

## **Statistische Analyse des Zinsprozeßrisikos von Anleihen und zinsderivativen Wertpapieren**

Von Bernd Freisleben und Klaus Ripper, Siegen und Frankfurt/M.\*

### **I. Einleitung**

Die deutsche Zinsentwicklung spielt in zunehmendem Maße eine dominante Rolle für den europäischen Markt. Neben der breiten Diskussion um die Europäische Währungsunion und die einhergehenden Implikationen für das Portfoliomanagement nimmt die Diskussion über die Zinsprozeßrisiken einen breiten Raum ein. Seit Beginn der 70er Jahre sind vor allem aufgrund der Deregulierung im Kapitalmarktsektor die Zinssätze am deutschen Rentenmarkt stärker in Bewegung geraten. Während die Besitzer von Anleihen üblicherweise glauben, eine vermeintlich sichere Kapitalanlage gewählt zu haben, führte der Kapitalmarkt im Jahr 1994 aufgrund der negativen Entwicklung der Rentenperformanceindizes (BHF-Bank- und REX-Performanceindex) der breiten Schicht der Bondportfoliomanager vor, daß dieses Instrument doch ein erhebliches Risiko birgt.

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der Erfassung und der Bewertung des Zinsprozeßrisikos von festverzinslichen Anleihen und von zinsderivativen Finanzprodukten. Das moderne Portfoliomanagement hält eine Vielzahl von Risikokennziffern für die Erfassung des Zinsprozeßrisikos bereit. Neben der Quantifizierung des Portfoliorisikos aufgrund einer möglichen Veränderung der Zinsstrukturkurve spielt die Zerlegung der Zinsstrukturkurvenbewegung in ihre einzelnen Komponenten eine wichtige Rolle, um zum einen das Zinsprozeßrisiko erfassen zu können und zum anderen, um adäquate Risikokennziffern für die Portfoliobewertung auswählen zu können. In diesem Beitrag wird mit Hilfe der Hauptkomponentenanalyse das Zinsprozeßrisiko anhand eines ausgewählten historischen Datenmaterials in einzelne Risikokomponenten zerlegt, wobei mit einem GARCH-Prozeß der Zusammenhang zwischen den Hauptkomponenten und der Volatilität aufgezeigt wird. *Litterman/Scheinkman*

---

\* Der Beitrag liegt inhaltlich in der alleinigen Verantwortung der Autoren.

(1991a) ermittelten bereits für den US-Markt und *Dahl* (1993) für den dänischen Markt, daß das Risiko auf drei wesentliche Faktoren reduziert werden kann. Die empirischen Ergebnisse von *Litterman/Scheinman* wurden von *Singh* (1995), *Barber* (1995), *Golub* (1997) und *Falkenstein* (1997) für den US-Rentenmarkt bestätigt. Basierend auf diesen empirischen Ergebnissen wird gezeigt, daß für den deutschen Markt ähnliche Muster gelten. Im Gegensatz zu *Bühler/Zimmermann* (1996), die ebenfalls den deutschen Markt untersuchten, wurden in der vorliegenden Untersuchung statt wöchentlicher monatliche Daten verwendet, und der Umfang der Datenhistorie wurde deutlich erweitert, um mehrere Zins- und Konjunkturzyklen zu berücksichtigen und ein repräsentatives Ergebnis zu erhalten. Daher unterscheiden sich die empirischen Ergebnisse der vorliegenden Studie deutlich von den Ergebnissen der obigen Autoren.

Bezüglich einer adäquaten Auswahl geeigneter Risikokennziffern wird in diesem Artikel aufgrund der durchgeführten empirischen Analyse gezeigt, daß für die überwiegende Zahl der Rentenportfolios als Risikokennziffer die Fisher-Weil-Duration<sup>1</sup> ausreichend ist. Für Portfolios mit zinsderivaten Produkten kann die von *Ho* (1992) entwickelte Key-Rate-Duration Verwendung finden. Die Vorzüge des Key-Rate-Durationskonzeptes werden durch die Entwicklung geeigneter Durationmaße in Einklang mit den empirischen Ergebnissen der Hauptkomponentenanalyse gebracht.

Der Beitrag ist folgendermaßen gegliedert: Abschnitt II. erörtert die Erstellung der Korrelationsmatrix und die Durchführung der Hauptkomponentenanalyse sowie die Einordnung der angewandten Analyse-methode in die bestehenden Faktormodelle der Finanzwirtschaft. Abschnitt III. beschreibt die empirischen Ergebnisse der Hauptkomponentenanalyse bezüglich der monatlichen Renditen der BHF-Bank-Rentenmarktindizes, und Abschnitt IV. enthält die Ergebnisse der GARCH-Schätzung. In Abschnitt V. werden die Ergebnisse in Bezug zu den bekannten Risikomaßen im Bondportfoliomanagement gesetzt. Abschnitt VI. faßt die Ergebnisse zusammen und gibt einen Ausblick auf die Vielzahl möglicher Erweiterungen der Hauptkomponentenanalyse.

---

<sup>1</sup> Siehe *Fabozzi, R.* (1995).

## II. Korrelationsmatrix und Hauptkomponentenanalyse

In Abbildung 1 wird die zeitliche Entwicklung der Zinsstruktur in Abhängigkeit von der Laufzeit der Anleihen gezeigt. Als Datenquelle dienten die monatlichen BHF-Bank-Rentenindizes im Zeitraum Dez. 1967 bis Nov. 1996, zu deren Berechnung alle deutschen Anleihen der öffentlichen Hand, der Post, Bahn und des ERPs<sup>2</sup> herangezogen werden.<sup>3</sup> Der visuelle Eindruck verdeutlicht, daß die Variabilität der Zinsstrukturkurve beträchtliche Dimensionen annehmen kann. Das zentrale Problem für die Erfassung des Zinsprozeßrisikos ist jedoch die Aufspaltung dieser Variabilität in ihre einzelnen Bestandteile.

Die Dynamik der Zinsstrukturkurve wird für die Renditen von einjährigen und neunjährigen Anleihen anhand der Abbildung 2 deutlich. Diese zeigt die mit Hilfe eines Kerndichteschätzverfahrens<sup>4</sup> ermittelte Dichtefunktion der Renditen. Die Breite der Verteilung ist ein Maß für die Dynamik der Zinsstrukturkurvenbewegung. Je kürzer die Restlaufzeit einer Anleihe, desto breiter ist die Verteilung der Renditen, d. h., desto größer ist die Varianz und damit das Zinsprozeßrisiko.<sup>5</sup>

Eine hohe Korrelation<sup>6</sup> zwischen den einzelnen Laufzeiten kann den Gesamtzusammenhang innerhalb der einzelnen Laufzeiten wohl beschreiben, doch ob diese Korrelation durch eine Parallelverschiebung oder durch eine Drehung der Zinsstrukturkurve zu erklären ist, kann durch die Korrelationsmatrix nicht erfaßt werden. Die Korrelation  $k(x, y)$  zweier Zeitreihen  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  und  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  bestimmt sich zu:

$$(1) \quad k(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^N ((x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$$

mit:

$\bar{x}$  und  $\bar{y}$  als Mittelwert der jeweiligen Datenreihe

<sup>2</sup> Anleihen des European Recovery Program.

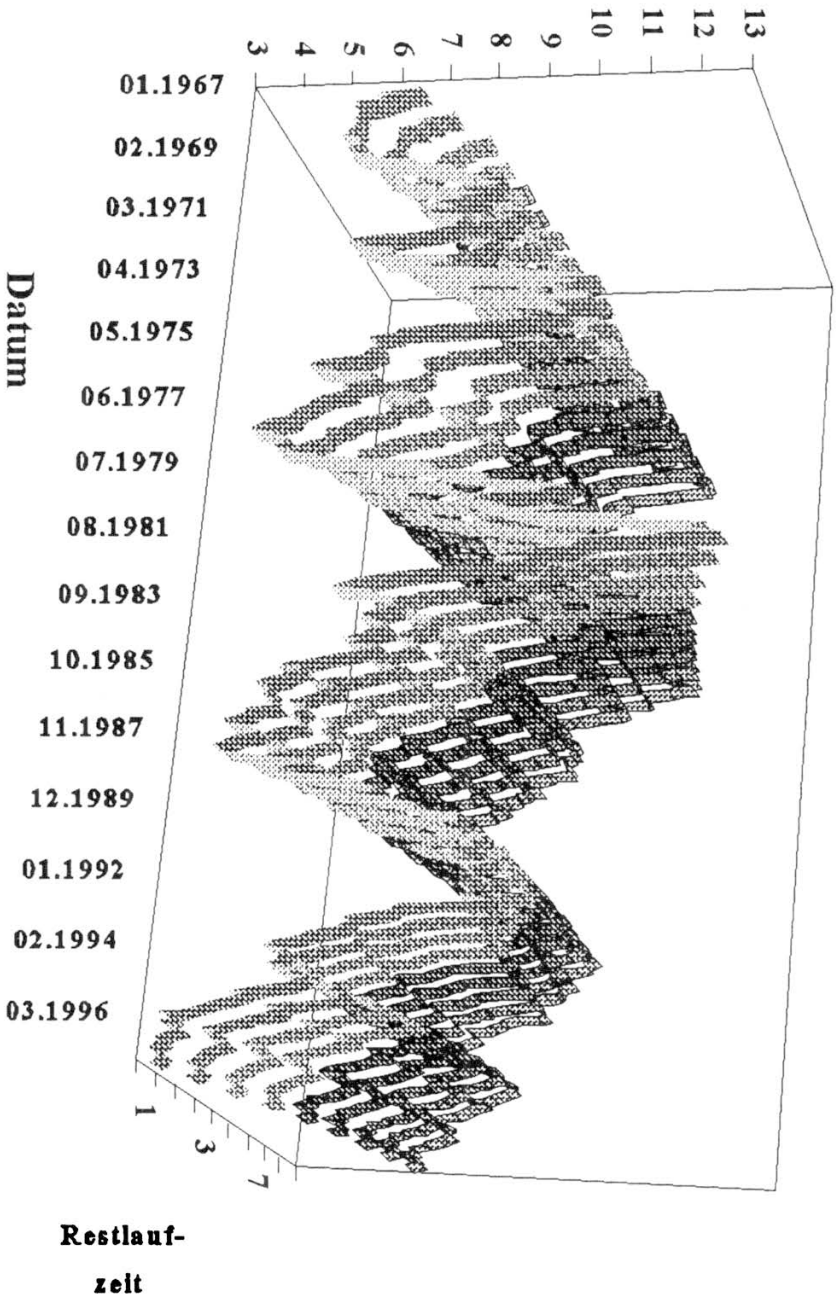
<sup>3</sup> Siehe Wertschulte, J., Meyer, T. (1985).

<sup>4</sup> Siehe Härdle, W., Klinke, M., Turlach, G. (1995).

<sup>5</sup> Das Zinsprozeßrisiko ist nicht gleichbedeutend mit dem Kursrisiko, da eine Renditeveränderung auf Grund der Duration eine unterschiedliche Kursveränderung verursacht.

<sup>6</sup> Die Korrelation ist ein Erklärungsmaß für den linearen Zusammenhang zwischen zwei Ausprägungen, siehe Hartung, J. (1991), pp. 77 ff. Je näher der Korrelationskoeffizient bei Eins liegt, desto stärker ist der lineare Zusammenhang.

Abb. 1: Renditen der Zinsstrukturkurve von 1967 bis 1996 in Abhängigkeit der Restlaufzeit



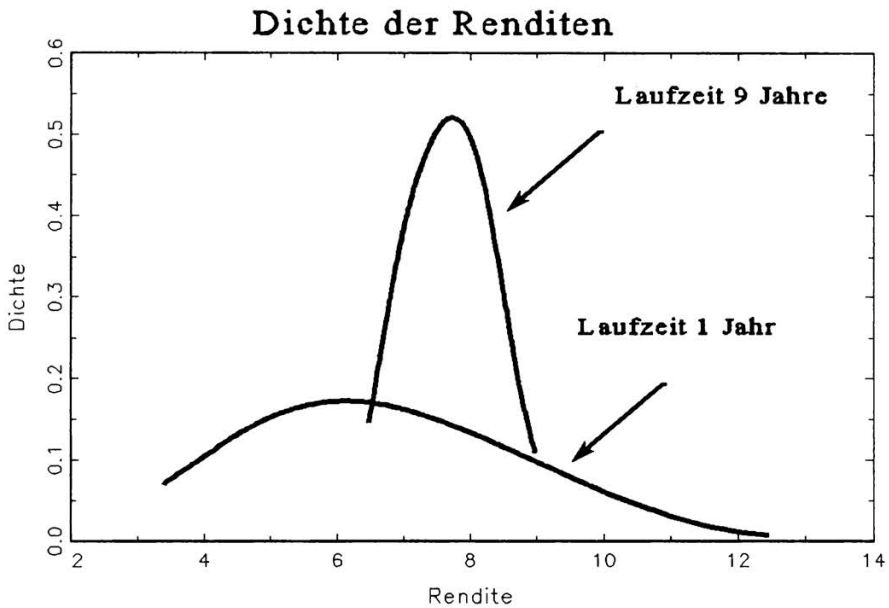


Abb. 2: Geschätzte Dichtefunktion der Renditen

Abbildung 3 zeigt die berechnete historische Korrelationsmatrix der Renditen der BHF-Bank-Rentenindizes auf Monatsbasis von 1967 bis 1996. Der Korrelationskoeffizient zwischen den ein- und neunjährigen Renditen liegt lediglich bei 0,6771 und der zwischen den fünf- und neunjährigen bei 0,9222. Der lineare Zusammenhang ist um so stärker, je geringer die betrachtete Restlaufzeitdifferenz der einzelnen Renditen ist.

Die in der quantitativen Analyse von ökonomischen Daten weitverbreitete Methode der Hauptkomponentenanalyse kann kausale Zusammenhänge von mehreren Zeitreihen auf wenige unabhängige Einflußfaktoren zurückführen. Die an Zinszeitreihen beobachteten Merkmale sind in der Regel miteinander korreliert und lassen sich auf latente, „künstliche“ Merkmale bzw. Faktoren zurückführen, die selbst nicht unmittelbar beobachtet werden können. In der Hauptkomponentenanalyse<sup>7</sup> werden orthogonale, unkorrelierte Faktoren derart bestimmt, daß durch sie ein möglichst großer Teil der Korrelation der Merkmale erklärt wird. In der Statistik unterscheidet man zwei Berechnungsverfahren zur Bestimmung

<sup>7</sup> Für eine weiterführende Darstellung der Hauptkomponentenanalyse siehe Küster, U., Arminger, G. (1989), pp. 167 ff.

Restlaufzeit	1 Jahr	3 Jahre	5 Jahre	7 Jahre	9 Jahre
1 Jahr	1	-	-	-	-
3 Jahre	0,8866	1	-	-	-
5 Jahre	0,7942	0,9778	1	-	-
7 Jahre	0,7299	0,9291	0,9777	1	-
9 Jahre	0,6771	0,8563	0,9222	0,9765	1

Abb. 3: Korrelationsmatrix der einzelnen Restlaufzeitklassen

der in der Hauptkomponentenanalyse verwendeten Ladungsmatrix, wobei diesen gemein ist, daß diese die Korrelationen der beobachtbaren Merkmale mit den latenten Faktoren enthält. In dieser Arbeit wurde die von *Litterman/Scheinkman* (1991a) verwendete Varianz-Kovarianz-Matrix zur Bestimmung der Ladungsmatrix verwendet.<sup>8</sup>

Die finanzwirtschaftliche Theorie<sup>9</sup> für Zinsreihen mit unterschiedlichen Restlaufzeiten unterstellt keine Eigendynamik der einzelnen Laufzeitklassen. Es gibt daher keine spezifischen Faktoren, die jeweils nur auf eine Restlaufzeitklasse wirken und die übrigen nicht beeinflussen würden. Daher fordert man, daß die Faktoren orthogonal, also unkorreliert sind. Die Hauptkomponentenanalyse dient zur Erkennung der Struktur der nicht beobachtbaren Merkmale (Hauptkomponenten). Diese Hauptkomponenten (HK) sind linear unabhängig und bilden über die Ladungsmatrix mit den zu erklärenden Größen ein Gleichungssystem, wobei die Ladungsmatrix  $F$  die nach der Größe der zugehörigen Eigenwerte geordneten Eigenvektoren der Korrelationsmatrix der zu erklärenden Größen ist. Die Renditen  $R$  lassen sich daher als Gleichung formulieren:

$$(2) \quad R = F \cdot L + T$$

Hierbei ist  $F$  die Faktorladungsmatrix,  $L$  die unbeobachtete Hauptkomponentenmatrix und  $T$  der Residualvektor. Die Hauptkomponentenanalyse liefert entsprechend der Dimension der Kovarianzmatrix  $n$  Eigenwerte und  $n$  Eigenvektoren. Die Anzahl der zu berücksichtigenden Eigenvektoren in der Hauptkomponentenmatrix ist von der jeweiligen

<sup>8</sup> Siehe dazu *Bühler/Zimmermann* (1996).

<sup>9</sup> Vgl. dazu *Litterman, R., Scheinkman, J.* (1991b).

Analyse abhängig und von der Höhe der erklärten Variation an der Gesamtvariation, die durch die ersten  $n$  Eigenvektoren erreicht werden. Da die Hauptkomponentenanalyse lediglich ein Eigenwertproblem der linearen Algebra ist, handelt es sich daher nicht um ein Schätzverfahren mit der Möglichkeit einer Fehlspezifikation. Spezifikationstests erübrigen sich deshalb.<sup>10</sup> Die Hauptkomponentenanalyse dient zum Erkennen der wesentlichen Struktur der Merkmale. Die Zuordnung der Hauptkomponenten auf ökonomisch plausible Faktoren stellt das eigentlich schwierige Unterfangen der Hauptkomponentenanalyse dar. Bei der linearen Regression werden die exogenen Variablen vom Anwender bzw. von der Modellspezifikation vorgegeben. Die exogenen Variablen sollen die endogenen Variablen (Renditen bzw. Spot-Rates) bestmöglichst erklären. Die Hauptkomponente bildet lediglich die  $n$  endogenen Variablen auf  $n$  lineare unabhängige Eigenvektoren ab, wobei diese nicht näher spezifiziert sind. Die Zuordnung der Eigenvektoren zu ökonomisch plausiblen Einflußfaktoren obliegt dem Anwender. Daher ist für die Hauptkomponentenanalyse der Zeitraum und die Datenhistorie bedeutend und sollte möglichst repräsentativ gewählt werden.<sup>11</sup>

Die Hauptkomponentenanalyse unterscheidet sich von den in der Finanzwirtschaft entwickelten Zustandsraummodellen<sup>12</sup>, da weder Arbitragefreiheit noch ein ökonomisches Gleichgewicht unterstellt wird.<sup>13</sup> Die Faktormodelle von Vasicek (1977), Cox/Ingersoll/Ross (1985) (CIR-Modell) unterstellen

- eine explizite Annahme der Faktoren,
- daß die Realisation der Kursbewegungen einem geometrischen Brownschen Prozeß unterliegt<sup>14</sup>,
- die ökonomische Eigenschaft der Arbitragefreiheit<sup>15</sup>,
- eine perfekte Korrelation der Renditen der Zinsstrukturkurve für jede Restlaufzeit<sup>16</sup>.

---

<sup>10</sup> Siehe *Appendix*.

<sup>11</sup> Für Zinszeitreihen sollten daher die verwendeten Zeitreihen eine möglichst lange Historie aufweisen, da nur so viele repräsentative Konjunkturzyklen berücksichtigt werden können.

<sup>12</sup> Ein Überblick über die Vielzahl der Faktormodelle findet sich bei Ho, T. (1995).

<sup>13</sup> Vgl. Ball, C. (1996) und Duan, J. (1995).

<sup>14</sup> Eine leicht verständliche Übersicht des Wiener-Prozesses und der Brownschen Bewegung findet sich bei Spremann, K. (1996).

<sup>15</sup> Vgl. Pearson, N. (1994) bzw. Geyer, A. (1996).

<sup>16</sup> Eine Annahme, die inkonsistent zur Realität ist; siehe Longstaff, F. (1992).

Vor allem die letztere Annahme führte auf Grund der restriktiven Voraussetzung zur Entwicklung des Zwei-Faktoren-Modells von *Brennan* und *Schwarz* (1979) und des Gleichgewichtsmodells von *Longstaff/Schwarz* (1992). Das Multifaktorenmodell von *Longstaff/Schwarz* (1992) erklärt das Niveau und die Dynamik der Zinsstrukturkurve anhand der Geldmarktzinssätze und deren Volatilität.

Im vorliegenden Beitrag wird das Zinsprozeßrisiko anhand der Hauptkomponentenanalyse in drei wesentliche Faktoren zerlegt. Es wird daher vorwiegend auf die Identifikation der Risikoquellen des Zinsprozesses und die Implikation auf die Risikomaße abgezielt. Eine Weiterentwicklung der Hauptkomponentenanalyse zu einem Gleichgewichtsmodell würde den Rahmen des Beitrages übersteigen. Die Arbeit unterscheidet sich methodisch von dem Ansatz von *Chen/Scott* (1993), die das Zinsprozeßrisiko anhand eines Kalman-Filters in die einzelnen Faktoren zerlegten.

In der Literatur<sup>17</sup> wird die Bewegung der Zinsstruktur auf drei mögliche Einzelbewegungen zurückgeführt.

1. *Parallelverschiebung oder Niveaufaktor (Shift)*
2. *Drehung oder Neigungsfaktor (Steepness bzw. Tilt)*
3. *Krümmungsfaktor (Curvature)*

Eine Parallelverschiebung der Zinsstrukturkurve kann u. a. auf Grund einer allgemeinen Veränderung der Inflationserwartung der Marktteilnehmer verursacht werden. Die Drehung kann u. a. durch eine unterschiedliche Inflationserwartung für verschiedene zukünftige Zeitpunkte hervorgerufen werden. Dies führt unmittelbar zu einer Veränderung der Risikoprämie zwischen dem langen und dem kurzen Laufzeitsegment.<sup>18</sup>

Mit Hilfe der Hauptkomponentenanalyse kann der Verlauf der Zinsstrukturkurve in nicht beobachtbare Merkmale aufgespalten werden. Diese sind linear unabhängig, so daß eine Veränderung einer Komponente unabhängig von einer anderen ist.

---

<sup>17</sup> Vgl. *Singh*, M. (1995) und *Fabozzi*, F. (1995).

<sup>18</sup> In diesem Beitrag wird jedoch auf eine ökonomische Erklärung über den zeitlichen Verlauf der Zinsstruktur verzichtet, da der Schwerpunkt des Beitrags lediglich auf der Methode bzw. den Implikationen liegt.



### III. Empirische Analyse

Die folgende empirische Analyse<sup>19</sup> basiert auf den geschätzten monatlichen Renditen der BHF-Bank-Subindizes mit einer Restlaufzeit von 1, 3, 5, 7 und 9 Jahren von 1967 bis 1996. Der lange Zeitraum von 29 Jahren ist für die Bestimmung der Hauptkomponenten nötig, da möglichst viele Zinszyklen eine Verzerrung der Ladungsmatrix verhindern und damit erst eine Interpretation ermöglichen. Im Gegensatz zu *Bühler/Zimmermann* (1996) wurden die kurzfristigen Zinssätze mit einer Restlaufzeit von unter einem Jahr (Geldmarkt) nicht verwendet, da sie eine zu starke Eigendynamik aufweisen, so daß diese für die Hauptkomponenten des Kapitalmarktes nicht von Interesse sind. Dies würde gleichfalls zu einer Verzerrung der Ladungen führen und die Möglichkeit einer Interpretation der Faktoren verwischen.<sup>20</sup> So zeigen die Ergebnisse von *Bühler/Zimmermann* (1996), daß die Hinzunahme der kurzfristigen Zinssätze eine klare und eindeutige Interpretation des ersten Faktors erschwert. Aus der Renditestrukturkurve wurden mit Hilfe der iterativen „Bootstrapping“-Methode<sup>21</sup> die jeweiligen Zinssätze für Nullkuponanleihen mit einer Restlaufzeit von 1, 3, 5, 7 und 9 Jahren berechnet. Diese Spotratekurve<sup>22</sup> hat gegenüber der Renditestrukturkurve den Vorteil, daß es nicht zu einer Verzerrung bei der Ermittlung der abdiskontierten Cash-Flows bei nicht zu par notierten Anleihen kommt. Die Ladungsmatrix gibt Aufschluß darüber, inwieweit eine Veränderung der drei Faktoren zu einer Veränderung der Zinsstrukturkurve führt. Die höchste Erklärungskraft wird der ersten Hauptkomponente, die zweithöchste der zweiten usw. zugeordnet. Das Zinsprozeßrisiko kann in drei unabhängige Komponenten zerlegt werden, wobei die ersten drei Hauptkomponenten 99 % der Variation der Bewegung der Spotratekurve erklären. Für die empirische Bestimmung der Ladungsmatrix wurden die Renditen standardisiert, d. h. ihr Mittelwert ist null und die Varianz weist einen Wert von eins auf.

<sup>19</sup> Softwaretechnisch wurde die Hauptkomponentenanalyse und die in Abschnitt IV. beschriebene GARCH-Schätzung mit der Statistiksoftware GAUSS der Firma APTECH Systems (1994) umgesetzt.

<sup>20</sup> Zu ähnlichen Schlußfolgerungen kommen *Singh, M.* (1995) und *Litterman, R.* (1994) für den US-Markt.

<sup>21</sup> Der Begriff „Bootstrapping“ hat nichts mit dem in der Statistik unter gleichem Namen verwendeten Begriff gemein. Dort wird er als Synonym für das Urnenmodell mit Zurücklegen verwendet. Eine ausführliche Darstellung mit Beispielen der „Bootstrapping“-Methode in der Finanzwirtschaft findet sich bei *Kawaller, I., Marshall, J.* (1996).

<sup>22</sup> Weiterführende Darstellung und Berechnung der Spotratekurve mit Beispielen findet sich bei *Fabozzi, R.* (1995) und bei *Ripper* (1997).

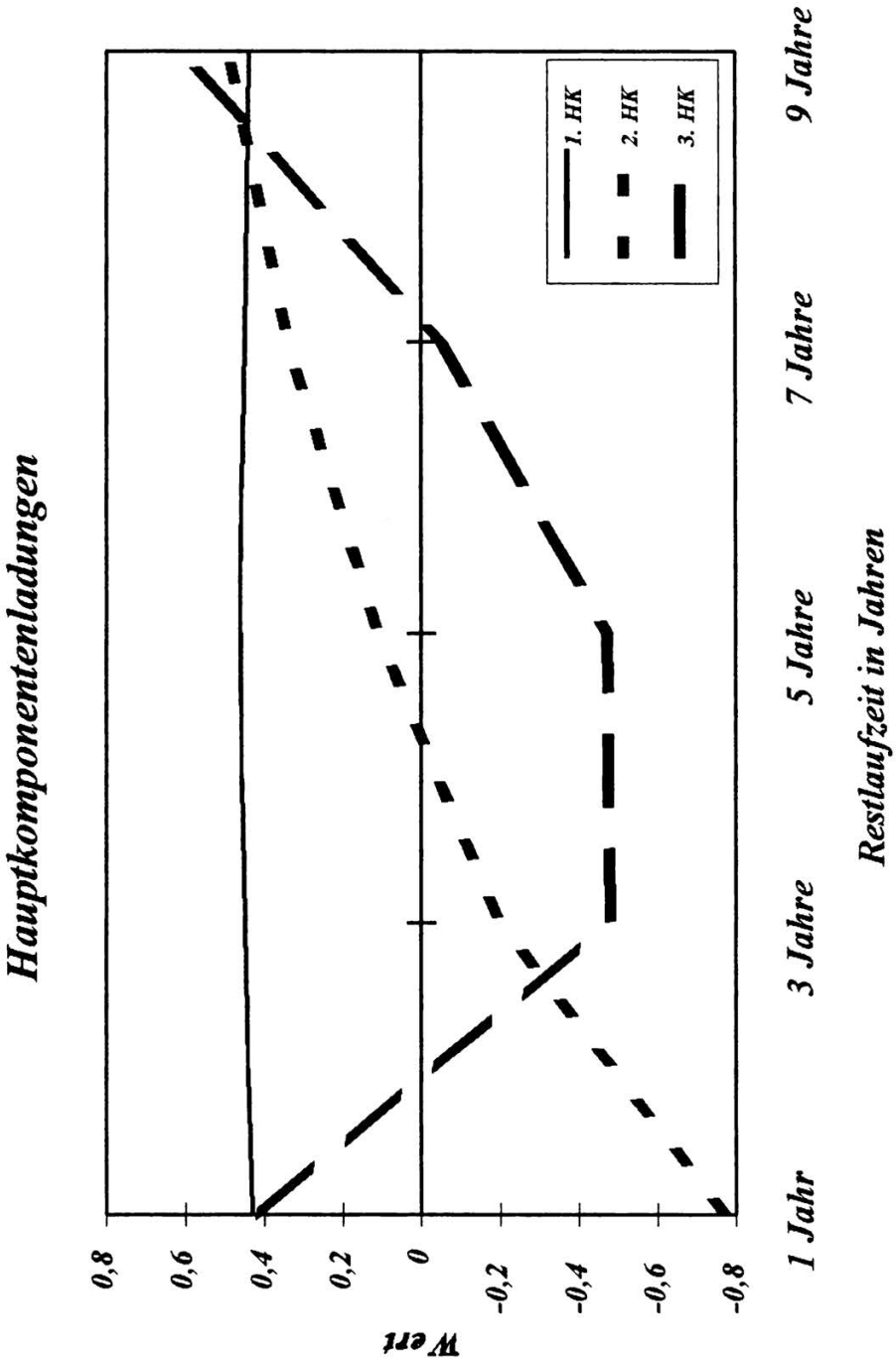


Abb. 4: Verlauf der Ladung

In Abbildung 4 werden die einzelnen Ladungen über die Restlaufzeit der Ladungsmatrix aller drei Hauptkomponenten für den deutschen Markt gezeigt. Die Ladung der ersten Hauptkomponente zeigt einen flachen Verlauf, so daß dieser Faktor auf alle Restlaufzeiten in gleicher Weise wirkt. Die visuelle Inspektion führt daher zu der These, daß die erste Hauptkomponente einer Parallelverschiebung der Zinsstrukturkurve (Niveaufaktor) entspricht. Die zweite Hauptkomponente wirkt unterschiedlich stark auf die einzelnen Laufzeitsegmente und weist eine positive Steigung auf. Eine Veränderung des zweiten Faktors dreht die Spotratekurve – die Spotrates für die langen Laufzeiten steigen, die mit kurzer Restlaufzeit sinken. Da die zweite Hauptkomponente im Zeitablauf negative Werte annimmt, können auch inverse Zinsphasen modelliert werden, so daß mit der zweiten Hauptkomponente die Steilheit der Spotratekurve, d.h. die Neigung erklärt wird. Der „Drehpunkt“ der gesamten Zinsstrukturkurve liegt bei einer Restlaufzeit von ca. 4,5 Jahren, da der Einfluß des Neigungsfaktors für diese Restlaufzeitklasse sehr gering ist. Dies verdeutlicht den überaus wichtigen Einfluß des mittleren Laufzeitsegmentes auf das Zinsprozeßrisiko. Die dritte Hauptkomponente wirkt auf die einzelnen Laufzeitsegmente unterschiedlich und kann aufgrund ihres Verlaufes als Krümmungsfaktor interpretiert werden, d.h., dieser Faktor zeigt, inwieweit die Spotratekurve einen gekrümmten Verlauf hat.

Um obige Thesen zu erhärten, wurden die drei Hauptkomponenten anhand einer Regressionsschätzung näher untersucht. Es wurden zunächst die einzelnen Spotrates standardisiert,<sup>23</sup> d.h., der Erwartungswert ist Null und die Varianz weist einen Wert von eins auf. Um den Niveaufaktor zu identifizieren, wurden die drei Hauptkomponenten jeweils einzeln auf die 5jährige Spotrate mit Hilfe einer OLS-Regression geschätzt, um anhand des Bestimmtheitsmaßes  $R^2$  und der  $t$ -Werte der Regressionskoeffizienten die Hauptkomponenten zuzuordnen. Aus der visuellen Inspektion der Ladungsmatrix ist der Einfluß der Drehung auf die 5jährige Spotrate sehr gering, so daß sich diese als endogene Variable für die OLS-Schätzung zur Identifikation des Zinsniveaus eignet. Um die Drehung zu identifizieren, wurde die endogene Variable aus der Differenz zwischen der 9jährigen und der 1jährigen standardisierten Spotrate gebildet. Dies entspricht dem Zinsspread und kann als Approximation der Steilheit der Spotratekurve dienen. Diese wurde ebenfalls obiger Regressionsmodalität unterzogen. Da die Zeitreihen mittelwertbe-

---

<sup>23</sup> Siehe *Sachs, L.* (1992) pp. 365 ff.

*Zinsen 5 Jahre und die durch die erste Hauptkomponente erklärten 5jährigen Zinsen*

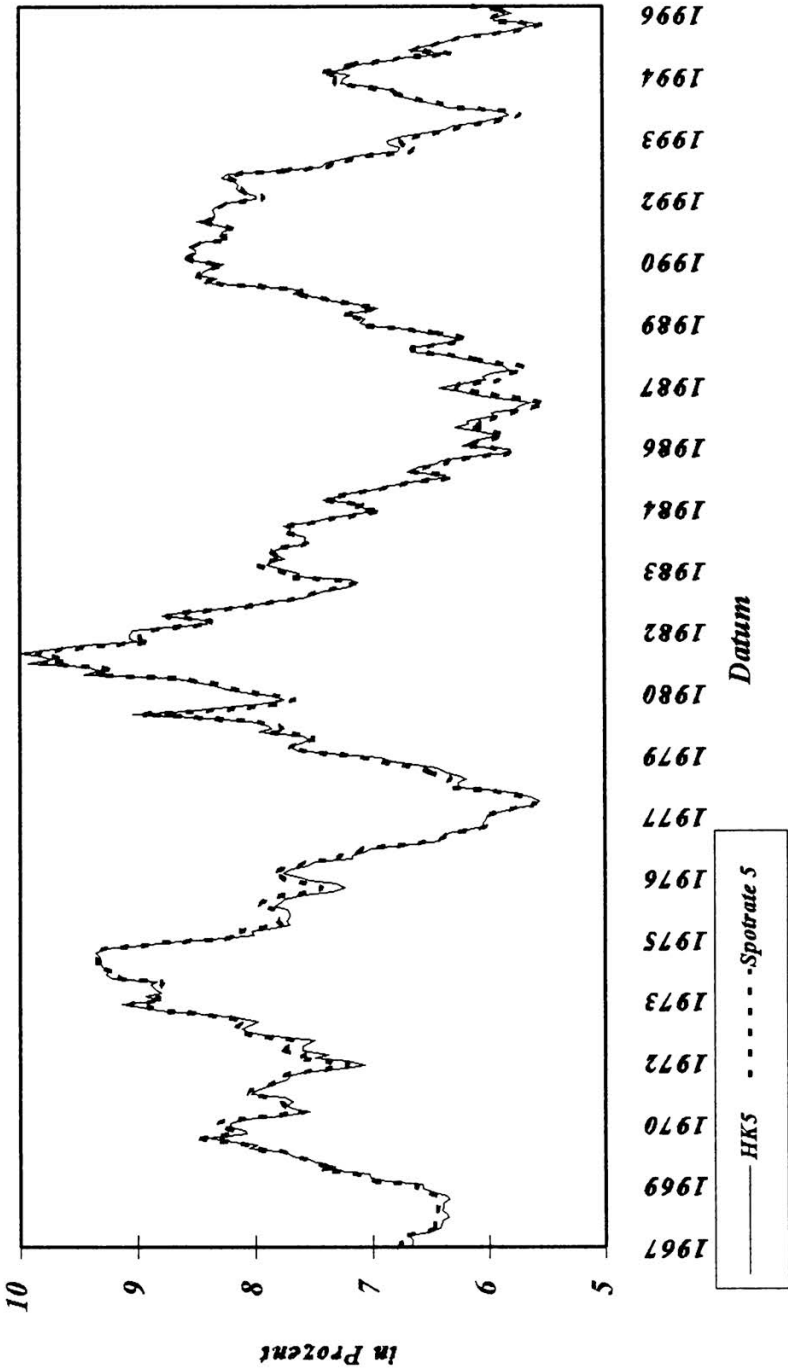


Abb. 5: Erste Hauptkomponente und Spotrate

reingt sind, erfolgte die OLS-Spezifikation<sup>24</sup> ohne eine Konstante. Anhand der Abbildung 6 ist der sehr hohe *t*-Wert von 234 und das hohe *R*<sup>2</sup> für die erste Hauptkomponente, die Niveauelemente, zu erkennen. Die Steilheit der Zinsstrukturkurve wird fast vollständig durch die zweite Hauptkomponente, den Neigungsfaktor, erklärt.

Die dritte Hauptkomponente läßt sich anhand einer OLS-Schätzung nicht unmittelbar identifizieren, da die Krümmung einer Zinsstrukturkurvenbewegung aus den fünf Spotrates nicht eindeutig auf eine einzige endogene Variable abgebildet werden kann. Die Zuordnung kann nur über die Bildung von synthetischen Portfolios, die sensitiv gegenüber der Krümmung der Zinsstrukturkurve sind, abgeleitet werden.<sup>25</sup> In diesem Beitrag wird jedoch dieser Ansatz nicht weiter verfolgt, da die Zuordnung der dritten Hauptkomponente anhand eines GARCH-Prozesses erfolgt.

	erste HK ( <i>t</i> -Wert)	zweite HK ( <i>t</i> -Wert)	dritte HK ( <i>t</i> -Wert)	erste HK ( <i>R</i> <sup>2</sup> )	zweite HK ( <i>R</i> <sup>2</sup> )	dritte HK ( <i>R</i> <sup>2</sup> )
Niveau [ <sup>26</sup> ]	234	0,90	-1,12	0,993	0,002	0,004
Drehung	1,08	217	0,84	0,003	0,993	0,002

Abb. 6: *t*-Statistik und Bestimmtheitsmaß

Die hohe Erklärungskraft der ersten Hauptkomponente wird anhand der Abbildung 5 deutlich. Sie zeigt die Spotratekurve und die anhand der Gleichung (2) berechnete Spotratekurve, die nur mit der ersten Hauptkomponente ermittelt wurde. Der berechnete Verlauf der 5jährigen Spotratekurve weist mit der tatsächlichen 5jährigen Spotrate einen Korrelationskoeffizienten von 0,993 auf, d.h., durch den Niveaufaktor wird die 5jährige Spotrate fast vollständig erklärt.

Die Hauptkomponentenanalyse kann den Zinsprozeß visuell in drei Komponenten<sup>27</sup> zerlegen:

<sup>24</sup> Allgemeine Ausführungen zur OLS-Schätzung finden sich bei *Sachs, L.* (1992).

<sup>25</sup> Dieser Ansatz wird von *Litterman, R., Scheinkman, J.* (1991 a) verfolgt.

<sup>26</sup> Die tabellierten kritischen *t*-Werte für ein Signifikanzniveau von 1 % liegen bei 2,32.

<sup>27</sup> Siehe *Litterman, R., Scheinkman, J.* (1991 a), pp. 58 ff.

- Die erste HK bestimmt das Niveau der Zinsstrukturkurve.
- Die zweite HK beschreibt die Drehung der Zinsstrukturkurve um das mittlere Laufzeitsegment.
- Die dritte HK beschreibt die Krümmung der Zinsstrukturkurve.

Die erklärte Variation für die Niveaubewegung der Zinsstrukturkurve (Abbildung 7) sowie für die monatlichen Veränderungsrate des Spotrates ist für die erste Hauptkomponente, d. h. den Niveaufaktor, mit 96 % bzw. 90 % recht hoch. Die sehr hohe Erklärungskraft der ersten drei Hauptkomponenten der Zinsstrukturkurve verdeutlicht, daß einzelne Laufzeitsegmente kein „Eigenleben“ besitzen, d. h., eine Veränderung des 5jährigen Zinses führt auf Monatsbasis auch zu einer Veränderung der anderen Laufzeitsegmente. Daher können linear unabhängige Zinsverläufe im allgemeinen für eine Risikoanalyse nicht unterstellt werden. Da der „Drehpunkt“ der zweiten HK bei einer Restlaufzeit von ca. 4,5 Jahren liegt, verdeutlicht dies den überaus wichtigen Einfluß der Umlaufrendite mit einer durchschnittlichen Restlaufzeit von ca. 5 Jahren auf das Zinsprozeßrisiko. Dieser Einfluß des mittleren Laufzeitsegmentes auf das Zinsprozeßrisiko spiegelt sich auch in der durchschnittlichen Restlaufzeit der meisten Rentenindizes (BHF-Bank-Rentenmarktindex, JPM-Index usw.) wider. Ordnet man die Variation den einzelnen Laufzeiten zu, so werden diese durch Niveaushiftung weitgehend erklärt. Abbildung 8 faßt die berechneten Bestimmtheitsmaße<sup>28</sup> für die einzelnen Spotrates zusammen, wobei die Werte in Klammern die Bestimmtheitsmaße für die monatlichen Veränderungsrate des Spotrates zeigen. Das Bestimmtheitsmaß des Niveaufaktors an der Bewegung der Spotratekurve liegt – je nach Restlaufzeit – bei 88 % bis 99 %. Das Zinsprozeßrisiko, welches nicht durch die erste Hauptkomponente erklärt wird, nimmt für sehr kurze und sehr lange Restlaufzeiten ab. Für diese gewinnt der Neigungsfaktor zunehmend an Bedeutung. Für Kurzläufer (ein Jahr) und für Langläufer (neun Jahre) besitzt der Krümmungsfaktor noch eine nennenswerte Erklärung.<sup>29</sup>

<sup>28</sup> Zur Berechnung der Bestimmtheitsmaße siehe *Hartung, J. (1991)*.

<sup>29</sup> Für den dänischen Markt zeigte *Dahl, H. (1993)*, daß 99,6 % der Variation durch die ersten drei Faktoren erklärt wird.

*Anteil der erklärten Variation durch die Hauptkomponenten*

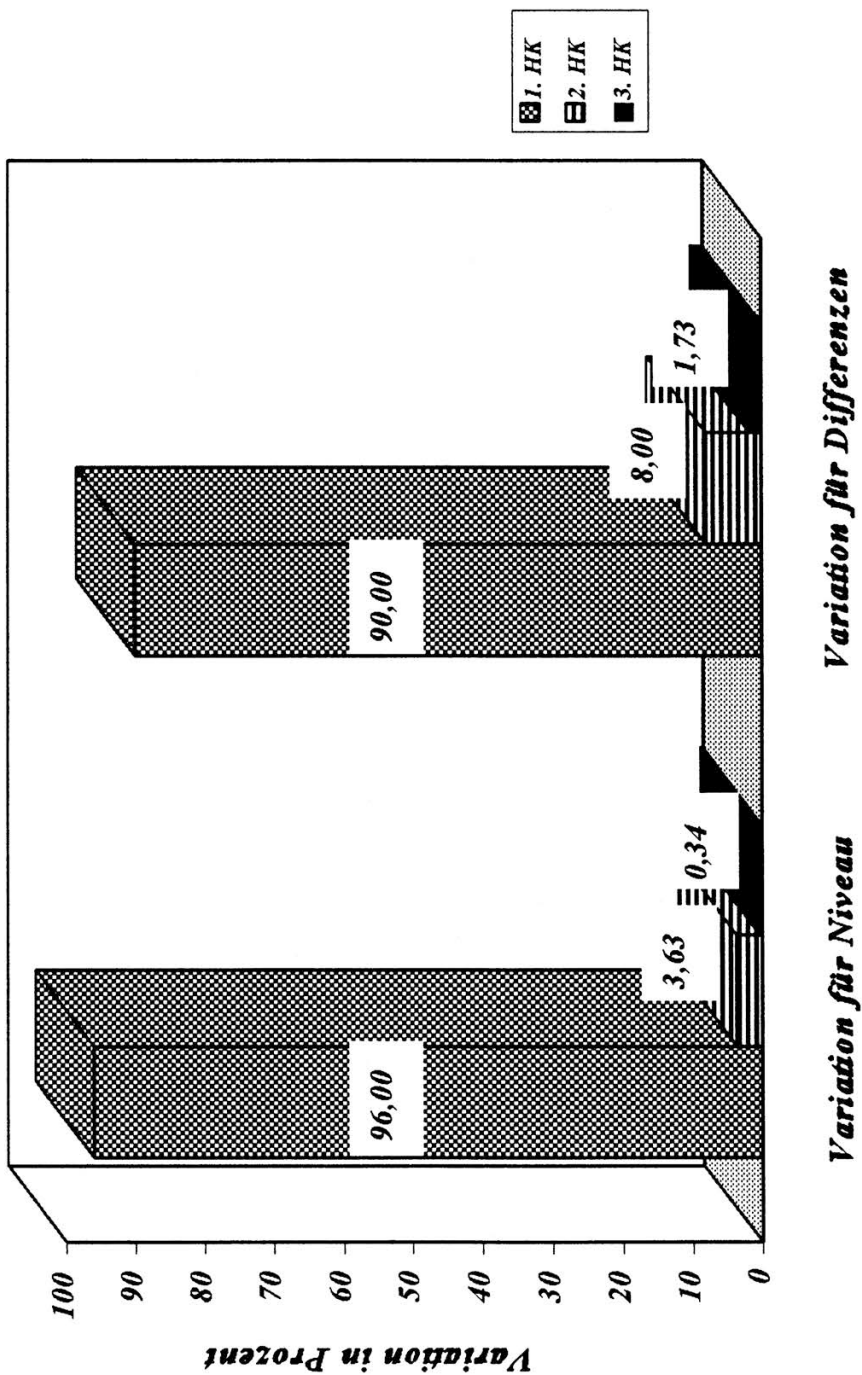


Abb. 7: Variation der Hauptkomponenten

Bestimmtheitsmaße	1 Jahr	3 Jahre	5 Jahre	7 Jahre	9 Jahre
erste HK (Niveaufaktor)	0,889 (0,734)	0,988 (0,961)	0,993 (0,974)	0,978 (0,952)	0,950 (0,879)
erste+ zweite HK (Niveau- u. Neigungsfaktor)	0,996 (0,984)	0,995 (0,978)	0,996 (0,979)	0,999 (0,997)	0,993 (0,966)
erste bis dritte HK (Niveau-, Neigungs-, und Krümmungs- faktor)	0,999 (0,999)	0,999 (0,998)	0,999 (0,998)	0,999 (0,997)	0,999 (0,999)

Abb. 8: Bestimmtheitsmaße für die einzelnen Spotrates sowie die monatlichen Veränderungsraten (Werte in Klammern)

#### IV. Hauptkomponenten und Volatilität

Die einzelnen Faktoren sind nicht direkt am Markt beobachtbar. Es können jedoch Bondportfolios so zusammengestellt werden, daß diese sensitiv bezüglich eines Faktors sind. Durch den Kauf eines Bund-Futures und den durationgewichteten Verkauf von Bundesobligations-Futures kann ein einfaches Portfolio aufgebaut werden, das gegenüber der zweiten HK eine hohe Sensitivität aufweist. Ein Portfolio, welches gegenüber der dritten HK sensitiv ist, kann nicht unmittelbar abgeleitet werden. *Litterman/Scheinkman* (1991a) wiesen für die Bildung eines Optionsportfolios nach, daß für den US-Markt dieses Portfolio eine sehr hohe Sensitivität bezüglich der dritten HK aufweist. Da Optionen gegenüber der Volatilität sensitiv sind, weist die dritte HK für den US-Markt eine hohe Korrelation mit der Volatilität auf. Um diesen Zusammenhang der dritten HK mit der Volatilität aufzuzeigen, wurde in diesem Beitrag für den deutschen Markt ein statistischer Ansatz zur Beschreibung der bedingten Varianz bzw. Volatilität gewählt. Aus zahlreichen empirischen Analysen ist bekannt, daß starke Zinsänderungen nicht isoliert auftreten.<sup>30</sup> Es gibt Tendenzen, daß große Zinsänderungen von weiteren großen Zinsänderungen mit identischen oder umgekehrten Vorzeichen gefolgt werden. Dieser Effekt wird vielfach mit dem Begriff „Volatility Clustering“ bezeichnet.<sup>31</sup> GARCH-Modelle (Generalized Autoregressive Condi-

<sup>30</sup> Vgl. dazu *Litterman, R., Scheinkman, J., Weiss, L.* (1991b).

<sup>31</sup> Vgl. *Engle, R. F.* (1982).



tional Heteroskedasticity)<sup>32</sup> sind geeignet, diese Eigenschaften adäquat zu modellieren. Die Grundgleichung für die bedingte Varianz  $h(t)$  in einem GARCH( $p, q$ )-Modell hat folgende Form:

$$(3) \quad h(t) = \kappa + \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot u(t-i)^2 + \sum_{j=1}^q \delta_j \cdot h(t-j)$$

mit:

$$\kappa > 0; \alpha_i \geq 0; \delta_j \geq 0$$

Die Volatilität ist neben den quadrierten Residuen  $u(t)$  auch von der Volatilität der Vorperiode abhängig. Die Variable  $p$  gibt die Anzahl der verwendeten Lags der Residuen und  $q$  die Anzahl der Lags der Volatilität an. Bei einem GARCH( $p, q$ )-Modell bestimmen die  $\alpha_i$  das Ausmaß der unmittelbaren Reaktion auf neue Marktereignisse (sog. „News“ oder „Volatilitätsschocks“)  $u(t)$  und die  $\delta_j$  beschreiben die Dauer des Abklingens auf die unbedingte Varianz, d.h., der Koeffizient beschreibt das „Gedächtnis“ des GARCH-Prozesses. In zahlreichen empirischen Anwendungen<sup>33</sup> von GARCH-Modellen zeigte sich, daß

- GARCH(1,1)-Modelle zur Modellierung der Varianz ausreichend sind,
- $\delta_j$  deutlich größer als  $\alpha_i$  ist, d.h., das „Marktgedächtnis“ ist bezüglich der Volatilität relativ groß,
- GARCH-Parameter meist hoch signifikant sind.

Anhand der Abbildung 9 sind die Parameter und die Konfidenzintervalle für die GARCH(1,1)-Schätzung der Volatilität der Spotrates des BHF-Bank-Rentenmarktindex von 1967 bis 1996 aufgeführt.

Der bezüglich des  $\alpha$ -Wertes relativ hohe  $\delta$ -Wert zeigt, daß das Abklingverhalten der Volatilität recht lange anhält und die Sensitivität gegenüber neuen Zinsänderungen gering ist. Die Volatilität sinkt im Durchschnitt in 7,4 Monaten auf die Hälfte des Ursprungwertes, d.h., nach dieser Zeit fällt ein Volatilitätsschock auf die Hälfte des ursprünglichen Niveaus ab.<sup>34</sup>

Abbildung 10 zeigt die Korrelation zwischen der berechneten Volatilität des GARCH(1,1)-Prozesses und den drei Hauptkomponenten. Die im

<sup>32</sup> Vgl. dazu *Bollerslev, T. (1986)*, weiterführende Beispiele finden sich bei *Enders, W. (1995)*.

<sup>33</sup> Vgl. *Freisleben, B., Ripper, K. (1996)*, *Freisleben, B., Ripper, K. (1997)* und *Enders, W. (1995)*.

<sup>34</sup>  $\ln(0,5)/(\ln \delta)$  =  $x$ ;  $x$  kann als Halbwertszeit interpretiert werden.

GARCH(1,1)	Koeffizienten	Unteres Konfidenzintervall (95%)	Oberes Konfidenzintervall (95%)
$\kappa$	0,000036	-	-
$\delta$	0,9107	0,7951	0,9626
$\alpha$	0,0373	0,001	0,0892

Abb. 9: Koeffizienten der GARCH(1,1)-Schätzung

Korrelationen	erste Hauptkomp.	zweite Hauptkomp.	dritte Hauptkomp.
Volatilität	0,1078	-0,036	0,5386

Abb. 10: Korrelation zwischen den Hauptkomponenten und der Volatilität

Vergleich hohe Korrelation zwischen der dritten HK und der Volatilität zeigt, daß der Krümmungsfaktor sehr sensitiv gegenüber der Volatilität ist, d. h., ein Optionsportfolio bzw. ein Portfolio bestehend aus Anleihen mit Kündigungsrechten ist sensitiv gegenüber der dritten HK. Ein Portfolio, welches gegenüber der dritten Hauptkomponente eine hohe Sensitivität aufweist, ist daher sehr stark von der Volatilität der Spotrates abhängig.

## V. Hauptkomponenten und Risikomaße

Für das Portfoliomanagement ist das Zinsprozeßrisiko von entscheidender Bedeutung. Für die Risikobegrenzung, d. h. die Reduktion des Marktwerttrisikos, können im Portfoliomanagement Hedge-Strategien verfolgt werden. Das Ziel der Hedge-Strategie im Bondmanagement ist es, die Duration eines Rentenportfolios zu minimieren, um im Idealfall das Marktwertrisiko zu eliminieren. Schon 1938 stellte *Macaulay*<sup>35</sup> ein Konzept vor, mit dessen Hilfe das Zinsänderungsrisiko von zinsabhängigen Wertpapieren erfaßt werden kann. Mathematisch wird die Macaulay-Duration nach Formel (4)<sup>36</sup> berechnet:

<sup>35</sup> Siehe *Macaulay*, F. (1938).

<sup>36</sup> Weiterführende Problematisierung der Durationmaße findet sich bei *Hiel-scher*, U. (1990) und *Ilmanen*, A. (1992).

$$(4) \quad D = \frac{1}{P} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{i \cdot CF(i)}{(1+r(i))^i}$$

mit:  $r(i)$ : konstanter Zinssatz für alle Restlaufzeiten  $i$   
 $CF(i)$ : Cash Flow zum Zeitpunkt  $i$  (Kupon der Anleihe)  
 $P$ : Preis der Anleihe

Die mathematische Maßeinheit der Duration ist Jahre. Die partielle Ableitung des Preises einer Anleihe nach dem Zinssatz, bezogen auf den Marktpreis der Anleihe, ergibt die *Modified Duration*, die die Sensitivität der Anleihe bezüglich einer Zinsänderung angibt.

$$(5) \quad \text{Modified Duration} = -\frac{1}{P} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{i \cdot CF(i)}{(1+r(i))^i (1+r(i))}$$

Je höher die Duration bzw. die Modified Duration eines Portfolios, desto höher ist die Zinssensitivität des Bondportfolios bezüglich des Marktwert- risikos. Die Modified Duration setzt eine horizontale Fristenstruktur der Zinsstrukturkurve voraus.<sup>37</sup> Werden daher in obiger Formel die jeweilige Marktrendite bzw. zur Vermeidung von Verzerrungen für nicht par Bonds die Zero- oder Spotrates für die jeweiligen Restlaufzeiten ersetzt, so erhält man die Fisher-Weil-Duration.<sup>38</sup> Diese Kennziffer gibt die Sensitivität eines Bonds bei einer Parallelverschiebung einer gekrümmten Spot- rate- bzw. Zinsstrukturkurve wieder. Sie ist daher ein Ein-Faktoren-Sensitivitätsmaß. Ein Hedge eines Bonds, der mit Hilfe der Fisher-Weil-Duration erfolgt, ist ein Hedge auf Parallelverschiebung bzw. auf die erste Hauptkomponente. Da die erste HK 96 % bzw. 90 % der Variation der Zinsstrukturkurve erklärt, kann mit der Fisher-Weil-Duration der über- wiegende Anteil des Zinsprozeßrisikos einer Anleihe erfaßt werden. Die Hauptkomponentenanalyse zeigt, daß lediglich die nicht von der ersten Hauptkomponente erklärte Variation von 4 % bzw. 10 % über weiterfüh- rende Risikomaße erfaßt werden kann. Von Ho (1992) ist eine auf dem Durationkonzept basierende Methode entwickelt worden, die zusätzlich diese unerklärte Variation berücksichtigt. Diese Erweiterung der altbe- währten Durationsanalyse, die Key-Rate-Duration<sup>39</sup>, zeichnet sich durch

<sup>37</sup> Weiterführende Problematisierung der Modified Duration findet sich bei Barber, J. (1995) und Chance, D. (1996).

<sup>38</sup> In der Literatur findet man auch den Begriff „Effektive Duration“, siehe Fabozzi, F. (1995) bzw. Dattatreya, R., Fabozzi, F. (1995).

<sup>39</sup> Einige Beispiele zur Berechnung der Key-Rates von Anleihen finden sich bei Bühler, A., Hies, M. (1995) und Leithner, S. (1992).

ihre Einfachheit und die Popularität<sup>40</sup> aus. Es wird lediglich ein zeitlich linear unabhängiger Verlauf der einzelnen Key-Rates unterstellt, d. h., vorbehaltlich aller ökonomischer Plausibilität können sich die einzelnen Key-Rates völlig unabhängig voneinander verändern. Das Konzept trifft daher die Annahme, daß eine Zinsänderung im zeitlichen Mittel für z. B. die 5jährige Spotrate linear unabhängig von der Entwicklung des Zinssatzes für 10jährigen Anleihen ist, so daß von einer Eigendynamik der Key-Rates und somit der Spotrates ausgegangen wird. Somit vernachlässigt dieses Verfahren die Kovarianzen zwischen den einzelnen Restlaufzeiten, so daß die Verwendung ihre Grenzen bei der Ermittlung der Risikostruktur für derivate Produkte, deren Preischarakteristik pfadabhängig ist, erfährt.<sup>41</sup>

Der Ansatz von Ho (1992) verwendet den Term Key-Rate-Duration (KRD), da er die Preisreaktion eines Wertpapiers auf die Änderung von einzelnen Spotrates bestimmter Restlaufzeiten, den Key-Rates, untersucht. Die Key-Rate-Duration kann man formal aus der Fisher-Weil-Duration entwickeln, denn sie stellt eine lineare Dekomposition dieser dar.<sup>42</sup> In der Fisher-Weil-Duration werden die einzelnen Key-Rates aufsummiert, so daß die Summe aller Key-Rates wieder eine Parallelverschiebung der Zinsstrukturkurve abbildet.<sup>43</sup> Die einzelnen Key-Rates können anhand der Formel (6) ermittelt werden:

$$(6) \quad KRD(i) = \frac{\partial P}{\partial r(i)} = \frac{1}{P \cdot (1 + r(i))} \cdot \frac{i \cdot CF(i)}{(1 + r(i))^i}$$

mit:  $r(i)$ : Spotrates für die Laufzeit  $i$   
 $CF(i)$ : Cash Flow zum Zeitpunkt  $i$  (Kupon)  
 $P$ : Preis der Anleihe

Die jeweiligen Key-Rates  $KRD(i)$  stellen eine Punkt Elastizität bezüglich einer Spotrate dar. In diesem Sinne ist die Key-Rate-Duration ein  $n$ -Faktoren-Modell. Zwischen den einzelnen Key-Rates wird ein linearer Verlauf der Spot-Rate-Kurve angenommen, so daß eine Zinszahlung einer Anleihe, deren Zeitpunkt zwischen zwei benachbarten Key-Rates liegt, anteilsmäßig auf diese aufgeteilt wird. Die Preisänderung  $\Delta P$  einer Anleihe bestimmt sich zu:

<sup>40</sup> Vgl. Golub, W., Tilman, M. (1997).

<sup>41</sup> Vgl. Golub, W., Tilman, M. (1997).

<sup>42</sup> Vgl. dazu Ho, T. (1992), pp. 37 ff.

<sup>43</sup> Vgl. Bühler, A. (1994).

$$(7) \quad \Delta P = - \sum_{i=1}^N KRD(i) \Delta r(i)$$

mit:  $\Delta r(i)$ : unterstellte Spotrateänderung für die Laufzeit  $i$   
 $\Delta P$ : relative Preisveränderung der Anleihe

Werden für die einzelnen Key-Rates jeweils unterschiedliche Spotrateänderungen unterstellt, d.h.  $\Delta r(i) \neq \Delta r(i - 1)$ , so weicht die Summe der Key-Rates von der Fisher-Weil-Duration ab. Die Key-Rates, die nicht mit der Fälligkeit der Anleihe zusammenfallen, nehmen mit abnehmenden Kupons überproportional ab. Je geringer der Kupon einer Anleihe, desto geringer leistet das Key-Rate-Konzept einen signifikanten Erklärungsbeitrag, der über dem der Fisher-Weil-Duration liegt. In der praktischen Bewertung von nicht kündbaren Bondportfolios besteht daher ein Trade-off zwischen den höheren Kosten der Implementierung des Key-Rate- und des traditionellen Fisher-Weil-Konzeptes.

Die Veränderung der  $i$ -ten Key-Rate führt zu einer Unstetigkeit in der Spotratekurve, so daß diese an dieser Stelle nicht differenzierbar ist. Bei der Berechnung der Forward-Rate-Kurve<sup>44</sup> führt dies ebenfalls zu Unstetigkeit, und es kann zu ökonomisch nicht plausiblen negativen Forward-Rates führen. Daher kann die Risikoeigenschaft derivater Produkte, deren Preisermittlung auf Forward-Rates beruht, nicht unmittelbar mit Key-Rates erfolgen.<sup>45</sup> Anhand der Abbildung 11 wird dies deutlich. Die 7jährige Key-Rate wurde um 1% verändert. Die sich daraus ergebende Forward-Rate-Kurve für eine Restlaufzeit von einem Jahr weist Unstetigkeitsstellen mit zum Teil negativer Steigung (Bereich zwischen 6 und 7 Jahren) auf.

Bei Portfolios, die eine sehr starke Häufung auf einzelne Laufzeitsegmente aufweisen, z.B. Barbell-Portfolios<sup>46</sup>, hat das Key-Rate-Profil einen erhöhten Erklärungsbeitrag gegenüber der traditionellen Fisher-Weil-Duration. Wie Ho (1992) bereits zeigte, liegt die „Stärke“ der *KRDs* bei derivativen Produkten (Swaps, Calls und Caps usw.). Da die Key-Rate-Duration aus dem ersten Term einer Taylorreihenentwicklung<sup>47</sup> der Barwertformel einer Anleihe abgeleitet werden kann, stellt sie daher ein lineares Risikomaß dar. Für Optionen, deren Risikostruktur im Gegensatz zu Anleihen erhebliche nichtlineare Strukturen auf-

<sup>44</sup> Siehe Ripper, K. (1997).

<sup>45</sup> Vgl. Golub, B. W., Tilman, L. (1997).

<sup>46</sup> Portfolios bestehend aus kurz- und langlaufenden Anleihen.

<sup>47</sup> Siehe Ho, T. (1996).

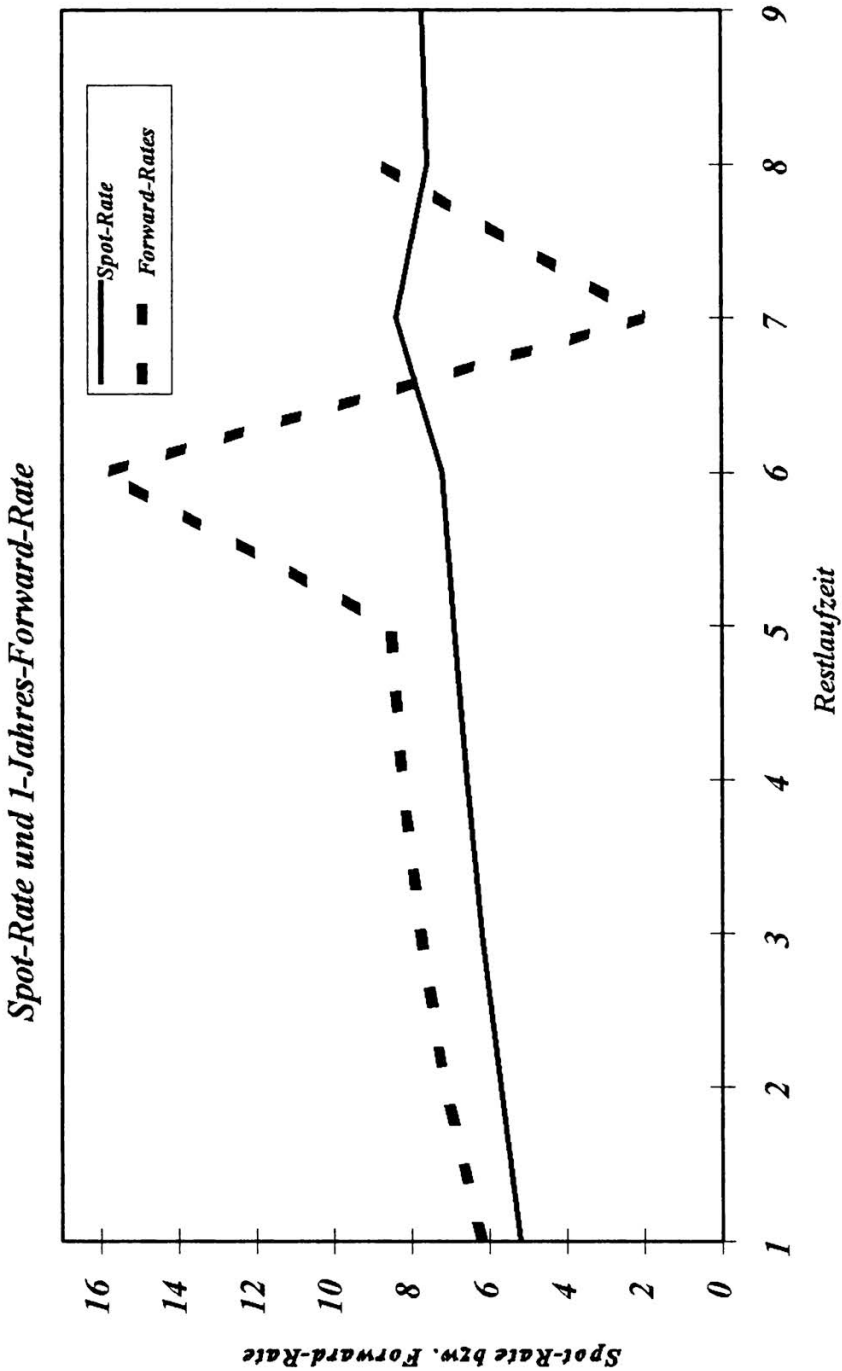


Abb. 11: Spot-Rate und Forward-Rate

weist<sup>48</sup>, kann das konvexe Preisverhalten nicht mehr vernachlässigt werden. Der zweite Term der Taylorreihenentwicklung mißt diese Nichtlinearität, d.h. die Konvexität. Ho (1996) entwickelte daher analog zur *KRD* die Key-Rate-Konvexität (KRK).<sup>49</sup>

Das Key-Rate-Konzept unterstellt linear unabhängige Spotrateränderungen. Da die Hauptkomponentenanalyse die Bewegung der Zinsstrukturkurve in drei unabhängige Faktoren unterteilt, stellt eine Unterteilung der Spotrates in  $n$  Key-Rates für  $n > 3$  im statistischen Sinne ein überspezifiziertes Modell dar. Die einzelnen Key-Rates können nicht mehr linear unabhängig sein. Um die Kovarianzen mit der Key-Rate-Duration zu verbinden, entwickelte *Falkenstein* (1996) den Kovarianz-Key-Rate-Hedge. Mit Hilfe einer OLS-Schätzung wird ein Hedge-Vektor geschätzt, so daß auch nichtlineare Zinsstrukturkurvenänderungen berücksichtigt werden können. Die von *Falkenstein* (1996) entwickelte Kovarianz-Key-Rate-Hedge reduziert die Dimension a priori nicht, da der aus der OLS-Schätzung ermittelte Hedge-Vektor abhängig von der Anzahl der verwendeten Hedge-Instrumente ist. Dieser kann daher weiterhin überspezifiziert sein. In der Praxis wird jedoch mit zwei bzw. drei derivaten Hedge-Instrumenten gearbeitet, so daß sich das  $n$ -Faktoren-Modell der Key-Rates in der Praxis auf ein Zwei- bzw. Drei-Faktoren-Modell reduziert.

Die Key-Rate-Duration und die Hauptkomponenten können jedoch so zusammengefaßt werden, daß eine linear unabhängige Niveau-, Neigungs- und Krümmungsduration bestimmt werden kann. Die Multiplikation des Key-Rate-Vektors mit der Ladungsmatrix ergibt drei Durationmaße:

$$(8) \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = ((KRD)^T \cdot L)^T$$

mit:  $(KRD)^T$ : transponierter Key-Rate-Vektor  
 $L$ : Ladungsmatrix

wobei  $D_1$  die Niveau-,  $D_2$  die Neigungs- und  $D_3$  die Krümmungsduration darstellt. Dabei müssen die zur Hauptkomponentenanalyse verwendeten Spotrates  $r(i)$  mit denen der Key-Rates  $KRD(i)$  übereinstimmen. Diese

<sup>48</sup> Für Anleihen mit einer sehr langen Restlaufzeit können diese Nichtlinearitäten nicht mehr vernachlässigt werden.

<sup>49</sup> Berechnungsbeispiele der KRK anhand eines Cap finden sich bei Ho, T. (1996).

linear unabhängigen Risikokennziffern leiten sich aus der historischen Spotratekurve ab und sind daher sensitiv gegenüber

- der Datenqualität,
- der Samplegröße, d. h. der Datenhistorie,
- der zeitlichen Stabilität der Varianz-Kovarianz bzw. der Korrelationsmatrix der Hauptkomponentenanalyse.<sup>50</sup>

Weisen die Märkte starke zeitliche Schwankungen der Korrelationsmatrix auf, so unterliegt die Ladungsmatrix starken Schwankungen, da die Korrelationsmatrix der Hauptkomponentenanalyse nur eine historische Korrelationsmatrix darstellt. Die Risikokennziffern spiegeln daher nicht vollständig das aktuelle Zinsprozeßrisiko wider. Werden die Varianzen jedoch mit einem GARCH-Prozeß und die Korrelationen mit einem bivariaten-GARCH-Prozeß zeitnah modelliert<sup>51</sup>, so kann das aktuelle Zinsprozeßrisiko zeitpunktgetreu erfaßt werden.

## VI. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde anhand der Hauptkomponentenanalyse gezeigt, daß das Zinsprozeßrisiko am Kapitalmarkt für Deutschland auf drei latente Faktoren zurückgeführt werden kann. Die höchste Variation zeigt der Niveaufaktor, mit weitem Abstand gefolgt von dem Neigungs- und dem Krümmungsfaktor. Letzterer weist eine hohe Korrelation mit der Volatilität auf, so daß ein Portfolio bestehend aus Anleihen mit Optionsrechten bzw. Optionen bezüglich der dritten HK sensitiv ist. Neben der Fisher-Weil-Duration – einem Ein-Faktoren-Sensitivitätsmaß – kann das Zinsprozeßrisiko für ein Bondportfolio mit der Key-Rate-Duration (*KRD*) genauer erfaßt werden. Die Key-Rate-Duration ist ein *n*-Faktoren-Sensitivitätsmaß, wobei bei einer zu großen Wahl des Freiheitsgrades *n* das Konzept im statistischen Sinne überspezifiziert ist, da, wie die Ergebnisse der Hauptkomponentenanalyse zeigen, *n* Key-Rates nicht mehr linear unabhängig voneinander sein können. Die Gegenüberstellung der *KRD* mit der Fisher-Weil-Duration legt den Schluß nahe,

<sup>50</sup> In einer empirischen Analyse zeigte *Falkenstein* (1997) für den US-Markt, daß ein Hedge mit Hilfe der Hauptkomponentenanalyse ähnlich gute Ergebnisse wie die Kovarianz-Key-Rate-Hedge liefert. Lediglich bei der Verwendung der dritten HK verschlechterten sich die Ergebnisse zu Gunsten der Kovarianz-Key-Rate-Hedge. Die Autoren führen dies auf die zeitliche Instabilität der dritten HK zurück. Siehe *Falkenstein*, E. (1997) pp. 89 ff.

<sup>51</sup> Zu bivariaten GARCH vgl. *Zagst*, R., *Hermann*, F., *Schmid*, W. (1996).



daß ein Einsatz der insgesamt aufwendiger zu ermittelnden *KRD* nur dann vielversprechend ist, wenn die Fisher-Weil-Duration an ihre Grenzen stößt, d.h. bei Portfolios, die zum überwiegenden Teil aus Zinsderivaten bestehen, bzw. wenn die gesamte Variation der Zinsstrukturkurve erfaßt werden soll. Für eine praxisnahe Portfolioanalyse im Rentenmanagement eignet sich die Niveau-, Neigungs- und Krümmungsduration, die das gesamte Zinsprozeßrisiko auf nur drei unabhängige Faktoren reduziert.

Es gibt mehrere Ansatzpunkte für zukünftige Arbeiten. Von Interesse wäre ein empirischer Vergleich über die Güte eines Hedges mit Hilfe der Hauptkomponentenduration und dem Kovarianz-Key-Rate-Ansatz. Ferner können die Hauptkomponenten als Faktoren eines Drei-Faktorengleichgewichtsmodells (CIR-Modell) dienen. *Singh* (1995) entwickelte ein CIR-Mehrfaktorenmodell basierend auf drei Hauptkomponenten für den US-Markt. Es zeigte sich jedoch für den US-Markt eine erhebliche Abweichung zwischen der geschätzten Volatilität und der historischen Volatilität. Der Autor führte dies auf die zeitliche Instabilität der geschätzten Parameter zurück. Daher kann beispielsweise die Varianz-Kovarianzmatrix der Hauptkomponentenanalyse mit einem bivariaten GARCH-Prozeß zeitnah modelliert werden.

## Appendix

Bei der Hauptkomponentenanalyse kann man von einer numerischen Hauptachsentransformation sprechen. Die Kovarianzmatrix  $A$  der zu erklärenden Größen wird in der Hauptkomponentenanalyse in ihre linear unabhängigen Hauptkomponenten zerlegt. Dazu werden die Eigenwerte der quadratischen Kovarianzmatrix  $A$  benötigt. Diese lassen sich bestimmen aus den Nullstellen des Polynoms  $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix ist und  $\lambda$  der Vektor der Eigenwerte. Aufgrund des Fundamentalsatzes der linearen Algebra<sup>52</sup> existieren zu der  $n \times n$  Kovarianzmatrix genau  $n$  Eigenwerte  $\lambda_i$  mit  $i = 1, 2 \dots n$  und  $n$  Eigenvektoren  $L_1, L_2, \dots L_n$ . Die Eigenvektoren zu jedem Eigenwert ergeben sich als Lösungsvektoren des linearen Gleichungssystems  $AL_n = \lambda_n L_n$ .<sup>53</sup> Da die Hauptkomponentenanalyse kein ökonometrisches Schätzverfahren ist, sondern lediglich eine algebraische Lösung eines Gleichungssystems darstellt<sup>54</sup>, ergeben sich bezüglich der Eigenwerte eindeutige Lösungen. Damit erübrigen sich die in der Ökonometrie verwen-

<sup>52</sup> Siehe *Küster, U., Armingier, G.* (1989).

<sup>53</sup> Siehe *Bronstein, Semendjajew* (1987).

<sup>54</sup> Siehe *Bronstein, Semendjajew* (1987).

deten Spezifikationstests. Die Extraktion der Hauptkomponenten ist daher fest determiniert.

### Literatur

- APTECH Systems (1994) Inc. GAUSS Handbook Vol. I & II. – *Ball, C. A., Torous, W. N.* (1996): „On Unit Roots and the Estimation of Interest Rate Dynamics“, *Journal of Empirical Finance* 3, pp. 215 - 238. – *Barber, J.* (1995): „A Note on Approximating Bond Price Sensitivity using Duration and Convexity“, *The Journal of Fixed Income*, March 1995, pp. 95 - 98. – *Barber, J.* (1996): „Immunitization Using Principal Component Analysis“, *The Journal of Portfolio Management*, Fall 1996, pp. 99 - 105. – *Bollerslev, T.* (1986): „Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity“, *Journal of Econometrics*, Vol. 31., No. 3, pp. 307 - 327. – *Brennan, M., Schwarz, E.* (1979): „A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds“, *Journal of Banking and Finance*, 1979, pp. 133 - 155. – *Bühler, A., Hies, M.* (1995): „Zinsrisiken und Key-Rate-Duration“, *Die Bank*, 2/95, pp. 112 - 118. – *Bühler, A.* (1994): „Bewertung, Preischarakteristika und Risikomanagement von zinsderivativen Wertpapieren im Rahmen eines Einfaktorenmodelles“, *Finanzmarkt und Portfolio Management*, Nr. 4. pp. 468 - 498. – *Bühler, A., Zimmermann, H.* (1996): „A Statistical Analysis of the Term Structure of Interest Rates in Switzerland and Germany“, *The Journal of Fixed Income*, Dezember 1996, pp. 55 - 67. – *Chance, D., Jordan, J.* (1996): „Duration, Convexity and Time as Components of Bond Returns“, *The Journal of Fixed Income*, September 1996, pp. 88 - 96. – *Bronstein, Semendjajew* (1987): „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Harri Deutsch und Thun, 23. Aufl. – *Chen, R., Scott, L.* (1993): „Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Test from a Kalman Filter Model“. Working Paper, University of Georgia, 1993. – *Cox, J., Ingersoll, J., Ross, St.* (1985): „A Theory of the Term Structure of Interest Rates“, *Econometrica*, Vol. 53 No. 2, March 1985, pp. 385 - 407. – *Dahl, H.* (1993): „A Flexible Approach to Interest Rate Risk Management“, In S. A. Zenios, (ed.): *Financial Optimization*, Cambridge University Press, pp. 189 - 209. – *Dattatreya, R., Fabozzi, F.* (1995): „The Risk-Point Method for Measuring and Controlling Yield Curve Risk“, *Financial Analyst Journal*, July/August 1995, pp. 45 - 54. – *Duan, J., Simonato, J.* (1995): „Estimating and Testing Exponential-Affine Term Structure Models by Kalman Filter, Working Paper, University of Montreal. – *Enders, W.* (1995): „Applied Econometric Time Series“, John Wiley & Sons. – *Engle, R. F.* (1982): „Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation“, *Econometrica* 50, No. 4 pp. 987 - 1007. – *Fabozzi, F.* (1995): „Valuation of Fixed Income Securities and Derivatives“, Fabozzi Associates Publisher; New Hope. – *Falkenstein, E., Hanweck, JR.* (1996): „Minimizing Basis Risk from Non-Parallel Shifts in the Yield Curve“, *The Journal of Fixed Income*, June 1996, pp. 60- 68. – *Falkenstein, E., Hanweck, JR.* (1997): „Minimizing Basis Risk from Non-Parallel Shifts in the Yield Curve Part II: Principal Components“, *The Journal of Fixed Income*, June 1997, pp. 85- 90. – *Freisleben, B., Ripper, K.* (1996): „Ein neuronales Netz zur nichtlinearen Volatilitätsschätzung“, In: *Proceedings of the 1996 Symposium on Operations Research*, Braunschweig, Springer-Verlag, pp. 433 - 438. – *Freisleben, B., Ripper, K.* (1997): „Volatility Estimation with a

Neural Network“, Proc. of the 1997 IEEE/IAFE International Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering, New York, IEEE Press, 1997, pp. 177 - 181. – Geyer, A., Pichler, S. (1996): „A State-Space Approach to Estimate and Test Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure,“ Working Paper, Wirtschaftsuniversität Wien. – Golub, B. W., Tilman, L. M. (1997): „Measuring Yield Curve Risk Using Principal Components Analysis, Value at Risk, and Key Rate Durations“, The Journal of Portfolio Management, Summer 1997, pp. 72 - 84. – Hartung, J. (1991): „Statistik“, Oldenbourg-Verlag. – Härdle, W., Klinke, M., Turlach, G. (1995): „Xplore: An Interactive Statistical Computing Environment“, Springer-Verlag, Berlin. – Hielscher, U. (1990): „Investmentanalyse“, Oldenbourg-Verlag. – Ho, T. (1992): „Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risk“, Journal of Fixed Income, Sept. pp. 29 - 44. – Ho, T. (1995): „Evolution of Interest Rate Models: A Comparison“, The Journal of Derivatives, Summer 1995, pp. 9 - 20. – Ho, T., Chen, M., Eng, F. (1996): „VAR Analytics: Portfolio Structure, Key Rate Convexities, and VAR Betas“, The Journal of Portfolio Management, Fall 1996, pp. 89 - 97. – Ilmanen, A. (1992): „How Well Does Duration Measure Interest Rate Risk?“, The Journal of Fixed Income, March 1992, pp. 43 - 51. – Kawaller, I., Marshall, J. (1996): „Deriving Zero-Coupon Rates: Alternatives to Orthodoxy“, Financial Analyst Journal, May/June 1996, pp. 51 - 55. – Küster, U., Armingier, G. (1989): „Programmieren in GAUSS“, Verlag Gustav Fischer, Stuttgart. – Leithner, S. (1992): „Valuation and Risk Management of Interest Rate Derivative Securities“, Verlag Paul Haupt, Bern, Stuttgart, Wien. – Litterman, R., Scheinkman, J. (1991a): „Common Factors Affecting Bond Returns“, Journal of Fixed Income, June 1991, pp. 54 - 61. – Litterman, R., Scheinkman, J., Weiss, L. (1991b): „Volatility and the Yield Curve“, The Journal of Fixed Income, June 1991, pp. 49 - 53. – Litterman, R., Scheinkman, J., Knez, P. (1994): „Explorations Into Factors Explaining Money Market Returns“, The Journal of Finance, Vol. XLIX, No. 5 December, pp. 1861 - 1883. – Longstaff, F., Schwarz, E. (1992): „Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model“, The Journal of Finance, September 1992, pp. 1259 - 1282. – Macaulay, F. (1938): „Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856“, Columbia University Press, New York. – Pearson, N. D., Sun, T. S. (1994): „Exploiting the Conditional Density in Estimation the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll and Ross Model“, Journal of Finance 49, 1994, No. 4, pp. 1279 - 1304. – Ripper, K. (1997): „Zinsprognosen mit Forward Rates“, Optionsscheinmagazin, Februar 1997, pp. 68 - 69. – Sachs, L. (1992): „Angewandte Statistik“, 7. Aufl., Springer-Verlag. – Singh, M. (1995): „Estimation of Multifactor Cox, Ingersoll, and Ross Term Structure Model: Evidence on Volatility Structure and Parameter Stability“, The Journal of Fixed Income, Vol. 5 Nr. 2, September 1995, pp. 8 - 28. – Spremann, K., Winhart, St. (1996): „Random Walk – Wiener-Prozess und Brownsche Bewegung“, Schweizer Bank, 1996, pp. 64 - 67. – Vasicek, O. (1977): „An Equilibrium Characterization of the Term Structure“, Journal of Financial Economics, No. 5 1977, pp. 177 - 188. – Wertschulte, J., Meyer, T. (1985): „Performance- und Marktsegmentindizes des BHF-Bank-Rentenmarktindex-Konzeptes“, Die Bank (Sonderdruck April 1985), Nr. 4. – Zagst, R., Hermann, F., Schmid, W. (1996): „Univariate und Bivariate GARCH-Modelle zur Schätzung des Beta-Faktors“, Finanzmarkt und Portfolio Management, Nr. 1, pp. 45 - 51.

## **Zusammenfassung**

### **Statistische Analyse des Zinsprozeßrisikos von Anleihen und zinsderivativen Wertpapieren**

In diesem Beitrag wird das Zinsprozeßrisiko von festverzinslichen Anleihen und zinsderivativen Wertpapieren untersucht. Anhand der Hauptkomponentenanalyse wird für den deutschen Kapitalmarkt gezeigt, daß sich die Risikokomponente eines Rentenportfolios auf drei wesentliche Faktoren zurückführen läßt. Die Ergebnisse der Hauptkomponentenanalyse werden in Bezug zu herkömmlichen Risikokennziffern gesetzt. Hierbei wird deutlich, daß die Fisher-Weil-Duration als Risikokennziffer für die meisten Rentenportfolios ausreichend ist. Lediglich bei Portfolios, die zum Teil aus zinsderivativen Produkten bestehen, ist der Einsatz der aufwendiger zu ermittelnden Key-Rate-Duration gerechtfertigt. (JEL G11)

## **Summary**

### **Statistical Analysis of the Interest Process Risk and of Interest-Based Derivative Securities**

This contribution analyses the interest process risk pertaining to fixed-interest-bearing loans and to interest-based derivative securities. On the basis of an analysis of main components, it shows for the German capital market that the risk component involved in portfolios of fixed-interest-bearing securities can be traced back to three major factors. The results of the analysis of main-components are related to ordinary risk indicators. It turns out that the Fisher-Weil-duration suffices as risk indicator for most portfolios of fixed-interest-bearing securities. Only where portfolios consist of interest-based products for the most part is the use of the more costly key-rate-duration justified.

## **Résumé**

### **Analyse statistique du risque des taux d'intérêt de prêts et de produits dérivés**

Cet article analyse le risque des taux d'intérêt de titres d'emprunt à taux fixes et de produits dérivés. A l'aide de l'analyse des composantes principales, l'auteur montre que, pour le marché allemand des capitaux, les composantes de risque d'un portefeuille de rentes s'explique par trois facteurs principaux. Les résultats de l'analyse des composantes principales sont mis en rapport avec les indices traditionnels de risque. Il est montré que la durée de Fisher-Weil comme indice de risque est suffisant pour la plupart des portefeuilles de rentes. L'utilisation de la durée Key-rate, qui est longue à déterminer, se justifie seulement pour des portefeuilles qui se composent en partie de produits dérivés.

Kredit und Kapital 2/1998