

## Random Walk oder Mean Reversion?

### Eine statistische Analyse des Kurs/Gewinn-Verhältnisses für den deutschen Aktienmarkt

Von Peter Albrecht und Cemil Kantar, Mannheim

#### I. Einführung

Der klassische wahrscheinlichkeitstheoretisch-statistische Ansatz zur Modellierung von Aktienkursen ist der (multiplikative) Random Walk.<sup>1</sup> Bei Gültigkeit der Random-Walk-These sind die sukzessiven Periodenrenditen nicht korreliert, die weitere Kursbewegung ist „rein zufällig“.

*Fama/French* (1988), *Lo/MacKinlay* (1988) sowie *Poterba/Summers* (1988) waren die ersten Beiträge, in denen Hinweise dokumentiert wurden, dass zwar über kurze und mittlere Frist die Random-Walk-Hypothese für die Modellierung von Kursentwicklungen auf Aktienmärkten angemessen ist, über lange Zeithorizonte jedoch Mean-Reversion-Effekte in Aktienkurszeitreihen existieren. Mean Reversion charakterisiert dabei die Tendenz von Wertentwicklungen, nach einer zeitlich begrenzten Abweichung vom Mittelwert langfristig wieder zu diesem zurückzukehren. Damit werden Aktienkurse zumindest langfristig und bis zu einem gewissen Grad prognostizierbar.

Die Ergebnisse dieser frühen Arbeiten wurden in jüngerer Zeit erhärtet durch die Beiträge von *Balvers/Wu/Gilliland* (2000), *Campbell/Viceira* (1999, 2002) sowie für den deutschen Aktienmarkt aktuell von *Eberts* (2003).

Das Ziel der vorliegenden Ausarbeitung ist es nun, weitere Erkenntnisse über die Existenz von Mean-Reversion-Effekten auf dem Deutschen Aktienmarkt, repräsentiert durch den Aktienindex DAX, zu gewinnen. Im Unterschied zu der bisherigen Vorgehensweise, bei der die Analysen auf der reinen Kurs- bzw. Renditeebene durchgeführt wurden,

---

<sup>1</sup> Vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer* (2002, §§ 4.2.2, 4.3.3) sowie *Campbell/Lo/MacKinlay* (1997, § 2.1).

steht in der vorliegenden Ausarbeitung jedoch eine Fundamentalanalyse auf der Basis der Entwicklung des Kurs/Gewinn-Verhältnisses im Vordergrund. Eine Analyse auf der KGV-Ebene ist aus unserer Sicht zu präferieren, denn die Kursbildung auf Aktienmärkten ist notwendigerweise in einem ökonomischen Kontext zu sehen. Sie ist das Ergebnis einer ökonomischen Bewertung und wird zentral beeinflusst durch die Gewinnentwicklung der jeweils betrachteten Unternehmen. Die so gewählte Vorgehensweise knüpft an die Ergebnisse in *Albrecht (2001)*, der auf der Basis einer fundamentalen Analyse für den Deutschen Aktienmarkt zu dem Schluss kam, dass die Random-Walk-Hypothese über längere Zeiträume nicht aufrechterhalten werden kann. Eine entsprechende Untermauerung dieser Erkenntnis auf statistisch-ökonomischer Basis stand bisher jedoch noch aus und soll nun im Rahmen der vorliegenden Arbeit in Angriff genommen werden.

## II. Modellbildung

Bezeichnet man mit  $V_t$  die (diskrete) zeitliche Entwicklung der interessierenden Variablen, gemessen zu den Zeitpunkten  $t = 0, 1, 2, \dots$ , so besitzt das Grundmodell<sup>2</sup> eines (arithmetischen) Random Walks mit Drift die Charakterisierung ( $t = 1, 2, 3, \dots$ )

$$(1a) \quad \Delta V_t := V_t - V_{t-1} = m + Z_t,$$

wobei weiterhin gilt:

$$(1b) \quad E(Z_t) = 0, \quad \text{Var}(Z_t) = \sigma^2, \quad \text{Cov}(Z_t, Z_{t-1}) = 0.$$

Die absoluten Wertveränderungen<sup>3</sup> (Zuwächse) über eine Periode (Monat, Jahr) lassen sich somit durch eine zeitlich konstante Komponente, quantifiziert durch den so genannten Driftparameter  $m$ , beschreiben, die durch einen Zufallsprozess  $\{Z_t\}$  überlagert wird. Die Forderung (1b) besagt, dass diese zufälligen Überlagerungen einen so genannten *White-Noise-Prozess* darstellen. Die Zufallsgrößen  $Z_t (t \geq 1)$  sind unkorreliert und identisch verteilt mit einem Erwartungswert von Null und einer in der Zeit konstanten Varianz. Insbesondere sind damit auch die

<sup>2</sup> Vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer (2002, S. 140 ff.)*.

<sup>3</sup> Bei der Anwendung dieser Modellbildung auf Aktienkurse entspricht dabei  $V_t$  standardmäßig den *logarithmierten* Aktienkursen bzw.  $\Delta V_t$  der zeitstetigen Periodenrendite. Äquivalent hierzu ist das Modell eines multiplikativen Random Walks, vgl. etwa *Albrecht/Maurer (2002, S. 141)*.

Wertveränderungen (Renditen<sup>4</sup>)  $\Delta V_t = V_t - V_{t-1}$  des Prozesses für aufeinander folgende Perioden nicht korreliert. Vergangene und zukünftige Wertveränderungen besitzen somit keine systematischen (linearen) Abhängigkeiten. Die üblichen linearen Prognosetechniken auf der Basis von Vergangenheitswerten sind somit nicht geeignet für Random Walks.

In expliziter Form besitzt der Random Walk die Darstellung

$$(2) \quad V_t = v_0 + mt + Z_1 + \dots + Z_t.$$

Die zufällige Abweichung von dem dem Grunde nach linearen Trend entsteht somit im Zeitablauf durch eine Akkumulation der einzelnen Fehler (Schocks). Diese mögliche „Aufschaukelung“ der Fehler führt dazu, dass die Abweichungen vom zugrunde liegenden Trend dem Grunde nach „beliebig groß“ werden können. Insofern ist die erwartete Entwicklung  $E(V_t) = v_0 + mt$  keine zuverlässige Prognose für die sich künftig realisierende Entwicklung. Das Random-Walk-Modell beinhaltet daher im Kern eine *Nicht-Prognostizierbarkeit der künftigen Wertveränderungen*.

Shiller/Perron (1985, S. 381) charakterisieren diese Random Walk-Eigenschaft folgendermaßen:

*„In the finance context, the random walk null hypothesis means that price  $p_t$  can never be described as „too high“ (i.e., that it can be expected to fall in the future) or „too low“ (i.e., that it can be expected to rise in the future).“*

In alternativer Form wird dies ausgedrückt<sup>5</sup> durch die Angabe der besten (im Sinne des mittleren quadratischen Fehlers) Prognose. Es gilt beim Random Walk

$$(3) \quad E(V_{t+s} | V_t, V_{t-1}, \dots, V_0) = v_0 + m(t+s) + \sum_{i=1}^t Z_i.$$

Jeder vergangene Schock hat damit Auswirkungen auf alle zukünftigen Werte. Die Form der zufälligen Überlagerungen der Gesamtentwicklung  $V_t$  des Prozesses ist beim Random Walk *nichtstationär*, da die Überlagerung  $Z_1 + \dots + Z_t$  instationär (in den Parametern) ist. Durch Differenzbildung, d.h. durch den Übergang zu den Zuwächsen gemäß (1a),

<sup>4</sup> Im vorliegenden Fall ist dies eine absolute Rendite im Sinne eines absoluten Wertzuwachses, gleiches gilt aber für die relative Variante  $(V_t - V_{t-1})/V_{t-1}$ . Beim üblichen Übergang zu logarithmierten Kursen entspricht  $\Delta V_t$  der zeitstetigen Rendite  $\ln(V_t/V_{t-1})$ .

<sup>5</sup> Vgl. hierzu Franke et al. (2001, S. 171).

wird der Random Walk allerdings stationär. Man bezeichnet den Random Walk daher auch als *differenzenstationären* Prozess bzw. als *integriert von der Ordnung 1*.

Kommen wir damit zu möglichen Alternativen der Random-Walk-Hypothese mit dem Ziel der Modellierung von Mean-Reversion-Effekten. Das Basismodell sind hier die autoregressiven Prozesse der Ordnung 1, kurz AR(1)-Prozesse.

Die Wertentwicklung eines AR(1)-Prozesses besitzt dabei die folgende Charakterisierung<sup>6</sup> ( $t = 1, 2, 3, \dots; |a| < 1$ ):

$$(4a) \quad V_t - m = a(V_{t-1} - m) + Z_t,$$

wobei der Überlagerungsprozess  $Z_t$  wiederum den Anforderungen gemäß (1b) genügt. Unter der Bedingung  $|a| < 1$  ist der AR(1)-Prozess ein stationärer Prozess.

Die Bedingungsgleichung (4a) für den AR(1)-Prozess impliziert, dass der Parameter  $m$  das langfristige Mittel des Prozesses darstellt und der Wertverlauf dieses Prozesses bei temporären Abweichungen auf dieses Langfristmittel hingezogen wird. Je größer der Parameter  $a$ , desto stärker ist die Elastizität, mit der der Prozess zum Langfristmittel hingezogen wird. Für den Erwartungswert des Prozesses gilt:

$$(5a) \quad E(V_t) = m + a^t(v_0 - m).$$

In der Anwendung geht man dabei davon aus, dass der beobachtete Prozess schon „lange läuft“ bzw. eingeschwungen ist und damit wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} a^t = 0$  für  $|a| < 1$  approximativ die Beziehung

$$(5b) \quad E(V_t) = m$$

gerechtfertigt ist.<sup>7</sup> Der Parameter  $a$  ist zudem identisch mit dem Autokorrelationskoeffizienten 1. Ordnung des AR(1)-Prozesses, d.h.  $\rho(V_{t+1}, V_t) = a$ .

Äquivalent zur Darstellung (4a) ist die folgende Charakterisierung eines AR(1)-Prozesses, die ebenfalls häufig in der Literatur zu finden ist<sup>8</sup>:

<sup>6</sup> Vgl. etwa *Buscher* (2002, S. 204 f.) oder *Gujarati* (1995, S. 736 f.).

<sup>7</sup> Vgl. etwa *Buscher* (2002, S. 204).

<sup>8</sup> Vgl. etwa *Franke et al.* (2001, S. 146 f.) oder *Hamilton* (1994, S. 48).



$$(4b) \quad V_t = c + aV_{t-1} + Z_t.$$

Dies erkennt man, wenn man (4a) explizit nach  $V_t$  auflöst und dann  $c = m(1 - a)$  setzt. Die Charakterisierung (4b) zeigt im Vergleich mit der Darstellung (4a), dass der Random Walk ein Grenzfall des AR(1)-Prozesses für  $a \rightarrow 1$  ist. Tests der Hypothese  $H_0 : a = 1$  gegen  $H_1 : |a| < 1$ , so genannten Einheitswurzel- oder Unit-Root-Tests, bilden entsprechend ein zentrales Instrumentarium zur Überprüfung der Kernfrage „Random Walk oder Mean Reversion?“ der vorliegenden Ausarbeitung. Zugleich wird deutlich, dass die Charakterisierung (4b) als Regressionsgleichung mit der erklärten Variablen  $V_t$  sowie der erklärenden Variablen  $V_{t-1}$  interpretiert werden kann. Die Durchführung der entsprechenden Regression führt zu einer Bestimmung der Parameter  $c$  bzw.  $a$  und dient als Ausgangspunkt vieler Einheitswurzeltests.

Die Existenz des Langfristmittels  $m$ , zu dem der AR(1)-Prozess „hingezogen“ wird, beinhaltet zugleich den zentralen Unterschied zum Random Walk, bei dem es – wie bereits ausgeführt – (systematisch) zu beliebig großen Abweichungen vom zugrunde liegenden Trend kommen kann. In Termen der besten Prognose (im Sinne des mittleren quadratischen Fehlers) gilt<sup>9</sup>:

$$(6) \quad E(V_{t+s} | V_t, V_{t-1}, \dots, V_0) = m + a^s(V_t - m).$$

Der Einfluss der momentanen Abweichung  $V_t - m$  des aktuellen Prozesswertes vom Langfristmittel nimmt somit mit geometrischer Rate ab, und insgesamt nähert sich die (beste) Prognose immer mehr dem Langfristmittel an.

Prozesse mit einer allgemeineren autoregressiven Struktur sind die autoregressiven Prozesse  $p$ -ter Ordnung, kurz AR( $p$ )-Prozesse. Diese genügen der folgenden Charakterisierung:

$$(7) \quad V_t = c + a_1 V_{t-1} + \dots + a_p V_{t-p} + Z_t.$$

Im Spezialfall  $p = 1$  ergibt sich der AR(1)-Prozess.

In der praktischen Anwendung ergibt sich daher die Frage, bis zu welchem Lag  $p$  Vergangenheitswerte noch auf den gegenwärtigen Wert  $V_t$  einwirken. Diese Frage werden wir bei der Datenanalyse jeweils mit untersuchen.

<sup>9</sup> Vgl. etwa *Hamilton* (1994, S. 80).

Schließlich wird in der Literatur<sup>10</sup> als Alternative zum Random Walk von Aktienkursen noch die Überlagerung eines Random Walks mit einem ("slowly mean reverting") AR(1)-Prozess betrachtet, um zu modellieren, dass auf kurze und mittlere Sicht ein Random Walk vorliegt, auf lange Sicht jedoch ein Mean-Reversion-Effekt wirkt. Diesen Ansatz werden wir in dieser Arbeit nicht verfolgen, da es sich erweisen wird, dass für die statistische Analyse der Entwicklung des Kurs/Gewinn-Verhältnisses bereits die AR(1)-Variante valide ist.

### III. Die Entwicklung des DAX-KGV: Explorative Datenanalyse

Ausgangspunkt unserer Analyse ist die in der (kommerziellen) Datenbank Datastream enthaltene Zeitreihe der Kurs/Gewinn-Verhältnisse des DAX auf Monatsbasis. Um sowohl zu einem aktuellen als auch repräsentativen Sample zu kommen, legen wir den weiteren Analysen, ausgehend von dem aktuellst verfügbaren KGV-Wert des Monats 06/2003, eine 30-jährige Historie<sup>11</sup> zugrunde, d.h., die analysierte Datenreihe besteht aus den KGV-Werten von 07/1973–06/2003. Dies sind insgesamt 360 Werte. Sämtliche statistischen Auswertungen dieses und der weiteren Abschnitte wurden mit dem Ökonometrieprogramm EViews 4.1 durchgeführt. Abbildung 1 zeigt zunächst die Entwicklung dieser Zeitreihe in einer grafischen Darstellung.

Wie die grafische Darstellung deutlich macht, bewegt sich das KGV auf Monatsbasis weit überwiegend in einer Range von 10–20. Werden diese Werte unter- oder überschritten, wird früher oder später eine Gegenreaktion ausgelöst, die die KGV-Werte zurück in diese Range treibt. Langfristige Unterschreitungen eines KGV-Wertes von 10 können ebenso wie längere Überschreitungen der Marke von 20 als *Marktüberreibungen* gewertet werden. Kurzfristige Unterschreitungen der Marke von 10 sind in den Monaten 10/81, 09/01 und 03/03 zu konstatieren, eine län-

<sup>10</sup> Vgl. etwa *Fama/French* (1988), *Lo/MacKinlay* (1988) sowie für den deutschen Markt *Löffler* (2000).

<sup>11</sup> Angesichts des damit betrachteten Zeitintervalls stellt sich die Frage nach der Parameterstabilität. In der vorliegenden Untersuchung konzentrieren wir uns jedoch zunächst auf die Prüfung der beiden Basisalternativen Random Walk bzw. AR(1)-Prozess. In weitergehenden Untersuchungen sollten, so auch die Anregung des Gutachters, jedoch auch alternative Modelle, z.B. Switching-Regime-Modelle oder State-Space-Modelle, bei denen der AR(1)-Parameter zeitlich variabel ist, Beachtung finden.

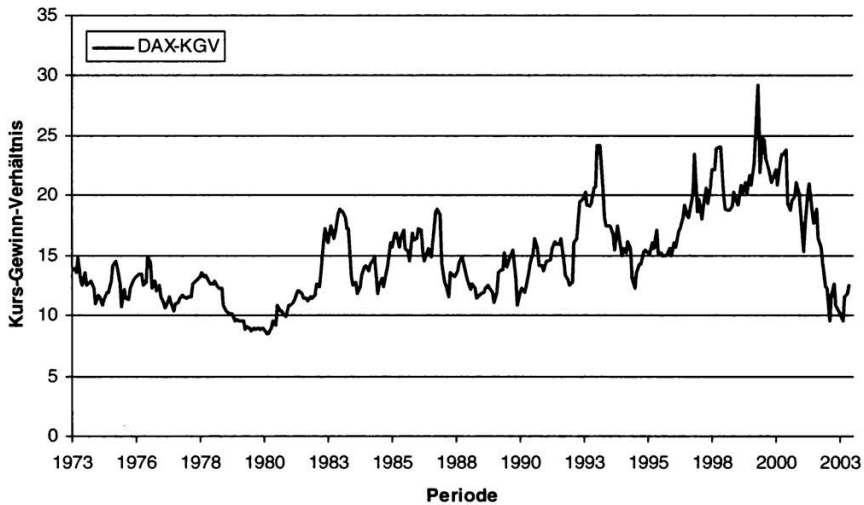


Abbildung 1: Entwicklung des DAX-KGV von 07/73–06/03 auf monatlicher Basis  
(Quelle: Datastream)

gere Unterschreitungsphase ist von 10/79 bis 05/81 zu verzeichnen. Der realisierte Tiefstwert ist 8,50 (dies geschah in den Monaten 01/81 und 02/81). Eher kurzfristige Überschreitungen der 20er-Marke sind zu konstatieren in den Monaten 04/93, 08/93–12/93, 06/97 + 07/97, 12/97, 02/98–07/98, 01/99, 06/01 + 07/01 sowie 11/01 + 12/01. Nur in der letzten Boomphase der Aktienmärkte ist eine länger anhaltende Überschreitung der Marke von 20 zu verzeichnen, konkret war dies die Periode 04/99–01/01. Der realisierte Maximalwert war dabei 29,20.

Schon eine erste Inspektion der empirischen Datenlage spricht damit durchaus für die Mean-Reversion-These, denn es offenbart sich ein typisches Rückkehrverhalten in die KGV-Zone 10–20. Eine beliebige KGV-Steigerung bzw. beliebige KGV-Verminderung, wie sie bei einem Random Walk möglich wäre, ist nicht zu verzeichnen.

Abbildung 2 enthält die Häufigkeitsverteilung der KGV-Werte auf Monatsbasis, dargestellt in einem Balkendiagramm.

Das Balkendiagramm und die damit verbundene Auswertung in EViews 4.1 offenbaren einen mittleren KGV-Wert auf Monatsbasis in Höhe von 14,86 sowie einen Median von 14,15. Das optische Erscheinungsbild und die Höhe der Schiefe deuten darauf hin, dass keine Nor-

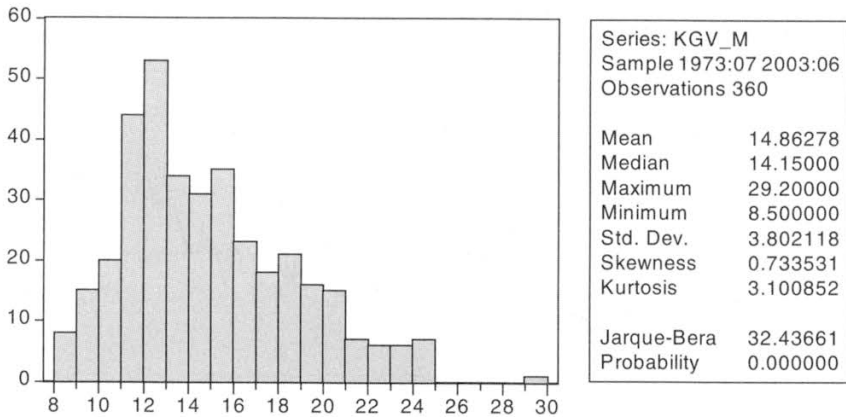


Abbildung 2: Balkendiagramm der Häufigkeit der DAX-KGV-Werte auf Monatsbasis

malverteilung vorliegt, sondern eine rechtsschiefe Verteilung. Formal wird dies bestätigt durch den Jarque-Bera-Test<sup>12</sup> auf Vorliegen einer Normalverteilung. Der  $p$ -Wert, d.h. die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Nullhypothese (hier: Normalverteilung) ist Null.

Das Balkendiagramm zeigt aber auch, dass eine Ausreißersituation in den Daten vorhanden ist. Der KGV-Wert von 29,20 im Monat 12/99 liegt um 4,30 Einheiten über dem zweitgrößten<sup>13</sup> KGV-Wert von 24,90 im Monat 11/99. Diese Einschätzung wird bestätigt, wenn man die empirischen Quantile zusammen mit den entsprechenden Standardfehlern betrachtet. Dies ist in Abbildung 3 festgehalten.

Aufgrund dieser Datensituation ist es angezeigt, den Ausreißer des Monats 12/99 zu bereinigen. Wir tun dies im Wege der Stutzung (truncation), indem wir den KGV-Wert des Monats 12/99 auf den zweitgrößten Wert der KGV-Reihe, d.h. 24,9, reduzieren.

Die nachfolgende Tabelle enthält – nunmehr für die bereinigte KGV-Reihe – die Angaben über den Mittelwert sowie ausgewählte Quantile.

<sup>12</sup> Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2002, S. 116) oder *Poddig et al.* (2000, S. 318 ff.).

<sup>13</sup> Der Wert 24,9 selbst kann nicht auch als Ausreißer angesehen werden, da auch KGV-Werte von 24, 24,6 und 24,7 in der Datenreihe enthalten sind.



Empirical Quantiles of KGV\_M

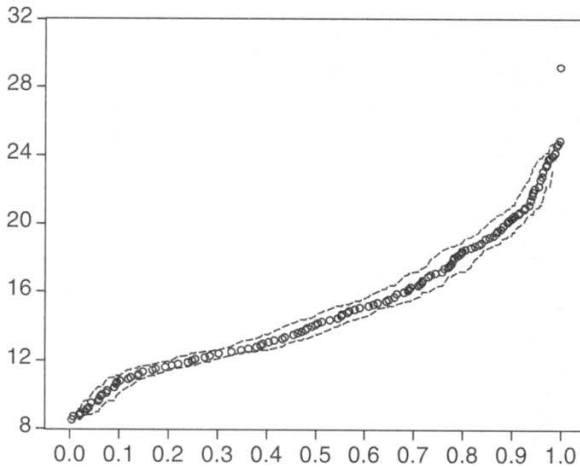


Abbildung 3: Empirische Quantile (inklusive Standardfehler) der DAX-KGV-Reihe 07/73–06/03

Tabelle 1

Mittelwert und Quantile der bereinigten DAX-KGV-Reihe 07/73–06/03

|             |       |
|-------------|-------|
| Mittelwert  | 14,85 |
| Median      | 14,15 |
| 99%-Quantil | 24,36 |
| 95%-Quantil | 22,20 |
| 90%-Quantil | 20,31 |
| 10%-Quantil | 10,80 |
| 5%-Quantil  | 9,60  |
| 1%-Quantil  | 8,80  |

Nimmt man das 10%-Quantil bzw. das 90%-Quantil als Maßstab für eine „normale“ KGV-Range, so deckt sich dies weitgehend mit der bereits gegebenen visuellen Einschätzung, dass dies die Zone zwischen 10 und 20 ist. Bei Verwendung des 5%- bzw. 95%-Quantils als Maßstab für eine normale KGV-Range wird diese Zone noch etwas ausgedehnt.

Date: 07/14/03 Time: 10:30  
 Sample: 1973:07 2003:06  
 Included observations: 360

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC       | PAC    | Q-Stat | Prob  |
|-----------------|---------------------|----------|--------|--------|-------|
|                 |                     | 1 0.952  | 0.952  | 328.65 | 0.000 |
|                 |                     | 2 0.902  | -0.036 | 624.80 | 0.000 |
|                 |                     | 3 0.859  | 0.048  | 894.42 | 0.000 |
|                 |                     | 4 0.820  | 0.008  | 1140.5 | 0.000 |
|                 |                     | 5 0.790  | 0.082  | 1369.5 | 0.000 |
|                 |                     | 6 0.760  | -0.015 | 1582.0 | 0.000 |
|                 |                     | 7 0.737  | 0.079  | 1782.7 | 0.000 |
|                 |                     | 8 0.719  | 0.032  | 1974.0 | 0.000 |
|                 |                     | 9 0.697  | -0.027 | 2154.2 | 0.000 |
|                 |                     | 10 0.681 | 0.072  | 2327.1 | 0.000 |
|                 |                     | 11 0.660 | -0.058 | 2489.9 | 0.000 |
|                 |                     | 12 0.630 | -0.090 | 2638.6 | 0.000 |
|                 |                     | 13 0.593 | -0.093 | 2770.7 | 0.000 |
|                 |                     | 14 0.562 | 0.053  | 2889.7 | 0.000 |
|                 |                     | 15 0.539 | 0.038  | 2999.5 | 0.000 |
|                 |                     | 16 0.523 | 0.059  | 3103.2 | 0.000 |
|                 |                     | 17 0.512 | 0.034  | 3202.7 | 0.000 |
|                 |                     | 18 0.502 | 0.013  | 3298.7 | 0.000 |
|                 |                     | 19 0.489 | -0.025 | 3390.1 | 0.000 |
|                 |                     | 20 0.479 | 0.044  | 3478.3 | 0.000 |
|                 |                     | 21 0.467 | -0.020 | 3562.1 | 0.000 |
|                 |                     | 22 0.448 | -0.070 | 3639.4 | 0.000 |
|                 |                     | 23 0.428 | 0.019  | 3710.2 | 0.000 |
|                 |                     | 24 0.406 | -0.024 | 3774.2 | 0.000 |
|                 |                     | 25 0.382 | -0.057 | 3830.9 | 0.000 |
|                 |                     | 26 0.362 | 0.004  | 3882.0 | 0.000 |
|                 |                     | 27 0.351 | 0.068  | 3930.1 | 0.000 |
|                 |                     | 28 0.346 | 0.024  | 3977.0 | 0.000 |
|                 |                     | 29 0.348 | 0.101  | 4024.8 | 0.000 |
|                 |                     | 30 0.347 | -0.014 | 4072.5 | 0.000 |
|                 |                     | 31 0.336 | -0.089 | 4117.3 | 0.000 |
|                 |                     | 32 0.326 | 0.017  | 4159.4 | 0.000 |
|                 |                     | 33 0.309 | -0.039 | 4197.5 | 0.000 |
|                 |                     | 34 0.288 | -0.056 | 4230.6 | 0.000 |
|                 |                     | 35 0.274 | 0.060  | 4260.8 | 0.000 |
|                 |                     | 36 0.256 | -0.052 | 4287.1 | 0.000 |

Abbildung 4: Korrelogramm der bereinigten DAX-KGV-Zeitreihe 07/73–06/03

Kommen wir damit zu weitergehenden Elementen einer explorativen Datenanalyse, der Analyse des Korrelogramms. Das Korrelogramm enthält die Autokorrelationen des Prozesses, d.h. die Korrelationen zwischen den zeitlich versetzten Gliedern der Zeitreihe. Abbildung 4 enthält das in EViews 4.1 erstellte Korrelogramm.

Hinsichtlich des Verlaufs der Autokorrelationen in Abhängigkeit von der zeitlichen Ordnung zeigt sich das typische<sup>14</sup> monoton abklingende Verhalten eines AR(1)-Prozesses mit einem positiven Parameter  $a$ . Die Autokorrelationen sind dabei signifikant, wie aus den Werten des *Ljung/Box-Tests*<sup>15</sup> (Q-Statistik, Portmanteau-Test) ersichtlich. Die entspre-

<sup>14</sup> Vgl. hierzu etwa die Illustration in *Buscher* (2002, S. 156) oder *Hamilton* (1994, S. 50).

<sup>15</sup> Zum *Ljung/Box-Test* vgl. etwa *Buscher* (2002, S. 150 f.) oder *Campbell et al.* (1997, S. 47).

Date: 07/14/03 Time: 10:35  
 Sample: 1973:07 2003:06  
 Included observations: 359

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC        | PAC    | Q-Stat | Prob  |
|-----------------|---------------------|-----------|--------|--------|-------|
|                 |                     | 1 0.008   | 0.008  | 0.0207 | 0.886 |
|                 |                     | 2 -0.075  | -0.075 | 2.0553 | 0.358 |
|                 |                     | 3 -0.039  | -0.038 | 2.6126 | 0.455 |
|                 |                     | 4 -0.099  | -0.105 | 6.2201 | 0.183 |
|                 |                     | 5 0.000   | -0.005 | 6.2201 | 0.285 |
|                 |                     | 6 -0.075  | -0.094 | 8.2724 | 0.219 |
|                 |                     | 7 -0.035  | -0.044 | 8.7212 | 0.273 |
|                 |                     | 8 0.032   | 0.007  | 9.1104 | 0.333 |
|                 |                     | 9 -0.080  | -0.097 | 11.483 | 0.244 |
|                 |                     | 10 0.072  | 0.056  | 13.391 | 0.203 |
|                 |                     | 11 0.093  | 0.072  | 16.616 | 0.120 |
|                 |                     | 12 0.085  | 0.089  | 19.287 | 0.082 |
|                 |                     | 13 -0.059 | -0.065 | 20.593 | 0.081 |
|                 |                     | 14 -0.083 | -0.048 | 23.188 | 0.057 |
|                 |                     | 15 -0.059 | -0.060 | 24.519 | 0.057 |
|                 |                     | 16 -0.049 | -0.048 | 25.444 | 0.062 |
|                 |                     | 17 -0.013 | -0.019 | 25.504 | 0.084 |
|                 |                     | 18 0.042  | 0.026  | 26.177 | 0.096 |
|                 |                     | 19 -0.031 | -0.048 | 26.544 | 0.116 |
|                 |                     | 20 0.015  | -0.001 | 26.635 | 0.146 |
|                 |                     | 21 0.063  | 0.052  | 28.157 | 0.136 |
|                 |                     | 22 0.011  | -0.021 | 28.205 | 0.169 |
|                 |                     | 23 0.029  | 0.013  | 28.521 | 0.197 |
|                 |                     | 24 0.037  | 0.054  | 29.055 | 0.218 |
|                 |                     | 25 -0.056 | -0.026 | 30.291 | 0.214 |
|                 |                     | 26 -0.096 | -0.080 | 33.905 | 0.137 |
|                 |                     | 27 -0.062 | -0.038 | 35.410 | 0.129 |
|                 |                     | 28 -0.077 | -0.105 | 37.745 | 0.103 |
|                 |                     | 29 0.062  | 0.027  | 39.278 | 0.096 |
|                 |                     | 30 0.100  | 0.079  | 43.225 | 0.056 |
|                 |                     | 31 -0.002 | -0.018 | 43.227 | 0.071 |
|                 |                     | 32 0.059  | 0.035  | 44.620 | 0.068 |
|                 |                     | 33 0.035  | 0.038  | 45.095 | 0.078 |
|                 |                     | 34 -0.068 | -0.071 | 46.947 | 0.069 |
|                 |                     | 35 0.048  | 0.045  | 47.863 | 0.072 |
|                 |                     | 36 -0.025 | 0.007  | 48.117 | 0.085 |

Abbildung 5: Korrelogramm der ersten Differenzen der KGV-Zeitreihe 07/73–06/03

chenden  $p$ -Werte, d.h. Wahrscheinlichkeiten für eine Ablehnung der Nullhypothese (hier: signifikante Autokorrelationen für alle Ordnungen bis 36) sind sämtlich Null. Auch die Tatsache, dass nur die partielle Autokorrelation erster Ordnung signifikant ist, deutet klar auf einen AR(1)-Prozess hin.

Kommen wir nun zum Korrelogramm der ersten Differenzen der KGV-Reihe, d.h. dem Korrelogramm des Prozesses  $\{V_t - V_{t-1}\}$ . Abbildung 5 enthält die entsprechenden Werte.

Es zeigt sich, dass die *einzelnen* Autokorrelationen zwar nicht signifikant (unter dem von EViews verwendeten Standard-Signifikanzniveau von 5%) sind. Zieht man aber die bestehenden Korrelationen in ihrer Gesamtheit in Betracht, so liegt eine Signifikanz vor. Dies offenbart der *Ljung/Box*-Test (Q-Statistik). Die entsprechenden  $p$ -Werte zeigen, dass die Nullhypothese

$H_0$ : Alle Autokorrelationen bis einschließlich der Ordnung  $n$  sind Null,

für alle Ordnungen bis  $n = 36$  sowohl zum 1%- als auch zum 5%-Signifikanzniveau abgelehnt wird. Nur zum 10%-Signifikanzniveau gibt es einzelne Ordnungen, die nicht zur Verwerfung der Nullhypothese führen. Nimmt man das 5%-Signifikanzniveau als standardmäßigen Maßstab, so spricht dieses Ergebnis eindeutig *gegen* das Vorliegen eines Random Walks, denn für diesen stellt die Zeitreihe der ersten Differenzen gemäß (1a) einen White-Noise-Prozess dar. Dies beinhaltet, dass sämtliche Autokorrelationen gleich Null sein müssen.

#### IV. Spezifikation und Analyse der Basis-Regressionsgleichung

Die Regressionsgleichung (4b) ist die Basisgleichung zur Spezifikation eines AR(1)-Prozesses. Die Durchführung dieser Regression in EViews 4.1 führt zu den in Tabelle 2 enthaltenen Ergebnissen.

Tabelle 2  
Spezifikation der AR(1)-Regressionsgleichung  
für die DAX-KGV-Reihe 07/73–06/03

| Regressionsgleichung: $V_t = c + aV_{t-1} + Z_t$ |             |                         |          |          |
|--|-------------|-------------------------|----------|----------|
| Variable   | Koeffizient | Std. Fehler             | t-Wert   | p-Wert   |
| $c$  | 0,701539    | 0,248089                | 2,827775 | 0,0050   |
| $a$  | 0,952538    | 0,016187                | 58,84474 | 0,0000   |
| R-Quadrat  | 0,906537    | Durbin Watson-Statistik |          | 1,937526 |
| R-Quadrat adjustiert                             | 0,906275    | p-Wert (F-Statistik)    |          | 0,000000 |

Zunächst ergibt sich, dass die identifizierte Regressionsgleichung die Form

$$(8a) \quad V_t = 0,701539 + 0,952538 \cdot V_{t-1} + Z_t$$

besitzt. Die Parameter  $c = 0,701539$  und  $a = 0,952538$  sind beide eindeutig signifikant. Der  $p$ -Wert gibt an, dass die Nullhypothese (hier: Parameterwerte ungleich Null) selbst auf einem Konfidenzniveau von 0,5% verworfen werden muss. Der  $R^2$ -Wert für die Güte der Anpassung liegt sowohl unmodifiziert als auch modifiziert über 90%, d. h., die Regression



erklärt über 90% der empirischen Gesetzmäßigkeit. Auch die *Durbin/Watson*-Statistik<sup>16</sup> liegt sehr in der Nähe ihres Idealwertes von 2. Dies bedeutet, dass die Residuen nicht korreliert und die ausgewiesenen Schätzwerte somit valide sind. Auch die *F*-Statistik, die testet, ob die Regressionskoeffizienten simultan gleich Null sind, führt zu einer Verwerfung dieser Annahme, der entsprechende *p*-Wert ist Null. Zur Erklärung der Hypothese, dass die Residuen nicht autokorreliert – und damit die gewonnenen Schätzwerte valide – sind, führen wir nochmals zusätzlich den Lagrange-Multiplier-Test von *Breusch/Godfrey*<sup>17</sup> auf Autokorrelation durch. Die entsprechend in EViews 4.1 gewonnenen Ergebnisse sind in Tabelle 3 enthalten. Erfasst werden dabei Autokorrelationen bis zur Ordnung 4.

*Tabelle 3*  
**Breusch/Godfrey-Test auf Autokorrelation in den Residuen**

| Variable            | Koeffizient | Std.-Fehler                           | <i>t</i> -Wert | <i>p</i> -Wert |
|---------------------|-------------|---------------------------------------|----------------|----------------|
| <i>c</i>            | -0,206795   | 0,300560                              | -0,688032      | 0,4919         |
| <i>a</i>            | 0,013873    | 0,019792                              | 0,700937       | 0,4838         |
| RESID(-1)           | 0,016510    | 0,056859                              | 0,290359       | 0,7717         |
| RESID(-2)           | -0,068994   | 0,056465                              | -1,221889      | 0,2226         |
| RESID(-3)           | -0,022944   | 0,056125                              | -0,408804      | 0,6829         |
| RESID(-4)           | -0,091232   | 0,056006                              | -1,628979      | 0,1042         |
| <i>F</i> -Statistik | 0,810109    | <i>p</i> -Wert ( <i>F</i> -Statistik) |                | 0,543019       |

Auch der *Breusch/Godfrey*-Test bestätigt nochmals die Validität der vorgenommenen Spezifikation der Regressionsgleichung (4b). Sämtliche *p*-Werte befinden sich oberhalb von 0,10, d.h., zu den Konfidenzniveaus von 10% und darunter muss die Nullhypothese (hier: Autokorrelation in den Residuen) verworfen werden.

Der Wert des Regressionskoeffizienten *a* in Höhe von 0,952538 liegt unterhalb des kritischen Wertes von  $a = 1$ , der im Falle eines Random Walk vorliegt, allerdings nicht sehr deutlich. Inwieweit der Wert  $a = 1$  statis-

<sup>16</sup> Zur *Durbin/Watson*-Statistik und ihrer Interpretation vgl. etwa *Poddig et al.* (2000, S. 297 ff.).

<sup>17</sup> Zum *Breusch/Godfrey*-Test vgl. etwa *Kähler* (2002, S. 104 ff.).

tisch signifikant unterschritten wird, wird im Rahmen der so genannten Einheitswurzel- bzw. Stationaritätstests untersucht. Dies geschieht im nächsten Abschnitt.

Bringen wir nun die spezifizierte Regressionsgleichung in die äquivalente Form eines AR(1)-Prozesses gemäß (4a). Aufgrund von  $c = m(1 - a)$  ergibt sich die folgende Repräsentation:

$$(8b) \quad V_t - 14,80 = 0,952538(V_{t-1} - 14,80) + Z_t.$$

Der langfristige Gleichgewichtswert des AR(1)-Prozesses ist damit ein KGV-Wert von  $m = 14,80$ , auf den die empirischen KGV-Werte im Zeitablauf hingezogen werden. Der langfristige Gleichgewichtswert liegt somit stark in der Nähe des Mittelwerts der KGV-Reihe in Höhe von 14,85.

Über die bisherigen Analysen hinaus, die mehr einen explorativen Charakter aufweisen, soll nun im folgenden Abschnitt eine weitergehende statistische Substantiierung des Vorliegens eines AR(1)-Prozesses vorgenommen werden. Das statistische Instrumentarium hierfür bilden die so genannten Einheitswurzeltests (Unit-Root-Tests).

## V. Einheitswurzeltests

Die Standardvorgehensweise zur Überprüfung der Hypothese

$$H_0 : V_t = c + V_{t-1} + Z_t \quad (\text{Random Walk})$$

gegen die Hypothese

$$(9a) \quad H_1 : V_t = c + aV_{t-1} + Z_t \quad |a| < 1$$

bzw. kurz

$$(9b) \quad H_0 : a = 1 \quad \text{gegen} \quad H_1 : |a| < 1$$

sind die so genannten Einheitswurzeltests.<sup>18</sup> Die erste Generation von Einheitswurzeltests wurde von *Dickey/Fuller* (1979) entwickelt. In allgemeiner Spezifikation<sup>19</sup> (Augmented-*Dickey/Fuller*-(ADF)-Test) wird der Prozess

<sup>18</sup> Vgl. hierzu etwa *Hamilton* (1994, Kapitel 17) sowie *Kugler* (2002, S. 264 ff.).

<sup>19</sup> Vgl. *Kugler* (2002, S. 268).

$$(10) \quad V_t - V_{t-1} = c + \mu t + (a - 1)V_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} a_i \Delta V_{t-i} + Z_t$$

betrachtet, d.h., es werden ein Trendterm  $\mu t$  sowie  $p$  verzögerte Differenzterme der rechten Seite der Regressionsgleichung hinzugefügt. Damit wird das Vorliegen eines differenzenstationären  $AR(p-1)$ -Prozesses gegen die Alternative eines trendstationären  $AR(p)$ -Prozesses überprüft.

Im vorliegenden Fall kann das Auftreten eines Trendterms aus ökonomischen Gründen a priori ausgeschlossen werden, denn dies würde bedeuten, dass das KGV im Mittel systematisch über einen längeren Zeitraum steigen oder fallen würde. Die statistisch relevante Anzahl an verzögerten Termen ist Teil der statistischen Identifikation. Im Falle, dass dabei ein statistisch signifikantes Lag der Länge Null identifiziert wird, reduziert sich (10) auf den Basisfall (9a).

Die Anwendung von Unit-Root-Tests zur Überprüfung der Random-Walk-Hypothese unterliegt der Kritik.<sup>20</sup> Zum einen umfasst die Nullhypothese weitere Prozesse als den reinen Random Walk, zum anderen gibt es zu jedem Unit-Root-Prozess eine stationäre Variante, die auf der Basis einer endlichen Stichprobe nicht statistisch unterscheidbar ist. Schließlich weist die erste Generation von Unit-Root-Tests eine geringe Macht<sup>21</sup> (Wahrscheinlichkeit für die Verwerfung von  $H_0$ , wenn  $H_1$  korrekt ist) auf. Unser Ziel ist aber nicht die generelle Falsifikation des Random Walk. Für unsere Zwecke genügt es, wenn das Alternativmodell  $AR(1)$ -Prozess die Daten statistisch signifikant besser repräsentiert. Der Kritikpunkt der geringen Macht ist zudem nicht mehr relevant für moderne Varianten der Einheitswurzeltests, wie sie etwa von *Elliott/Rothenberg/Stock* (1996) und *Ng/Perron* (2001) entwickelt worden sind und die standardmäßig unter EViews 4.1 zur Verfügung stehen.<sup>22</sup>

Kommen wir damit zu einem ersten Test von (9), einer modifizierten Variante<sup>23</sup> des (Augmented-)*Dickey/Fuller*-Tests nach *Elliott/Rothen-*

<sup>20</sup> Vgl. etwa *Campbell et al.* (1997, S 64 f.) sowie *Hamilton* (1994, S. 444 ff.).

<sup>21</sup> Vgl. etwa *Eberts* (2002, S. 56).

<sup>22</sup> Allerdings weisen *Carstensen* (2003) und auch der Gutachter darauf hin, dass im Falle des Vorliegens von Residuen, die eine Verteilungsschiefe aufweisen, Verzerrungen auftreten können. Dieser Kritikpunkt ist angesichts von Abbildung 2 auch für den vorliegenden Fall von Relevanz. Eine vertiefte Behandlung dieses Kritikpunktes sprengt jedoch den Rahmen der vorliegenden Ausarbeitung. Grundsätzlich ist dieser Kritikpunkt jedoch bei der Beurteilung der Validität der Ergebnisse zu berücksichtigen.

Tabelle 4  
**Augmented-Dickey/Fuller-GLS-Test**

|  |             |           |
|--|-------------|-----------|
| Exogene Variable: Konstante<br>Lag-Länge: 0 (SIC, MAXLAG = 16) |             |           |
| DF-GLS Statistik   |             | -2,859046 |
| Kritische Werte:   | 1 %-Niveau  | -2,571419 |
|  | 5 %-Niveau  | -1,941709 |
|  | 10 %-Niveau | -1,616108 |

*berg/Stock* (ERS). Die Ergebnisse der Durchführung dieses Tests in EViews 4.1 sind in Tabelle 4 enthalten.

Zunächst ist festzuhalten, dass, wie schon beim ADF-Test, die Werte der Teststatistik die kritischen Werte unterschreiten müssen, damit die Nullhypothese verworfen werden kann. Dies ist vorliegend der Fall, der Wert der Teststatistik (einer Variante der *t*-Statistik) liegt jeweils (deutlich) unterhalb der kritischen Werte (nach *MacKinnon*) zum 10%-, 5%- und 1%-Konfidenzniveau. Zum Zweiten ist festzuhalten, dass die Wahl der adäquaten Lag-Länge nach dem *Schwartz-Information-Criterion*<sup>24</sup> (SIC) zu einer Lag-Länge von Null führt. Das statistisch präferierte Alternativmodell ist somit – wie erhofft – der AR(1)-Prozess.

Als zweiten Test betrachten wir den ebenfalls von ERS entwickelten ERS-Point-Optimal-Unit-Root-Test.<sup>25</sup> Das Resultat ist in Tabelle 5 enthalten.

Wiederum muss die Testgröße einen Wert *unterhalb* der kritischen Werte annehmen, damit die Nullhypothese (Random Walk) verworfen wird. Dies ist vorliegend der Fall, ebenso ist die statistisch adäquate Lag-Länge gleich Null. Die statistisch präferierte Alternative ist somit wiederum der AR(1)-Prozess.

<sup>23</sup> Die Grundidee besteht dabei darin, den ADF-Test auf die entsprechend mittels eines Generalized-Least-Squares-(GLS-)Ansatzes trendbereinigten Daten anzuwenden, deswegen trägt der Test in EViews 4.1 die Bezeichnung GF-GLS-Test.

<sup>24</sup> Das *Schwartz-Information-Criterion* ist bei EViews standardmäßig voreingestellt. Aber auch die Wahl eines alternativen Kriteriums (*Akaike*, *Hannan-Quinn*, *Modified Akaike*, *Modified Schwartz*, *Modified Hannan-Quinn*) führt zu demselben Resultat.

<sup>25</sup> Für die Details müssen wir an dieser Stelle auf *Elliott et al.* (1996) verweisen.



*Tabelle 5*  
**ERS-Point-Optimal-Unit-Root-Test**

|   |             |          |
|---|-------------|----------|
| Exogene Variable: Konstante<br>Lag-Länge: 0 (Spectral OLS AR based on SIC, MAXLAG = 16) |             |          |
| Elliott-Rothenberg-Stock-Statistik  |             | 1,581191 |
| Kritische Werte:  | 1 %-Niveau  | 1,974000 |
|   | 5 %-Niveau  | 3,242000 |
|   | 10 %-Niveau | 4,450000 |

*Ng/Perron* (2001) entwickelten schließlich eine ganze Batterie von (insgesamt vier) Tests, Varianten des M-Tests von *Perron/Ng* (1996), zur Überprüfung der Einheitswurzelhypothese mit erhöhter Macht.<sup>26</sup> Die Resultate unter EViews 4.1 sind in Tabelle 6 enthalten.

*Tabelle 6*  
**Ng/Perron-Modified-M-Test**

|   |             |          |          |         |         |
|---|-------------|----------|----------|---------|---------|
| Exogene Variable: Konstante<br>Lag-Länge: 0 (Spectral GLS-detrended AR based on SIC, MAXLAG = 16) |             |          |          |         |         |
|   |             | MZA      | MZt      | MSB     | MPT     |
| Ng-Perron-Statistiken   |             | -15,7318 | -2,79880 | 0,17791 | 1,57983 |
| Asympt. kritische Werte:  | 1 %-Niveau  | -13,8000 | -2,58000 | 0,17400 | 1,78000 |
|   | 5 %-Niveau  | -8,10000 | -1,98000 | 0,23300 | 3,17000 |
|   | 10 %-Niveau | -5,70000 | -1,62000 | 0,27500 | 4,45000 |

Das Resultat bestätigt eindrucksvoll die bisherigen Ergebnisse. Bis auf Test Nr. 3 (MSB), bei dem die Nullhypothese zum 1 %-Konfidenzniveau – allerdings extrem knapp – nicht verworfen werden kann, wird in allen anderen Fällen die Nullhypothese verworfen. Die statistisch adäquate Lag-Länge ist wiederum Null.

Insgesamt ist festzuhalten, dass bei allen der durchgeführten Einheitswurzeltests eindeutig der AR(1)-Prozess aus statistischer Sicht die Daten besser repräsentiert als der Random Walk.

<sup>26</sup> Für Details muss an dieser Stelle wieder auf *Ng/Perron* (2001) verwiesen werden.

## VI. KPSS-Test auf Stationarität

Im Unterschied zu den Einheitswurzeltests überprüft der Test von *Kwiatkowski/Phillips/Schmidt/Shin*<sup>27</sup> (1992) die Nullhypothese der (Trend-)Stationarität und „vertauscht“ damit die Hypothesen. Die Ergebnisse der Durchführung des KPSS-Tests in EViews 4.1 sind in Tabelle 7 enthalten.

Tabelle 7  
KPSS-Tests auf (Trend-)Stationarität

| Exogene Variable: Konstante, linearer Trend<br>Bandweite: 14 (Newey-West using Bartlett kernel) |             |             |          |          |
|---|-------------|-------------|----------|----------|
| KPSS-Statistik  |             |             |          | 0,080102 |
| Asympt. kritische Werte:  | 1 %-Niveau  |             |          | 0,216000 |
|   | 5 %-Niveau  |             |          | 0,146000 |
|   | 10 %-Niveau |             |          | 0,119000 |
| Variable  | Koeffizient | Std.-Fehler | t-Wert   | p-Wert   |
| Konstante   | 10,73009    | 0,306319    | 35,02910 | 0,0000   |
| Trend   | 0,022957    | 0,001477    | 15,54435 | 0,0000   |

Das Ergebnis des KPSS-Tests führt zu einer Nicht-Verwerfung der Nullhypothese, da die KPSS-Statistik die kritischen Werte nicht übersteigt. Der Random-Walk-Fall kann somit verworfen werden. Der KPSS-Test identifiziert zwar noch einen (minimalen) Trend, dies kann aber – wie bereits ausgeführt – aus ökonomischen Gründen a priori ausgeschlossen werden.

## VII. Anwendung: Eine DAX-Projektion

In diesem Abschnitt sollen nunmehr noch die Implikationen des Vorliegens eines AR(1)-Prozesses auf KGV-Ebene für die Prognose der weiteren DAX-Entwicklung aufgezeigt werden.

Ansatzpunkt hierfür ist zunächst die in Abschnitt IV. identifizierte Regressionsgleichung (8b) und der damit verbundene langfristige Gleichge-

<sup>27</sup> Vgl. auch etwa *Franke et al.* (2001, S. 175 f.) oder *Kugler* (2002, S. 275 f.).

wichtswert des AR(1)-Prozesses in Höhe des KGV-Wertes von 14,80. Als weiterer Ausgangspunkt dienen die empirischen Verhältnisse per Ultimo 2002. Zu diesem Zeitpunkt ist ein DAX-Stand von 2892,63 zu verzeichnen, das zugehörige DAX-KGV weist einen Wert von 10,90 auf. Gemessen am 10%-Quantil in Höhe von 10,8 der KGV-Reihe, vgl. Tabelle 1, war damit der DAX praktisch an der Grenze einer systematischen Unterbewertung. Gegeben diese Ausgangssituation beträgt die rechnerische Gewinngröße pro DAX-KGV-Punkt 265,40. Unter Anwendung des langfristigen Gleichgewichtswertes für die DAX-KGV-Reihe in Höhe von  $m = 14,80$  ergibt sich daraus ein entsprechender DAX-Stand von 3927,60. Dies beinhaltet zunächst eine DAX-Prognose bei Anwendung des Gleichgewichts-KGVs und bei *unveränderter Gewinnsituation*. Eine DAX-Projektion unter Berücksichtigung des künftigen *Gewinnwachstums* erhält man des Weiteren auf die folgende Weise.

Bezeichnet man mit  $K_t$  den DAX-Kurs zum Zeitpunkt  $t$  und  $G_t$  den (akkumulierten) DAX-Gewinn zum Zeitpunkt  $t$ , so ergibt sich das Kurs/Gewinn-Verhältnis  $KGV_t$  zum Zeitpunkt  $t$  zu  $KGV_t = K_t/G_t$ . Für die relative Kursveränderung zweier aufeinander folgender Perioden gilt dann

$$(11a) \quad \frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{KGV_{t+1}}{KGV_t} \cdot \frac{G_{t+1}}{G_t}$$

und damit

$$(11b) \quad K_{t+1} = \frac{KGV_{t+1}}{KGV_t} \cdot \frac{G_{t+1}}{G_t} \cdot K_t.$$

Der projizierte DAX-Stand hängt somit ab vom KGV-Wachstum, vom Gewinnwachstum und vom angenommenen Startwert des DAX. Ausgangskurs  $K_t$  und Ausgangs-KGV  $KGV_t$  sind bekannt. Als KGV zum Zeitpunkt  $t + 1$  wäre das Gleichgewichts-KGV in Höhe von 14,80 zu wählen. Offen ist damit nur noch die Substantiierung der Gewinnwachstumsrate. Diese kann man auf Basis der Beziehung  $G_t = K_t/KGV_t$  aus den entsprechenden Werten der Datastream-Datenbank für die Entwicklung des DAX sowie des DAX-KGVs berechnen. Für die Jahre 1974–2002 ergibt sich dabei im Mittelwert (geometrisches Mittel) ein Wert von 6,46 %.

Unter Ansatz dieses mittleren Wertes sowie der sonstigen bereits spezifizierten Annahmen ergibt sich auf der Basis der Beziehung (11b) ein

prognostizierter DAX-Stand von 4181,30. Diese Vorgehensweise nimmt eine einjährige Sichtweise ein, d.h. unterstellt, dass das mittlere DAX-Wachstum für eine Projektionsperiode von einem Jahr wirksam ist. Entsprechend kann man vorgehen, wenn man einen mehrjährigen Projektionszeitraum ansetzt und unterstellt, dass das angenommene mittlere DAX-Gewinnwachstum in Höhe von 6,46 % über den gesamten Projektionszeitraum gültig ist. Die Wahl eines mehrperiodigen Projektionszeitraums ist auch deswegen plausibler, weil dann das KGV entsprechende Zeit bekommt, sich auf sein Langfristmittel hinzubewegen. Unterstellt man einen Projektionszeitraum von 3 Jahren, so führt dies zu einem DAX-Stand von 4739,00, bei einem Projektionszeitraum von 5 Jahren führt dies zu einem Wert von 5371,10. Unterstellt wird dabei jeweils eine Bewertung der Gewinnsituation zum Gleichgewichts-KGV von 14,80. Die Tabelle 8 fasst die vorstehend gewonnenen Ergebnisse zusammen.

Tabelle 8

**Gleichgewichts-DAX-Stände bei Annahme eines Gleichgewichts-KGVs von 14,80**

| Gleichgewichts-DAX-Stand bei                |         |
|---|---------|
| (a) unveränderter Gewinnsituation           | 3927,60 |
| (b) mittlerem Gewinnwachstum von 6,46 % für |         |
| 1 Jahr                                      | 4181,30 |
| 3 Jahre                                     | 4739,00 |
| 5 Jahre                                     | 5371,10 |

Kommen wir damit zu einer Zusammenfassung der Ergebnisse.

### VIII. Zusammenfassung

Im Zentrum der vorliegenden Ausarbeitung steht die Frage, ob das Modell eines Random Walk oder eines AR(1)-Prozesses („Mean Reversion“) besser geeignet ist, die Entwicklung des Kurs/Gewinn-Verhältnisses des Deutschen Aktienindex (DAX) zu beschreiben. Die Datengrundlage ist dabei die in der Datastream-Datenbank enthaltene Reihe der monatlichen KGV-Werte von Juli 1973 bis Juni 2003, mithin ein Zeitraum von 30 Jahren (360 Datenpunkte).

Das Vorliegen einer der beiden alternativen Modellhypothesen hat entscheidende Auswirkungen auf die Frage der Prognostizierbarkeit der Modellgröße, hier des KGV. Die Random-Walk-Hypothese impliziert,



dass ein „fairer“ langfristiger Modellwert nicht existieren kann, da beim Random Walk durch die mögliche „Aufschaukelung“ von Zufallseinflüssen die Abweichungen vom zugrunde liegenden Trend (in systematischer Hinsicht) dem Grunde nach „beliebig groß“ werden können. Die künftigen Wertveränderungen sind im Kern nicht prognostizierbar. Im Unterschied hierzu weist ein AR(1)-Prozess ein langfristiges Mittel auf, zu dem der Prozess mit einer gegebenen Elastizität hingezogen wird.

Sowohl im Rahmen einer mehr explorativen Datenanalyse (visuelle Inspektion, Korrelogramm der Zeitreihe und ihrer ersten Differenzen, Regressionsanalyse) als auch auf der Basis einer Reihe von formalen statistischen Tests (*Ljung/Box*-Test, Residualtests, Einheitswurzeltests, KPSS-Stationaritätstest) zeigt sich in uniformer Weise, dass die Hypothese des AR(1)-Prozesses die analysierte KGV-Zeitreihe statistisch besser repräsentiert als der Random Walk.

Neben den entsprechenden Konsequenzen dieses Ergebnisses für die Prognose des Kurs/Gewinn-Verhältnisses des DAX wird auch die Frage behandelt, wie auf dieser Basis Prognosen für die DAX-Entwicklung selbst gewonnen werden können.

## Literatur

*Albrecht, P.* (2001): Welche Aktienperformance ist über die nächsten Dekaden realistischerweise zu erwarten? Eine Fundamentalanalyse, *Zeitschrift für Versicherungswesen* 23/2001, 803–812. – *Albrecht, P., R. Maurer* (2002): Investment- und Risikomanagement, Stuttgart. – *Balvers, R., Y. Wu, E. Gilliland* (2000): Mean Reversion Across National Stock Markets and Contrarian Investment Strategies, *Journal of Finance* 55, 745–772. – *Buscher, H. S.* (2002): Angewandte Zeitreihenanalyse, in: *Schröder, M.* (Hrsg.): Finanzmarkt-Ökonometrie, Stuttgart, S. 131–212. – *Campbell, J. Y., A. W. Lo, A. C. MacKinlay* (1997): *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton, New Jersey. – *Campbell, J. Y., L. M. Viceira* (1999): Consumption and Portfolio Decisions when Expected Returns are Time Varying, *Quarterly Journal of Economics* 114, 433–495. – *Campbell, J. Y., L. M. Viceira* (2002): *Strategic Asset Allocation*, Oxford/New York. – *Carstensen, K.* (2003): The finite-sample performance of robust unit root tests, *Statistical Papers* 44, S. 469–482. – *Dickey, D. A., W. A. Fuller* (1979): Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *Journal of the American Statistical Association* 74, S. 427–431. – *Eberts, E.* (2002): Strategische stochastische Investmentmodelle für den deutschen Kapitalmarkt, Karlsruhe. – *Eberts, E.* (2003): The connection of the stock markets between Germany and the USA, ZEW Discussion Paper Nr. 03–36, Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung, Mannheim. – *Elliot, G., T. J. Rothenberg, J. H. Stock* (1996): Efficient tests for an autoregressive unit root, *Econometrica* 64, 813–836. – *Fama, E. F., K. French* (1988): Permanent and Temporary Components of Stock Prices, *Journal of Political Economy* 96, 246–273. – *Franke,*

J., W. Härdle, C. Hafner (2001): Einführung in die Statistik der Finanzmärkte, Berlin/Heidelberg. – Gujarati, D. N. (1995): Basic Econometrics, 3. Aufl., New York u. a. – Hamilton, J. O. (1994): Time Series Analysis, Princeton, New Jersey. – Kähler, J. (2002): Regressionsanalyse, in: Schröder, M. (Hrsg.): Finanzmarkt-Ökonometrie, Stuttgart, S. 33–129. – Kugler, P. (2002): Nicht-Stationarität und Kointegration, in: Schröder, M. (Hrsg.): Finanzmarkt-Ökonometrie, Stuttgart, S. 263–299. – Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt, Y. Shin (1992): Testing the Null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?, Journal of Econometrics 54, 159–178. – Lo, A. W., A. C. MacKinlay (1988): Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test, Review of Financial Studies 1, 41–46. – Löffler, G. (2000): Bestimmung von Anlagerisiken bei Aktiensparplänen, Die Betriebswirtschaft 60, 350–361. – Ng, S., P. Perron (2001): Lag length selection and the construction of unit root tests with good size and power, Econometrica 69, 1519–1554. – Perron, P., S. Ng (1996): Useful modifications to unit root tests with dependent errors and their local asymptotic properties, Review of Economic Studies 63, 435–465. – Poddig, T., H. Dichtl, K. Petersmeier (2000): Statistik, Ökonometrie, Optimierung, Bad Soden/Ts. – Poterba, J. M., L. H. Summers (1988): Mean Reversion in Stock Returns: Evidence and Implications, Journal of Financial Economics 22, S. 27–59. – Shiller, R., P. Perron (1985): Testing the random walk hypothesis, Economic Letters 18, 381–386.

## Zusammenfassung

### Random Walk oder Mean Reversion? Eine statistische Analyse des Kurs/Gewinn-Verhältnisses für den deutschen Aktienmarkt

Im Zentrum der vorliegenden Ausarbeitung steht die Frage, ob das Modell eines Random Walk oder eines AR(1)-Prozesses („Mean Reversion“) besser geeignet ist, die Entwicklung des Kurs/Gewinn-Verhältnisses des Deutschen Aktienindex (DAX) zu beschreiben. Das Vorliegen einer der beiden alternativen Modellhypothesen hat entscheidende Auswirkungen auf die Frage der Prognostizierbarkeit der Modellgröße, hier des KGV. Die Random-Walk-Hypothese impliziert, dass ein „fairer“ langfristiger Modellwert nicht existieren kann. Im Unterschied hierzu weist ein AR(1)-Prozess ein langfristiges Mittel auf, zu dem der Prozess mit einer gegebenen Elastizität hingezogen wird. Sowohl im Rahmen einer mehr explorativen Datenanalyse als auch auf der Basis einer Reihe von formalen statistischen Tests zeigt sich in uniformer Weise, dass die Hypothese des AR(1)-Prozesses die analysierte KGV-Zeitreihe statistisch besser repräsentiert als der Random Walk. Neben den entsprechenden Konsequenzen dieses Ergebnisses für die Prognose des Kurs/Gewinn-Verhältnisses des DAX wird auch die Frage behandelt, wie auf dieser Basis Prognosen für die DAX-Entwicklung selbst gewonnen werden können. (JEL C52, G10)

## Summary

### **Random Walk or Mean Reversion? A Statistical Analysis of the Price/Earnings Ratio for the German Stock Market**

The present contribution considers the question whether the random walk model or an AR(1)-process ("mean reversion") is a better representation for the development of the price/earnings ratio of the German blue-chip index DAX. Empirical evidence for one of these alternative model hypotheses is crucial to the predictability of the underlying variable, i.e. the P/E ratio. While the random walk hypothesis implies the non-existence of a long-run "fair" value for the variable of interest, an AR(1)-process, in contrast, possesses a long-run mean and exhibits mean reverting behaviour in that it fluctuates around this constant long-run value. Both an exploratory data analysis and a set of formal statistical tests equally lead to the conclusion that the hypothesis of an AR(1)-process, in a statistical sense, better represents the investigated time series data than the random walk model. The consequences of this key result are not only discussed with respect to the predictability of the P/E ratio of the German stock market index, but also with regard to forecasts for the development of the DAX itself.

## Résumé

### **Random Walk ou Mean Reversion? Une analyse statistique du rapport cours/gain pour le marché allemand des actions**

La question principale de cet article est de savoir quel modèle est le plus adéquat pour décrire l'évolution du rapport cours/gain de l'index allemand DAX: le modèle du Random Walk ou celui de du processus AR(1) («Mean Reversion»). L'évidence empirique d'une de ces hypothèses de modèles est cruciale pour prédire les variables sous-jacentes, entre autres le rapport cours/gain. L'hypothèse du Random Walk implique qu'une valeur à long terme équitable («fair») ne peut pas exister. Par contre, un processus AR(1) possède une moyenne à long terme qui donne une certaine élasticité au modèle. Autant une analyse plus exploratoire des données que différents tests statistiques formels mènent à la conclusion uniforme que l'hypothèse du processus AR(1) représente mieux statistiquement la série analysée du rapport cours/gain que le Random Walk. En plus de l'analyse des conséquences de ce résultat sur les prévisions du rapport cours/gain du DAX, les auteurs traitent aussi la question de savoir comment les prévisions de l'évolution du DAX peuvent être faites sur cette base.