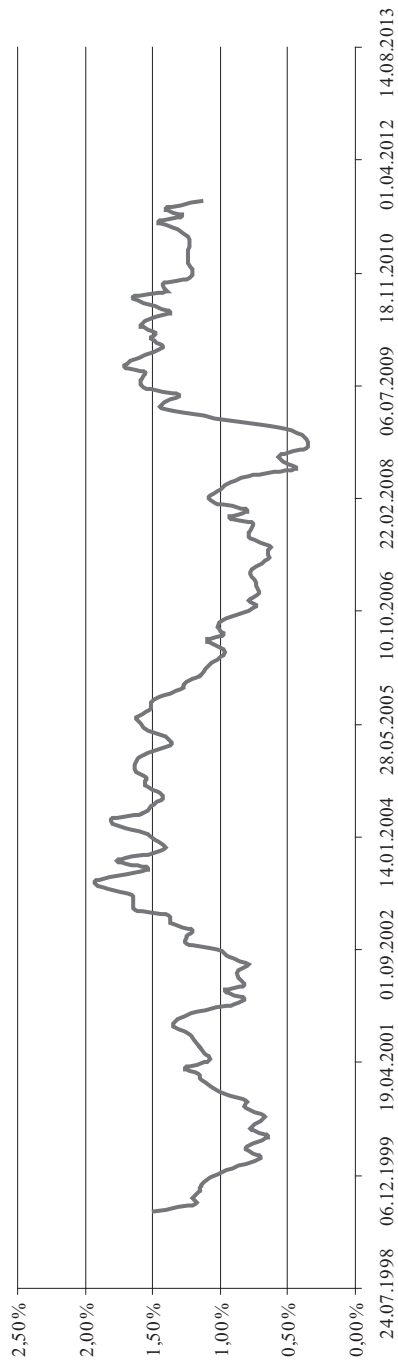


Abbildung 2: Vorteil des Darlehensbündels bei 20-jähriger Zinsbindung

gen. Approximiert man die historischen Zinssätze für Immobilienfinanzierungen bei bester Bonität mithilfe obiger Swaprates und der aktuellen Spreads und berechnet die Vorteile des optimalen Darlehensbündels mit 20-jähriger Zinsbindung, so erhält man im Durchschnitt einen prozentualen Vorteil von 1,17% in Bezug auf die Darlehenssumme. Der niedrigste Wert betrug 0,35% im September 2008, der höchste Wert 1,77% im September 2003. Alternativ kann man die historischen Vorteile des optimalen Darlehensbündels mit 15-jähriger Zinsbindung berechnen, die im Durchschnitt 0,81% betragen. Der niedrigste Wert betrug 0,30% im Juli 2008, der höchste Wert 1,26% im Juli 2003. Zur Vorsicht sei nochmals angemerkt, dass diese Werte lediglich auf approximierten Zinssätzen für Immobilienfinanzierungen beruhen und daher nicht bis auf alle Nachkommastellen exakt sind. Dennoch vermitteln diese Berechnungen ein ungefähres Bild von der Größenordnung und damit einhergehend der Relevanz des optimalen Darlehensbündels. Die nebenstehende Abbildung 2 stellt den Vorteil des optimalen Darlehensbündels bei 20-jähriger Zinsbindung grafisch dar.

#### IV. Zusammenfassung und Fazit

Das Ziel dieser Abhandlung ist es, ein Optimierungspotenzial in der privaten Immobilienfinanzierung zu analysieren, das sowohl in der wissenschaftlichen als auch in der praktischen Literatur nicht behandelt wird, praktisch tätigen Wissenschaftlern aber wohl bekannt ist. Gerade in den letzten Jahren mit einer steigenden Zinsstrukturkurve auf einem historisch niedrigen Niveau hat es sich angeboten, den Zinssatz für die Immobilienfinanzierung einerseits langfristig festzulegen und andererseits von den relativ niedrigen Zinssätzen für kurze Zinsbindungen zu profitieren. Wie die Analyse dieses Aufsatzes zeigt, ist dies durch die Vereinbarung eines geeigneten Darlehensbündels möglich. Die Konstruktion des Darlehensbündels in einem bestimmten Zeitpunkt folgt einem überaus einfachen Prinzip. Das – gemessen am Sollzinssatz – günstigste Darlehen, das bei einer steigenden Zinsstrukturkurve die kürzeste Zinsbindung aufweist, wird als Erstes in möglichst großem Umfang eingesetzt. Gleichzeitig wird das zweitgünstige Darlehen – mit der zweitkürzesten Zinsbindung – als Zweites in möglichst großem Umfang eingesetzt usw. Freilich muss zum Ausschluss von Anschlussfinanzierungen und Zinsänderungsrisiken das Darlehensbündel zum einen das langfristige Darlehen enthalten und zum anderen müssen die kürzer laufenden Darlehen innerhalb der Zinsbindungsfrist vollständig getilgt werden.

Wie das aktuelle Zahlenbeispiel in der Einleitung zeigt, beträgt der Vorteil eines solchen Darlehensbündels zurzeit etwa 1 % der Darlehenssumme. Allerdings muss die Darlehenssumme schon eine bestimmte kritische Größe überschreiten, damit der Abschluss eines solchen Darlehensbündels tatsächlich ökonomisch sinnvoll ist. Betrachtet man zum Beispiel einen privaten Immobilienkäufer, der das KfW-Wohneigentumsprogramm (124) und das KfW-Programm „Energieeffizient Bauen“ (153) nutzen kann, dann kann er mit diesen beiden Programmen bereits eine Darlehenssumme von 150.000 € finanzieren. Bei einer Darlehenssumme von insgesamt 300.000 € würde der Käufer zunächst 150.000 € über die Programme der KfW finanzieren und den restlichen Betrag über ein geeignetes Darlehensbündel aus verschiedenen Annuitätendarlehen. In diesem Fall würde der Vorteil des Darlehensbündels ungefähr 1 % bezogen auf die Darlehenssumme von 150.000 € betragen. Diese überschlägige Rechnung zeigt bereits, dass Darlehensbündel für den typischen Immobilienkäufer aufgrund zu geringer Darlehenssummen nicht infrage kommen. Für Immobilienkäufer mit relativ hohen Darlehenssummen können Darlehensbündel aber auf jeden Fall einen großen Vorteil darstellen.

### Literatur

Brückner, M./Lücke, F. (2004): Immobilienfinanzierung ohne Fallen, Frankfurt am Main, 2004 – Buhl, H. U./Hinrichs, J.-W./Satzger, G./Schneider, J. (1999): Leasing selbstgenutzter Wohnimmobilien, in: Die Betriebswirtschaft, 59. Jg. S. 316–331 – Hälting, M. (2011). Immobilienfinanzierung, Frankfurt/New York, 2011 – Kundisch, D./Dzienziol, J. (2009): Optimale Darlehensbündel in der privaten Immobilienfinanzierung, in: Kredit und Kapital, 42. Jg, Heft 4 – Kruschwitz, L. (2010): Finanzmathematik, Oldenbourg, 2010 – Locarek-Junge, H. (1997): Finanzmathematik, München, 1997 – Renger, K. (2010): Finanzmathematik mit Excel, Wiesbaden, 2010 – Schulze, E./Stein, A. (2004): Die optimale Immobilienfinanzierung, Freiburg im Breisgau, 2004 – Schöpe, B. (2000): Immobilienfinanzierung: Betriebswirtschaftliche Vorteilhaftigkeitsanalyse unter besonderer Berücksichtigung steuerlicher Aspekte. Lohmar, 2000 – Wolfersberger, P. (2002): Individualisierung von Finanzdienstleistungen – die optimale Disagiovariante eines Festdarlehens. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 72. Jg.

### Anhang 1: Herleitung der Gleichung (3)

Für die Herleitung der Gleichung (3) ist es zweckmäßig, die in Formel (1) beschriebene Darlehenssumme  $D_1$  wie folgt darzustellen:

$$(A1) \quad \begin{aligned} D_1 &= A \cdot RBF(I_L, L) + R/(1 + I_L)^L \\ &= A \cdot RBF(I_L, M) + A \cdot RBF(I_L, L - M)/(1 + I_L)^M + R/(1 + I_L)^L. \end{aligned}$$

Bei der Herleitung der unteren Zeile wird ausgenutzt, dass der Barwert einer  $L$ -maligen Rente von  $t = 0$  bis  $t = L$  in Höhe von  $A$  nichts anderes ist als die Summe der Barwerte einer  $M$ -maligen Rente von  $t = 0$  bis  $t = M$  und einer  $(L - M)$ -maligen Rente von  $t = M$  bis  $t = L$ .

Die Darlehenssumme  $D_2(A_L)$  der Alternative 2 besteht aus der Darlehenssumme  $D_{2M}(A_L)$  des mittelfristigen und der Darlehenssumme  $D_{2L}(A_L)$  des langfristigen Vertrags. Im Rahmen der Alternative 2 ist die Darlehenssumme des mittelfristigen Vertrags mit  $A_M = A - A_L$  gleich

$$(A2) \quad D_{2M}(A_L) = (A - A_L) \cdot RBF(I_M, M)$$

und die Darlehenssumme des langfristigen Vertrags

$$(A3) \quad D_{2L}(A_L) = A_L \cdot RBF(I_L, M) + A \cdot RBF(I_L, L - M)/(1 + I_L)^M + R/(1 + I_L)^L.$$

Somit ist insgesamt die Darlehenssumme der Alternative 2 mit  $D_2(A_L) = D_{2M}(A_L) + D_{2L}(A_L)$  unter Berücksichtigung von (A2) und (A3) gleich

$$(A4) \quad \begin{aligned} D_2(A_L) &= (A - A_L) \cdot RBF(I_M, M) + A_L \cdot RBF(I_L, M) \\ &+ A \cdot RBF(I_L, L - M)/(1 + I_L)^M + R/(1 + I_L)^L. \end{aligned}$$

Bei einem Vergleich der Formeln (A1) und (A4) fällt auf, dass die letzten beiden Summanden identisch sind. Somit ist die Differenz zwischen (A4) und (A1) gleich

$$(A5) \quad \begin{aligned} D_2(A_L) - D_1 &= (A - A_L) \cdot RBF(I_M, M) + A_L \cdot RBF(I_L, M) - A \cdot RBF(I_L, M) \\ &= (A - A_L) \cdot RBF(I_M, M) - (A - A_L) \cdot RBF(I_L, M) \\ &= (A - A_L) \cdot [RBF(I_M, M) - RBF(I_L, M)]. \end{aligned}$$

### Anhang 2: Herleitung der Gleichung (4)

Im Rahmen der Alternative 2 gilt für den anfänglichen, monatlichen Tilgungssatz  $T_{2M}$  des mittelfristigen Darlehens:

$$(A6) \quad \begin{aligned} A_M/D_{2M}(A_L) &= T_{2M} + I_M \\ \Leftrightarrow T_{2M} &= A_M/D_{2M}(A_L) - I_M. \end{aligned}$$

Setzt man (A2) in (A6) ein, so erhält man mit  $A_M = A - A_L$

$$(A7) \quad T_{2M} = A_M / [A_M \cdot RBF(I_M, M)] - I_M = 1 / RBF(I_M, M) - I_M.$$

### Anhang 3: Herleitung der Gleichung (5)

Im Rahmen der Alternative 2 gilt für den anfänglichen, monatlichen Tilgungssatz  $T_{2L}$  des langfristigen Darlehens:

$$(A8) \quad \begin{aligned} A_L / D_{2L}(A_L) &= T_{2L} + I_M \\ \Leftrightarrow A_L &= D_{2L}(A_L) \cdot (T_{2L} + I_M). \end{aligned}$$

Setzt man (A3) in (A8) ein, so erhält man:

$$(A9) \quad \begin{aligned} A_L &= A_L \cdot RBF(I_L, M) \cdot (T_{2L} + I_L) \\ &\quad + [A \cdot RBF(I_L, L - M) / (1 + I_L)^M + R / (1 + I_L)^L] \\ &\quad \cdot (T_{2L} + I_L) \\ \Leftrightarrow A_L \cdot [1 - RBF(I_L, M) \cdot (T_{2L} + I_L)] \\ &= [A \cdot RBF(I_L, L - M) / (1 + I_L)^M + R / (1 + I_L)^L] \cdot (T_{2L} + I_L) \\ \Leftrightarrow A_L &= [A \cdot RBF(I_L, L - M) / (1 + I_L)^M + R / (1 + I_L)^L] \\ &\quad \cdot (T_{2L} + I_L) / [1 - RBF(I_L, M) \cdot (T_{2L} + I_L)]. \end{aligned}$$

Für  $T_{2L} = 0,01/12$  erhält man:

$$(A10) \quad \begin{aligned} A_L^* &= [A \cdot RBF(I_L, L - M) / (1 + I_L)^M + R / (1 + I_L)^L] \\ &\quad \cdot (0,01/12 + I_L) / [1 - RBF(I_L, M) \cdot (0,01/12 + I_L)]. \end{aligned}$$

Setzt man (A10) in die Ungleichung  $A_L^* < A$  ein, so erhält man:

$$(A11) \quad \begin{aligned} &[A \cdot RBF(I_L, L - M) / (1 + I_L)^M + R / (1 + I_L)^L] \cdot (0,01/12 + I_L) \\ &< A \cdot [1 - RBF(I_L, M) \cdot (0,01/12 + I_L)] \\ \Leftrightarrow &[A \cdot RBF(I_L, L - M) / (1 + I_L)^M + R / (1 + I_L)^L] \cdot (0,01/12 + I_L) \\ &< A - A \cdot RBF(I_L, M) \cdot (0,01/12 + I_L) \\ \Leftrightarrow &[A \cdot RBF(I_L, L - M) / (1 + I_L)^M + R / (1 + I_L)^L] \cdot (0,01/12 + I_L) \\ &+ A \cdot RBF(I_L, M) \cdot (0,01/12 + I_L) < A \\ \Leftrightarrow &[A \cdot RBF(I_L, L - M) / (1 + I_L)^M + R / (1 + I_L)^L \\ &+ A \cdot RBF(I_L, M)] \cdot (0,01/12 + I_L) < A \\ \Leftrightarrow &[A \cdot RBF(I_L, L) + R / (1 + I_L)^L] \cdot (0,01/12 + I_L) < A. \end{aligned}$$

Augenscheinlich ist der Ausdruck in der eckigen Klammer in der letzten Zeile von (A11) identisch mit der Formel in der ersten Zeile von (A1), sodass gilt:

$$(A12) \quad D_1 \cdot (0,01/12 + I_L) < A \Leftrightarrow (0,01/12 + I_L) < A / D_1.$$

Für den Quotienten  $A/D_1$  gilt wiederum  $A/D_1 = T_{1L} + I_L$ , wobei  $T_{1L}$  den anfänglichen, monatlichen Tilgungssatz der Alternative 1 bezeichnet. Somit ist (A12) äquivalent zu

$$(A13) \quad 0,01/12 < T_{1L}.$$

#### Anhang 4: Herleitung der Gleichung (6)

Die Darlehenssumme  $D_2(A_{L^*})$  der optimalen Alternative 2 ist

$$(A14) \quad D_2(A_{L^*}) = D_{2M}(A_{L^*}) + D_{2L}(A_{L^*}),$$

wobei  $D_{2M}(A_{L^*})$  durch Formel (A2) und  $D_{2L}(A_{L^*})$  durch Formel (A3) bestimmt ist.

Die Darlehenssumme der Alternative 3 ist:

$$(A15) \quad D_3(A_K|A_{L^*}) = D_{3K}(A_K|A_{L^*}) + D_{3M}(A_K|A_{L^*}) + D_{3L}(A_{L^*})$$

mit

$$(A16) \quad D_{3K}(A_K|A_{L^*}) = A_K \cdot RBF(I_K, K)$$

$$(A17) \quad \begin{aligned} D_{3M}(A_K|A_{L^*}) &= (A - A_K - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, K) \\ &+ (A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, M - K)/(1 + I_M)^K \end{aligned}$$

$$(A18) \quad D_{3L}(A_{L^*}) = A_{L^*} \cdot RBF(I_L, M) + A \cdot RBF(I_L, L - M)/(1 + I_L)^M + R/(1 + I_L)^L.$$

Bei einem Vergleich der Formeln (A14) und (A15) fällt auf, dass  $D_{2L}(A_{L^*})$  gemäß Formel (A3) und  $D_{3L}(A_{L^*})$  gemäß Formel (A18) identisch sind. Somit ist die Differenz zwischen (A15) und (A14) gleich

$$(A19) \quad \begin{aligned} D_3(A_K|A_{L^*}) - D_2(A_{L^*}) &= D_{3K}(A_K|A_{L^*}) + D_{3M}(A_K|A_{L^*}) - D_{2M}(A_{L^*}) \\ &= A_K \cdot RBF(I_K, K) + (A - A_K - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, K) \\ &\quad + (A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, M - K)/(1 + I_M)^K \\ &\quad - (A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, M) \\ &= A_K \cdot RBF(I_K, K) + (A - A_K - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, K) \\ &\quad + (A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, M - K)/(1 + I_M)^K \\ &\quad - [(A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, K) \\ &\quad + (A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, M - K)/(1 + I_M)^K] \\ &= A_K \cdot RBF(I_K, K) \\ &\quad + (A - A_K - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, K) \\ &\quad - (A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, K) \\ &= A_K \cdot RBF(I_K, K) - A_K \cdot RBF(I_M, K) \\ &= A_K \cdot [RBF(I_K, K) - RBF(I_M, K)]. \end{aligned}$$

### Anhang 5: Herleitung der Gleichung (7)

Im Rahmen der Alternative 3 gilt für den anfänglichen, monatlichen Tilgungssatz  $T_{3K}$  des kurzfristigen Darlehens:

$$(A20) \quad A_K/D_{3K}(A_K|A_{L^*}) = T_{3K} + I_K \Leftrightarrow T_{3K} = A_K/D_{3K}(A_K|A_{L^*}) - I_K.$$

Setzt man (A16) in (A20) ein, so erhält man:

$$(A21) \quad T_{3K} = A_K/[A_K \cdot RBF(I_K, K)] - I_K = 1/RBF(I_K, K) - I_K.$$

### Anhang 6: Herleitung der Gleichung (8)

Im Rahmen der Alternative 3 gilt für den anfänglichen, monatlichen Tilgungssatz  $T_{3M}$  des kurzfristigen Darlehens:

$$(A22) \quad A_{M^*}/D_{3M}(A_K|A_{L^*}) = T_{3M} + I_M \Leftrightarrow A_{M^*} = (T_{3M} + I_M) \cdot D_{3M}(A_K|A_{L^*}).$$

Setzt man (A17) in (A22) ein, so erhält man mit  $A_{M^*} = A - A_K - A_{L^*}$

$$\begin{aligned} A_{M^*} &= (T_{3M} + I_M) \\ &\quad \cdot [A_{M^*} \cdot RBF(I_M, K) + (A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, M - K)/(1 + I_M)^K]. \\ (A23) \quad &\Leftrightarrow A_{M^*} \cdot [1 - RBF(I_M, K) \cdot (T_{3M} + I_M)] \\ &= [(A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, M - K)/(1 + I_M)^K] \cdot (T_{3M} + I_M) \\ &\Leftrightarrow A_{M^*} = [(A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, M - K)/(1 + I_M)^K] \cdot \\ &\quad (T_{3M} + I_M)/[1 - RBF(I_M, K) \cdot (T_{3M} + I_M)]. \end{aligned}$$

Für  $T_{3M} = 0,01/12$  erhält man:

$$(A24) \quad A_{M^*} = [(A - A_{L^*}) \cdot RBF(I_M, M - K)/(1 + I_M)^K] \cdot (0,01/12 + I_M)/[1 - RBF(I_M, K) \cdot (0,01/12 + I_M)].$$

### Anhang 7: Herleitung der Gleichung (9)

Für die Herleitung der Gleichung (9) ist es zweckmäßig, die in Formel (1) beschriebene Darlehenssumme  $D_1$  wie folgt darzustellen:

$$(A25) \quad \begin{aligned} D_1 &= A \cdot RBF(I_L, L) + R/(1 + I_L)^L \\ &= A \cdot RBF(I_L, K) + A \cdot RBF(I_L, L - K)/(1 + I_L)^K + R/(1 + I_L)^L. \end{aligned}$$

Die Darlehenssumme  $D_4(A_K)$  der Alternative 4 besteht aus der Darlehenssumme  $D_{4K}(A_K)$  des kurzfristigen und der Darlehenssumme  $D_{4L}(A_M)$  des langfristigen Vertrags. Im Rahmen der Alternative 4 ist die Darlehenssumme des kurzfristigen Vertrags

$$(A26) \quad D_{4K}(A_K) = A_K \cdot RBF(I_K, K)$$

und die Darlehenssumme des langfristigen Vertrags

$$(A27) \quad \begin{aligned} D_{4L}(A_K) &= (A - A_K) \cdot RBF(I_L, K) \\ &+ A \cdot RBF(I_L, L - K)/(1 + I_L)^K + R/(1 + I_L)^L. \end{aligned}$$

Somit ist insgesamt die Darlehenssumme der Alternative 4 mit  $D_4(A_K) = D_{4K}(A_K) + D_{4L}(A_K)$  unter Berücksichtigung von (A26) und (A27) gleich

$$(A28) \quad \begin{aligned} D_4(A_K) &= A_K \cdot RBF(I_K, K) + (A - A_K) \cdot RBF(I_L, K) \\ &+ A \cdot RBF(I_L, L - K)/(1 + I_L)^K + R/(1 + I_L)^L. \end{aligned}$$

Bei einem Vergleich der Formeln (A28) und (A25) fällt auf, dass die letzten beiden Summanden identisch sind. Somit ist die Differenz zwischen (A28) und (A25) gleich

$$(A29) \quad \begin{aligned} D_4(A_K) - D_1 &= A_K \cdot RBF(I_K, K) + (A - A_K) \cdot RBF(I_L, K) - A \cdot RBF(I_L, K) \\ &= A_K \cdot RBF(I_K, K) - A_K \cdot RBF(I_L, K) \\ &= A_K \cdot [RBF(I_K, K) - RBF(I_L, K)]. \end{aligned}$$

## Anhang 8: Herleitung der Gleichung (10)

Die Herleitung der Gleichung (10) ist identisch mit der Herleitung der Gleichung (5). Insofern muss man lediglich in (A10) jedes  $M$  durch ein  $K$  ersetzen und gelangt zu:

$$(A30) \quad \begin{aligned} A_{L^*} &= [A \cdot RBF(I_L, L - K)/(1 + I_L)^K + R/(1 + I_L)^L] \\ &\cdot (0,01/12 + I_L)/[1 - RBF(I_L, K) \cdot (0,01/12 + I_L)]. \end{aligned}$$

## **Zusammenfassung**

### **Optimale Darlehensbündel in der privaten Immobilienfinanzierung bei steigender Zinsstrukturkurve**

In diesem Aufsatz wird ein Optimierungspotenzial in der privaten Immobilienfinanzierung analysiert, das sowohl in der wissenschaftlichen als auch in der praktischen Literatur nicht behandelt wird, praktisch tätigen Wissenschaftlern aber wohl bekannt ist. Erstens wird gezeigt, dass es bei einer steigenden Zinsstrukturkurve optimal ist, ein Darlehensbündel mit verschiedenen Annuitätendarlehen mit verschiedenen Zinsbindungen abzuschließen. Zweitens wird das optimale Darlehensbündel charakterisiert. Drittens wird festgestellt, dass der Mehrwert des Darlehensbündels im Durchschnitt über die letzten 15 Jahre ungefähr 1 % betrug. (JEL G21, D14)

## **Summary**

### **Optimal Bundles of Annuity Loans in the Private Real Estate Financing with a Rising Yield Curve**

This contribution analyzes an optimization potential in the private real estate financing, which is not covered in both the scientific and practical literature, but which is well known to practically orientated scientists. First, it is shown that for a rising yield curve a bundle of annuity loans with different fixed interest periods is optimal. Second, the optimal bundle is characterized. Third, it is shown that the added value of the optimal bundle is on average over the last 15 years about 1 %.