

## **Prognose von Zinsvolatilitäten mit Regime-Switching-Modellen: Eine empirische Analyse des Euro-DM-Geldmarktes**

Von Ralf Ahrens\*, Gießen

### **I. Einleitung**

Ungeachtet ihrer oftmals im nachhinein festgestellten geringen Treffsicherheit werden Prognosen über die künftige Zinsentwicklung insbesondere im Kapitalanlagebereich als eine unverzichtbare Entscheidungsgrundlage angesehen. Der Prognose des künftigen Zinsniveaus bzw. der korrespondierenden Zinsänderung kommt dabei eine traditionell große Bedeutung zu. Hingegen war die Volatilität von Zinssätzen lange Zeit von eher untergeordnetem Interesse für Finanz- und Zeitreihenanalysten. Sie wurde zumeist als historische Volatilität in Form der Standardabweichung der jeweils betrachteten Zeitreihe berechnet. Neben einem allgemein konstatierten Anstieg des Ausmaßes von Preis- und Renditeschwankungen auf spekulativen Märkten hat in den zurückliegenden fünfzehn Jahren vor allem die zunehmende Verwendung von Derivaten dazu beigetragen, daß der empirischen Analyse und Prognose von Finanzmarktvolatilitäten eine inzwischen erhöhte Aufmerksamkeit zuteil wird. Begünstigt wurde diese Entwicklung durch die Bereitstellung und Popularisierung von Verfahren, welche eine elegante zeitreihenanalytische Modellierung stochastischer Volatilitäten ermöglichen und darüber hinaus mit einem relativ geringen Aufwand implementiert werden können. In diesem Kontext sind vor allem die der ARCH-Familie (*Engle* (1982), *Bollerslev* (1986)) zurechenbaren Modelle zu nennen, die sich gemäß einer mittlerweile kaum noch überschaubaren Anzahl empirischer Studien sehr gut eignen, die Eigenschaften von Volatilitäten insbesondere auf Aktien- und Devisenmärkten zu erfassen.<sup>1</sup>

---

\* Für wertvolle Hinweise zu einer früheren Version dieses Beitrags danke ich Martin T. Bohl und Wolfgang Gohout sowie einem anonymen Gutachter.

<sup>1</sup> Eine umfassende Darstellung theoretischer Aspekte der ARCH-(Autoregressive Conditional Heteroskedasticity-)Modellierung sowie empirischer Volatilitäts-

Im Gegensatz zur Volatilitätsanalyse von Aktien- und Wechselkursrenditen sind bei der Modellierung von Zinsvolatilitäten zumindest zwei wesentliche Besonderheiten zu berücksichtigen, welche die Adäquanz herkömmlicher ARCH-Modelle in Frage stellen und dabei gleichzeitig auf alternative Spezifikationsmöglichkeiten der stochastischen Volatilität hinweisen. Zum einen läßt sich häufig feststellen, daß die bedingten Varianzen von Zinsänderungen eine außerordentlich hohe Persistenz aufweisen (*Engle, Lilien und Robbins* (1987), *Engle, Ng und Rothschild* (1990)). Als Ursache hierfür konnten *Lamoureux und Lastrapes* (1990) Strukturbrüche in der unbedingten Varianz identifizieren, deren Vernachlässigung in ARCH-Modellen zu einer Überschätzung des „Volatility-Clustering“ und damit der ARCH-Parameter führt. Vor diesem Hintergrund wurden die gegen Ende der achtziger Jahre formulierten Markov-Switching-Modelle (*Hamilton* (1988, 1989, 1990)), die eine endogene Spezifikation stochastischer Regimewechsel ermöglichen, zunehmend als Alternative oder zumindest als Ergänzung zur Modellierung autoregressiv bedingter Volatilitäten herangezogen. So zeigt etwa *Cai* (1994), daß die in Markov-Switching-Modellen festgestellten ARCH-Effekte vergleichsweise wenig persistent sind und sich Zinsvolatilitäten hauptsächlich durch stochastische Regimewechsel erklären lassen. *Hamilton und Susmel* (1994) stellen darüber hinaus fest, daß eine Überschätzung der autoregressiv bedingten Varianz in ARCH-Modellen für oftmals unbefriedigende Volatilitätsprognosen verantwortlich sein kann. Ein weiteres speziell für die Dynamik kurzfristiger Zinssätze beobachtbares und von ARCH-Modellen nicht erfaßtes Phänomen ist der theoretisch durch zeitstetige Modelle motivierte „Volatility-Level-Link“, demzufolge die bedingte Varianz der Zinsänderung von der aktuellen Höhe des Zinsniveaus abhängig ist (*Chan, Karolyi, Longstaff und Sanders* (1992)). Um jedem einzelnen der drei genannten Ansätze (ARCH, Markov Switching, Volatility-Level-Link) Rechnung zu tragen, ohne dabei die übrigen Spezifikationsmöglichkeiten auszuschließen, werden in der Literatur neuerdings umfassende Modellierungsstrategien vorgeschlagen, die viele der bisher bekannten Modelle als Spezialfälle enthalten. Neben den Arbeiten von *Dahlquist und Gray* (1995) sowie *Dewachter* (1996), in welchen die Konzepte Markov Switching und Volatility-Level-Link miteinander kombiniert werden, ist hier vor allem das flexi-

---

analysen wird in den Beiträgen von *Bollerslev, Chou und Kroner* (1992), *Bera und Higgins* (1993), *Bollerslev, Engle und Nelson* (1994) und *Palm* (1996) vorgenommen. Zur Einführung in diese Thematik ist auf die Arbeit von *Lütkepohl* (1997) zu verweisen.

ble und leicht implementierbare Generalized-Regime-Switching-(GRS-) Modell von *Gray* (1996a, 1996b) zu nennen, das im Zentrum der nachfolgenden Analyse steht.

In dem vorliegenden Beitrag soll der Frage nachgegangen werden, ob das von *Gray* erfolgreich zur Modellierung und Prognose amerikanischer und australischer Zinsvolatilitäten eingesetzte GRS-Modell auch die Dynamik von Zinssätzen am Euro-Markt für DM-Ausleihungen besser erklären kann als die oben skizzierten herkömmlichen Ansätze. Dazu wird eine Analyse von Volatilitäten der Zinssätze für Monatsgeld und Dreimonatsgeld vorgenommen. Die Beurteilung unterschiedlicher Modellvarianten erfolgt dabei aufgrund der oben angesprochenen Praxisrelevanz gesondert anhand von Out-of-sample-Prognosen. Ein solches Vorgehen vermag auch deshalb von Interesse zu sein, weil ein umfassender Out-of-sample-Vergleich stochastischer Volatilitätsmodelle für deutsche Zinssätze m. W. bislang nicht vorgenommen wurde.

Im anschließenden Kapitel II wird das GRS-Modell als integrativer Ansatz zur Analyse von Volatilitäten vorgestellt. Es wird dabei gezeigt, daß bekannte Modelle wie GARCH und Markov Switching als restringierte Varianten des GRS-Modells betrachtet werden können. Kapitel III dokumentiert die Schätzergebnisse alternativer Volatilitätsmodelle sowie deren ökonomische Interpretation. In Kapitel IV werden die Modelle hinsichtlich ihrer Prognoseleistung verglichen. In Kapitel V erfolgt eine Zusammenfassung der wesentlichen Resultate.

## II. Alternative Ansätze zur Modellierung von Zinsvolatilitäten

### 1. Diskrete Diffusionsmodelle

In zeitstetigen Modellen wird die Dynamik des kurzfristigen Zinssatzes  $r$  allgemein durch die stochastische Differentialgleichung

$$(1) \quad dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma r^\gamma dW$$

beschrieben. Durch entsprechende Restriktionen der Parameter in (1) erhält man populäre Spezifikationen wie etwa das Modell von *Brennan* und *Schwartz* (1980) oder das Modell von *Cox*, *Ingersoll* und *Ross* (1985). Die zu (1) analoge diskrete Formulierung lautet:

$$(2) \quad \begin{aligned} \Delta r_t &= r_t - r_{t-1} = \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \text{mit} \quad E[\varepsilon_t | \Phi_{t-1}] &= 0 \quad \text{und} \quad E[\varepsilon_t^2 | \Phi_{t-1}] = \sigma^2 r_{t-1}^{2\gamma}, \end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon_t$  die Zeitreihe der Residuen und  $\Phi$  die Informationsmenge bezeichnet. Im Falle von  $\beta < 0$  ist der bedingte Erwartungswert der Zinssatzänderung negativ vom Zinsniveau abhängig. Diskrete Diffusionsmodelle können somit dem generell als Mean Reversion bezeichneten Phänomen Rechnung tragen, daß Zinssätze tendenziell zu einem langfristigen Mittelwert zurückkehren. Auch die bedingte Varianz kann mit  $\gamma > 0$  in Abhängigkeit vom Zinsniveau formuliert werden. Diese Zeitreiheneigenschaft wird in Anlehnung an *Dewachter* (1996) nachfolgend als Volatility-Level-Link bezeichnet. Ein empirischer Vergleich von acht alternativen diskreten Diffusionsmodellen wurde von *Chan, Karolyi, Longstaff* und *Sanders* (1992) sowie von *Dewachter* (1996) vorgenommen. *Dewachter* (1996) sowie *Dahlquist* und *Gray* (1995) kombinieren (2) zudem mit einem Markov-Switching-Modell, wodurch eine erhebliche Flexibilisierung erreicht wird, ohne damit jedoch einer potentiellen autoregressiv bedingten Heteroskedastizität Rechnung tragen zu können.

## 2. GARCH-Modelle

In ARCH- und GARCH-Modellen wird die bedingte Varianz  $h_t$  autoregressiv modelliert. Das in vielen praktischen Anwendungen aufgrund seiner sparsamen Parametrisierung bewährte GARCH(1,1)-Modell formuliert  $h_t$  in Abhängigkeit von dem quadrierten Residuum und der bedingten Varianz der Vorperiode, wobei die Residuen  $\varepsilon_t$  aus der simultanen Maximum-Likelihood-Schätzung der Gleichung für die Zinssatzänderung gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \Delta r_t &= X_{t-1} \beta + \varepsilon_t \\ (3) \quad \varepsilon_t | \Phi_{t-1} &\sim N(0, h_t) \\ h_t &= b_0 + b_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_2 h_{t-1}. \end{aligned}$$

Durch eine Berücksichtigung von  $r_{t-1}$  im Vektor der erklärenden Variablen  $X$  läßt sich Mean Reversion auch in (3) modellieren. Ein Problem bei der Schätzung von GARCH-Modellen stellt – wie oben bereits angesprochen – die mögliche Persistenz in der bedingten Varianz ( $b_1 + b_2 \geq 1$ ) dar, die häufig auf eine Fehlspezifikation infolge vernachlässigter Strukturbrüche zurückzuführen ist. Weiterhin kann eine Berücksichtigung des theoretisch motivierten und empirisch oftmals festgestellten Volatility-Level-Link in GARCH-Modellen nicht erfolgen.



### 3. Verallgemeinertes Regime-Switching-(GRS-)Modell

Markov-Switching-Modelle wurden ursprünglich mit konstanten Varianzen innerhalb der Regime konzipiert (*Hamilton (1988), Engel und Hamilton (1990)*). Um die Volatilität hochfrequenter Zeitreihen zu modellieren, sind schließlich Kombinationen mit ARCH-Prozessen niedriger Ordnung vorgenommen worden (*Cai (1994), Hamilton und Susmel (1994)*). Das von *Gray (1996a, 1996b)* eingeführte GRS-Modell weist drei Vorzüge gegenüber diesen herkömmlichen Ansätzen auf. Zunächst ist es flexibel genug, um ARCH-Modelle, diskrete Diffusionsmodelle sowie alle bislang bekannten Regime-Switching-Modelle zu integrieren und sämtliche Parameter zeitvariabel zu formulieren. Des weiteren konnte das Problem der Pfadabhängigkeit gelöst werden, welches für bisherige Ansätze zur Kombination von ARCH- und Markov-Switching-Modellen charakteristisch ist. Schließlich ermöglicht die rekursive Schätzung von GRS-Modellen eine vergleichsweise einfache Implementierung, die sich konzeptionell sehr eng an die vertraute Spezifikation von GARCH-Modellen anlehnt.

Sowohl das diskrete Diffusionsmodell (2) als auch das GARCH-Modell (3) lassen sich allgemein wie folgt darstellen:

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta r_t &= \mu(\theta_\mu, \Phi_{t-1}) + \sqrt{h(\theta_h, \Phi_{t-1})} z_t \\ &= \mu_t + \sqrt{h_t} z_t. \end{aligned}$$

Dabei ist  $z_t$  unabhängig und identisch verteilt und  $\theta_\mu, \theta_h$  sind die Vektoren der zu schätzenden Parameter. Während der bedingte Erwartungswert in beiden Modellen identisch spezifiziert ist,

$$\mu(\theta_\mu, \Phi_{t-1}) = \mu_t = \alpha + \beta r_{t-1} \quad \text{mit } \theta_\mu = \{\alpha, \beta\},$$

wird die bedingte Varianz im diskreten Diffusionsmodell durch

$$h(\theta_h, \Phi_{t-1}) = \sigma^2 r_{t-1}^{2\gamma} \quad \text{mit } \theta_h = \{\sigma^2, \gamma\}$$

und im GARCH(1,1)-Modell durch

$$h(\theta_h, \Phi_{t-1}) = h_t = b_0 + b_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_2 h_{t-1} \quad \text{mit } \theta_h = \{b_0, b_1, b_2\}$$

beschrieben. Erlaubt man zusätzlich die für Markov-Switching-Modelle charakteristische Regimeabhängigkeit von Parametervektoren, erweitert sich (4) zum GRS-Modell,

$$(5) \quad \begin{aligned} \Delta r_t &= \mu[\theta_\mu(S_t), \Phi_{t-1}] + \sqrt{h[\theta_h(S_t), \Phi_{t-1}]} z_t \\ &= \mu_{it} + \sqrt{h_{it}} z_t \end{aligned} \quad \text{mit } S_t = i,$$

wobei  $S_t$  ein unbeobachtbares, zum Zeitpunkt  $t$  vorherrschendes Regime repräsentiert und für den einfachen Fall zweier möglicher Regime ausschließlich die Werte  $i = 1, 2$  annehmen kann. Ein wesentliches Charakteristikum des GRS-Modells (5) besteht darin, daß sämtliche Parameter regimeabhängig formuliert werden können. Unter der (nicht zwingenden) Annahme einer bedingten Normalverteilung von  $\Delta r_t$  in jedem Regime erhält man somit

$$(6) \quad \Delta r_t | \Phi_{t-1} \sim \begin{cases} N(\mu_{1t}, h_{1t}) \text{ mit der Wahrscheinlichkeit } p_{1t} \\ N(\mu_{2t}, h_{2t}) \text{ mit der Wahrscheinlichkeit } (1 - p_{1t}) \end{cases},$$

mit  $p_{1t} = \Pr(S_t = 1 | \Phi_{t-1})$  als bedingter Regimewahrscheinlichkeit. Während die Formulierung des bedingten Erwartungswertes von  $\Delta r_t$  in Gestalt einer regimeabhängigen Mean Reversion,

$$(7) \quad \mu_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{t-1},$$

technisch unproblematisch ist, traten bei der Spezifikation der bedingten Varianz in Markov-Switching-Modellen mit ARCH-Koeffizienten aufgrund von Pfadabhängigkeit bislang erhebliche Schätzprobleme auf. Insbesondere Markov-Switching-GARCH-Modelle galten als nicht spezifizierbar und schätzbar, da die bedingte Varianz in GARCH-Modellen von der gesamten Vergangenheit der betrachteten Zeitreihe determiniert wird. Dies bedeutet aber, daß die bedingte Verteilung zum Zeitpunkt  $t$  nicht – wie in (6) unterstellt – ausschließlich vom aktuellen Regime  $S_t$ , sondern darüber hinaus indirekt auch von sämtlichen Regimen der Vergangenheit  $\{S_{t-1}, S_{t-2}, \dots\}$  abhängig sein würde, da die bedingte Varianz in  $t$  von der bedingten Varianz in  $t-1$  bestimmt wird, welche wiederum in direkter Abhängigkeit von dem in  $t-1$  vorherrschenden Regime und der bedingten Varianz in  $t-2$  steht usw. Für die Beobachtung  $t$  müßten bei einer rekursiven Likelihood-Schätzung daher  $2^t$  Terme berücksichtigt werden, um die bedingte Varianz aus allen möglichen Regimepfaden zu berechnen, was selbst im Falle kleiner Stützbeispiele nur schwer zu bewältigen ist. Cai (1994) sowie Hamilton und Susmel (1994) haben dieses Problem umgangen, indem sie die bedingte Varianz jeweils als ARCH-Prozeß niedriger Ordnung formulierten. Ein solches Vorgehen hat allerdings den gravierenden Nachteil einer möglicherweise unzureichenden Berücksichtigung der Volatilitätspersistenz

innerhalb der Regime, welche sich gewöhnlich im GARCH-Koeffizienten niederschlägt. Gray (1996a, 1996b) löst dieses Problem der Pfadabhängigkeit für das GRS-Modell, indem er sich die Tatsache zunutze macht, daß (6) eine gemischte Verteilung mit zeitvariablen Mischungsparametern beschreibt. Unter der Annahme einer bedingten Normalverteilung von  $\Delta r_t$  in jedem der zwei Regime ist die Varianz der Zinsänderung zum Zeitpunkt  $t$  damit durch

$$(8) \quad \begin{aligned} h_t &= E[\Delta r_t^2 | \Phi_{t-1}] - E[\Delta r_t | \Phi_{t-1}]^2 \\ &= p_{1t}(\mu_{1t}^2 + h_{1t}) + (1 - p_{1t})(\mu_{2t}^2 + h_{2t}) - [p_{1t}\mu_{1t} + (1 - p_{1t})\mu_{2t}]^2 \end{aligned}$$

gegeben. Erfolgt eine Aggregation der bedingten Varianzen beider Regime gemäß (8) in jedem Schritt der rekursiven Schätzung, so kann die nun nicht mehr pfadabhängige Varianz  $h_t$  als verzögerte Einflußgröße zur Schätzung der jeweils einem GARCH-Prozeß folgenden bedingten Varianzen  $h_{t+1}$  sowie  $h_{2t+1}$  herangezogen werden. Unter Berücksichtigung des Volatility-Level-Link ergibt sich daher folgende Spezifikation:

$$(9) \quad h_{it} = b_{0i} + b_{1i}\epsilon_{t-1}^2 + b_{2i}h_{t-1} + \sigma_i^2 r_{t-1}^{2\gamma}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} h_{t-1} &= p_{1t-1}[\mu_{1t-1}^2 + h_{1t-1}] + (1 - p_{1t-1})[\mu_{2t-1}^2 + h_{2t-1}] \\ &\quad - [p_{1t-1}\mu_{1t-1} + (1 - p_{1t-1})\mu_{2t-1}]^2 \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} \epsilon_{t-1} &= \Delta r_{t-1} - E[\Delta r_{t-1} | \Phi_{t-2}] \\ &= \Delta r_{t-1} - [p_{1t-1}\mu_{1t-1} + (1 - p_{1t-1})\mu_{2t-1}]. \end{aligned}$$

Analog zum bedingten Erwartungswert  $\mu_{it}$  ist damit auch die bedingte Varianz  $h_{it}$  ausschließlich von unbekannten Parametern, der aktuellen Informationsmenge und dem aktuellen Regime abhängig, nicht jedoch von den Regimen der Vergangenheit, deren Information aggregiert wurde. Die unbeobachtbare Regimevariable  $S_t$  kann schließlich in Anlehnung an Hamilton (1988, 1989, 1990) als Markov-Prozeß erster Ordnung mit konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten  $P$  und  $Q$  beschrieben werden:

$$(12) \quad \begin{aligned} Pr[S_t = 1 | S_{t-1} = 1] &= P \\ Pr[S_t = 2 | S_{t-1} = 1] &= (1 - P) \\ Pr[S_t = 2 | S_{t-1} = 2] &= Q \\ Pr[S_t = 1 | S_{t-1} = 2] &= (1 - Q). \end{aligned}$$

Allerdings lassen sich auch die Übergangswahrscheinlichkeiten zeitvariabel formulieren, etwa in Abhängigkeit vom Zinsniveau (*Dahlquist* und *Gray* (1995), *Dewachter* (1996)),

$$(13) \quad P_t = \Phi(c_1 + d_1 r_{t-1}), \quad Q_t = \Phi(c_2 + d_2 r_{t-1}),$$

wobei  $\Phi(\cdot)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist, die  $0 < P_t, Q_t < 1$  sicherstellt. In diesem Zusammenhang läßt sich zeigen, daß sowohl Mean Reversion als auch Leptokurtosis durch mit dem Zinsniveau korrelierte Übergangswahrscheinlichkeiten verursacht werden können (*Gray* (1996a), S. 37).

Nachdem der bedingte Erwartungswert in (7), die bedingte Varianz in (8) und die Übergangswahrscheinlichkeiten in (12) und gegebenenfalls (13) spezifiziert wurden, läßt sich die Log-Likelihood-Funktion wie folgt konstruieren:

$$(14) \quad L = \sum_{t=1}^T \log \left[ p_{1t} \frac{1}{\sqrt{2\pi} h_{1t}} \exp \left\{ -\frac{(\Delta r_t - \mu_{1t})^2}{2h_{1t}} \right\} + (1 - p_{1t}) \frac{1}{\sqrt{2\pi} h_{2t}} \exp \left\{ -\frac{(\Delta r_t - \mu_{2t})^2}{2h_{2t}} \right\} \right].$$

Die bedingte Regimewahrscheinlichkeit  $p_{1t}$  kann dabei als Ex-ante-Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, daß sich der Prozeß in der folgenden Periode in Regime 1 befinden wird. Sie wird – analog zur bedingten Varianz in GARCH-Modellen – rekursiv geschätzt und steht schließlich als Zeitreihe zur Verfügung:

$$p_{1t} = P \left[ \frac{f_{1t-1} p_{1t-1}}{f_{1t-1} p_{1t-1} + f_{2t-1} (1 - p_{1t-1})} \right] + (1 - Q) \left[ \frac{f_{2t-1} (1 - p_{1t-1})}{f_{1t-1} p_{1t-1} + f_{2t-1} (1 - p_{1t-1})} \right],$$

mit den bedingten Verteilungen  $f_{1t} = f(\Delta r_t | S_t = 1)$  und  $f_{2t} = f(\Delta r_t | S_t = 2)$ .<sup>2</sup>

Wie aus den obigen Ausführungen hervorgegangen ist, können diskrete Diffusionsmodelle, GARCH-Modelle, Markov-Switching-Modelle sowie sämtliche Kombinationen dieser Modelle als restringierte Varianten des GRS-Modells angesehen werden. Um die relative Leistungsfähigkeit alternativer Ansätze zur Analyse und Prognose von Zinsvolatilitäten beurteilen zu können, soll das vollständige GRS-Modell im folgenden einer Auswahl dieser restringierten Modelle gegenübergestellt werden. In

<sup>2</sup> Vgl. hierzu *Gray* (1996a), S. 58 - 61.

Anlehnung an Gray (1996a) wurden jeweils für beide Zinssätze (1) ein als Benchmark fungierendes GARCH(1,1)-Modell, (2) ein GARCH(1,1)-Modell mit Volatility-Level-Link, (3) ein Markov-Switching-Modell mit konstanten Varianzen innerhalb der Regime, (4) ein GRS-Modell mit konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten sowie (5) ein GRS-Modell mit zeitvariablen Übergangswahrscheinlichkeiten geschätzt.<sup>3</sup> Alle Modellschätzungen wurden mit der Routine „maximize“ des Programmpakets RATS 4.2 unter Anwendung des BFGS-Algorithmus durchgeführt und sind als Quasi-Maximum-Likelihood-Schätzungen interpretierbar (Bollerslev und Wooldridge (1992), Trevor (1994), Gray (1996c)). Bei den Regime-Switching-Modellen diente die unbedingte Regimewahrscheinlichkeit  $(1 - Q)/(2 - P - Q)$  als Startwert für die rekursiven Schätzungen von  $p_{1t}$ . Alle dokumentierten  $t$ -Werte basieren jeweils auf einer heteroskedastizitätskonsistenten Kovarianzmatrix (White (1980)). Der Darstellung und Interpretation der Schätzergebnisse in den Abschnitten 2, 3 und 4 wird im folgenden Abschnitt 1 eine kurze Beschreibung des Datenmaterials vorangestellt.

### III. Empirische Ergebnisse

#### 1. Die Daten

Gegenstand der empirischen Untersuchung sind Zinssätze für einmonatige und dreimonatige DM-Ausleihungen am Eurogeldmarkt. Die in wöchentlicher Frequenz vorliegenden und für den Zeitraum von Januar 1982 bis Dezember 1996 (Mittwochswerte, 782 Beobachtungen) analysierten Daten wurden von Datastream erhoben.<sup>4</sup> Die Entwicklung des dreimonatigen Zinssatzes wird in Abbildung 1 dokumentiert, während Abbildung 2 die ersten Differenzen dieser Zeitreihe zeigt.<sup>5</sup> Betrachtet man die Abbildungen 1 und 2 gemeinsam, lassen sich vor allem in der ersten Hälfte der achtziger Jahre visuelle Anhaltspunkte für einen Volatility-Level-Link ausfindig machen. Abbildung 2 offenbart jedoch vor allem die für Finanzzeitreihen typische und durch GARCH-Modelle

<sup>3</sup> Um die Ergebnisse überschaubar zu halten, wurden folgende Modelle nicht berücksichtigt: Regime-Switching mit GARCH, aber ohne Volatility-Level-Link (Gray (1996a, 1996b)), Regime-Switching mit Volatility-Level-Link, aber ohne GARCH (Dahlquist und Gray (1995), Dewachter (1996)).

<sup>4</sup> Die Zeitreihen wurden freundlicherweise von der Dresdner Bank zur Verfügung gestellt.

<sup>5</sup> Auf eine graphische Darstellung des Einmonatszinssatzes wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.



erfaßbare Eigenschaft autoregressiv bedingter Heteroskedastizität, indem sowohl Perioden starker Schwankungen als auch Perioden geringer Volatilität beobachtet werden können. Weil dem kurzfristigen Zinsniveau generell eine bedeutende Funktion in der Geldpolitik zugeschrieben wird – in Deutschland kann der Zinssatz für Tagesgeld als das kurzfristige Operationsziel der Bundesbank interpretiert werden (*Neumann und von Hagen* (1993)) –, wird das Verhalten von Zentralbanken als eine wesentliche Determinante für das Ausmaß von Geldmarktvolatilitäten angesehen. Insbesondere die in Kapitel II thematisierten Strukturbrüche in der unbedingten Varianz von Zinszeitreihen haben sich oftmals als das Ergebnis geldpolitischer Regimewechsel erwiesen und damit auch die Entwicklung von Markov-Switching-Modellen maßgeblich motiviert (*Hamilton* (1988), *Cai* (1994), *Gray* (1996a)). Für eine theoretische Begründung unterschiedlicher stochastischer Regime am Euro-DM-Markt scheint neben der technischen Ausgestaltung der deutschen Geldmarktsteuerung, die über Arbitragebeziehungen auch auf den Eurogeldmarkt wirkt, insbesondere die Situation des Europäischen Wechselkursystems (EWS) von Bedeutung zu sein. So identifizieren *Dahlquist* und *Gray* (1995) für den Zinssatz auf wöchentliche Euro-DM-Ausleihungen ein „Realignment Regime“, welches sich durch extrem hohe und volatile Zinssätze auszeichnet und jeweils von nur kurzer Dauer ist, sowie ein persistentes „normales Regime“ in Zeiten glaubwürdiger Paritäten. Anhand von Abbildung 2 läßt sich der Zusammenhang zwischen Spannungen im EWS und Zinsvolatilitäten speziell zum Zeitpunkt der EWS-Krise im Herbst 1992 nachvollziehen, als dreimal in Folge wöchentliche Zinssatzänderungen oberhalb von 0,6 Prozentpunkten beobachtet werden konnten. Der hier graphisch nicht dokumentierte Einmonatszinssatz hat einen ähnlichen Verlauf wie der Dreimonatszinssatz, unterliegt dabei aber noch stärkeren Schwankungen.

## 2. Ergebnisse der GARCH-Modellschätzungen

Wird zunächst die Bedeutung potentieller stochastischer Regimewechsel vernachlässigt, kommt man zur populären GARCH(1,1)-Spezifikation, die zwar dem Volatility-Clustering, nicht jedoch dem Volatility-Level-Link Rechnung tragen kann. Das von *Gray* (1996a) vorgeschlagene „Single Regime GRS-(SGRS-)Model“ formuliert die bedingte Varianz hingegen sowohl in Abhängigkeit vergangener Schocks und verzögerter bedingter Varianzen als auch in Abhängigkeit des verzögerten Zinsniveaus.

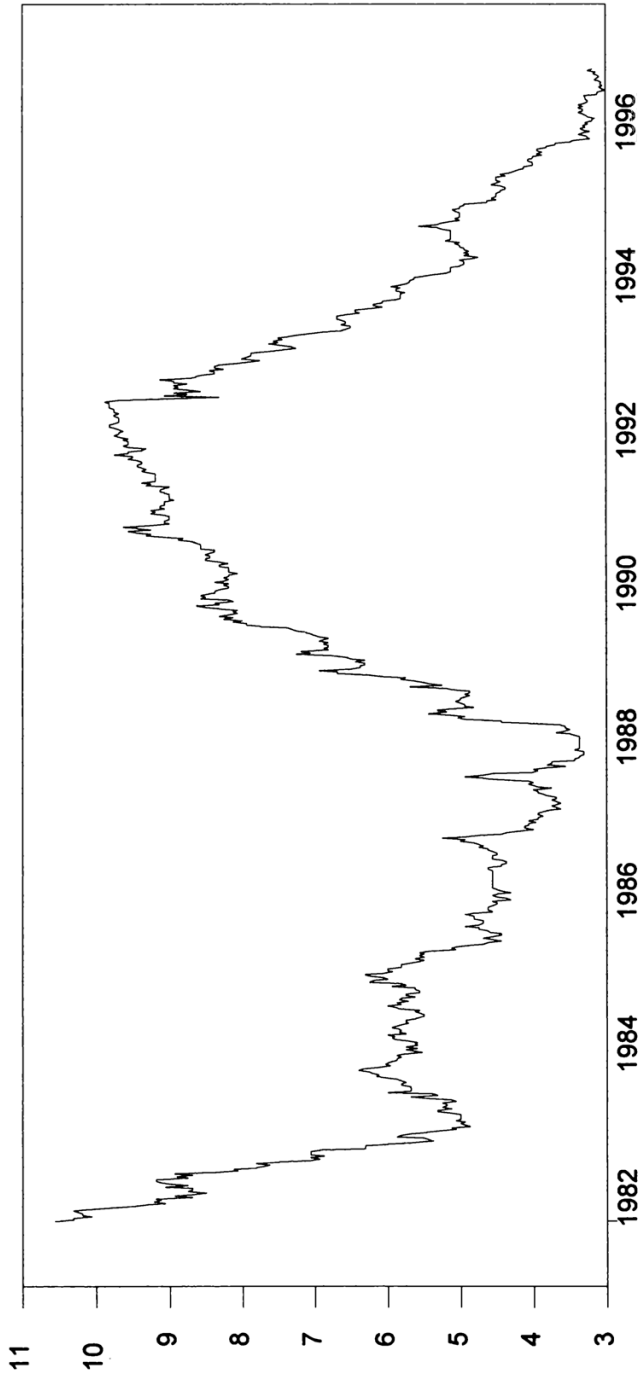


Abb. 1: Dreimonatszinssatz am Euro-DM-Markt 1982 bis 1996

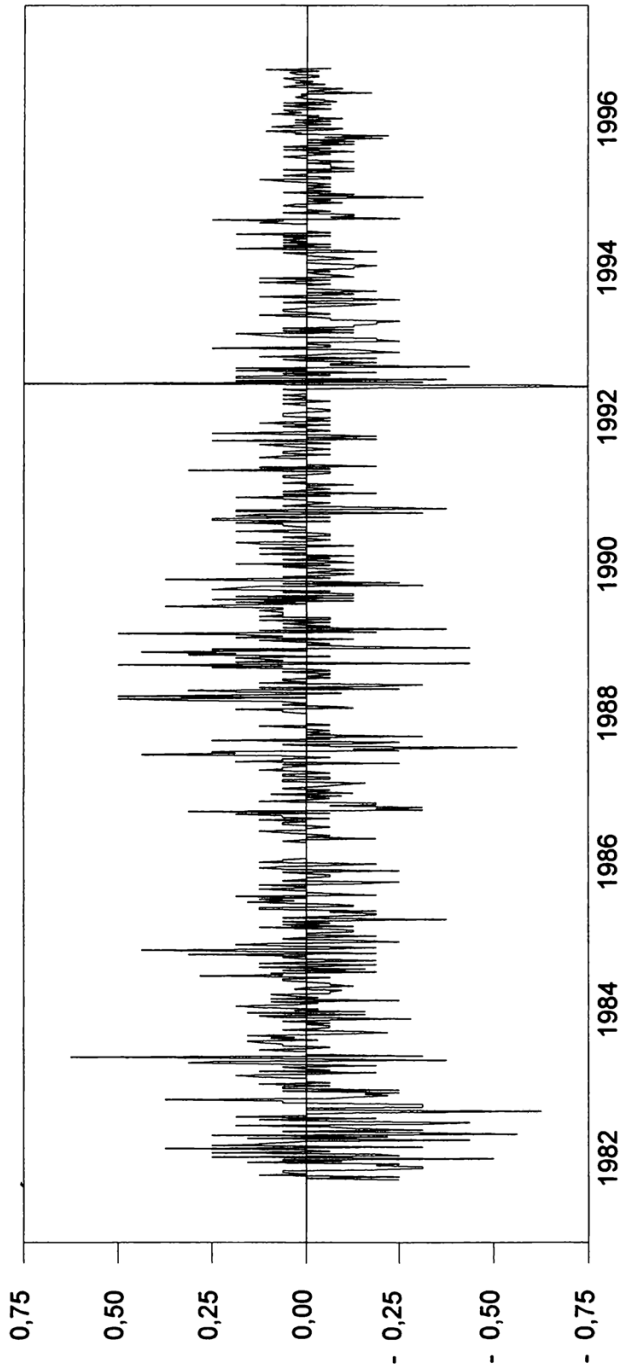


Abb. 2: Dreimonatszinssatz am Euro-DM-Markt 1982 bis 1996 (Erste Differenzen)

Tabelle 1  
Spezifikation und Schätzungen von GARCH-Modellen

$\Delta r_t   \Phi_{t-1} \sim N(a_0 + a_1 r_{t-1}, v_t)$ $v_t = h_t + \sigma^2 r_{t-1}^2$ $h_t = b_0 + b_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_2 v_{t-1}$ mit $\sigma^2 = 0$ für das GARCH (1,1)-Modell und $b_0 = 0$ für das SGRS-Modell				
	Euro-Monatszinssatz		Euro-Dreimonatszinssatz	
	GARCH (1,1)	GARCH (1,1) mit Volatility- Level-Link (SGRS)	GARCH (1,1)	GARCH (1,1) mit Volatility- Level-Link (SGRS)
$a_0$	- 0,0015 (0,11)	0,0006 (0,05)	- 0,0168* (1,80)	- 0,0106 (1,06)
$a_1$	- 0,0007 (0,25)	- 0,0012 (0,53)	0,0018 (1,05)	0,0005 (0,28)
$b_0$	0,0046*** (2,85)	-	0,0022*** (2,64)	-
$b_1$	0,5218*** (3,06)	0,3729*** (3,75)	0,2814*** (2,91)	0,2482*** (3,47)
$b_2$	0,4759*** (5,65)	0,4984*** (6,87)	0,6517*** (7,30)	0,6452*** (7,01)
$\sigma$	-	0,0441*** (4,72)	-	0,0265*** (3,73)
Log-Likelihood	331,8469	341,7559	452,5161	454,4415
$LB_1^2$	0,04 (0,84)	0,53 (0,47)	0,19 (0,66)	0,24 (0,62)
$LB_5^2$	0,46 (0,99)	2,42 (0,79)	1,01 (0,96)	1,89 (0,86)
$LB_{15}^2$	2,60 (0,99)	5,00 (0,99)	2,88 (0,99)	3,58 (0,99)

\*\*\* (\*\*,\*) bezeichnen Signifikanz auf dem 1 (5, 10)-prozentigen Niveau. Die t-Werte sind in Klammern aufgeführt und basieren auf heteroskedastizitätskonsistenten Standardfehlern.  $LB_x^2$  bezeichnet die Ljung-Box-Statistik der quadrierten (standardisierten) Residuen, wobei x die Anzahl der Verzögerungen angibt; das marginale Signifikanzniveau zum LB-Test ist in Klammern aufgeführt.

Obwohl das SGRS-Modell aus dem in Kapitel II dargestellten GRS-Modell hervorgegangen ist, soll es in der vorliegenden Untersuchung als konzeptionelle Erweiterung des GARCH(1,1)-Modells verstanden werden. Die Spezifikation sowie die Schätzergebnisse beider Modelle sind in Tabelle 1 dokumentiert. Die Formulierung des aus zeitstetigen Modellen begründeten Volatility-Level-Link im SGRS-Modell erfolgte in Anlehnung an Cox, Ingersoll und Ross (1985) mit der Restriktion

$\gamma = 0,5$ .<sup>6</sup> In Anlehnung an Gray (1996a) wird im SGRS-Modell weiterhin  $b_0 = 0$  unterstellt. Hinsichtlich der Volatilitätsdynamik zeigt Tabelle 1 für beide Zinssätze statistisch signifikante Parameter. Für den Einmonatszinssatz (Dreimonatszinssatz) ist im Falle des GARCH(1,1)-Modells  $b_1 + b_2 = 0,998$  ( $b_1 + b_2 = 0,933$ ), worin sich die für Zinszeitreihen typische Persistenz in der bedingten Varianz widerspiegelt. Auffallend ist weiterhin, daß die bedingte Varianz des Einmonatszinssatzes stärker auf aktuelle Schocks reagiert, während zurückliegende Schocks im Falle des Dreimonatszinssatzes länger nachwirken. In den erweiterten Spezifikationen sind die Parameter  $\sigma$  hoch signifikant. Eine zusätzliche Berücksichtigung des Volatility-Level-Link erhöht offenbar die Erklärungskraft des GARCH-Modells für beide Zeitreihen und sollte daher als Ausprägung bedingter Heteroskedastizität in Zinszeitreihen generell Beachtung finden. Ferner ist gemäß den Ljung-Box-Statistiken keinerlei Autokorrelation in den quadrierten standardisierten Residuen aller vier Modelle festzustellen, was die Eignung der betrachteten Spezifikationen hinsichtlich der Modellierung stochastischer Volatilitäten anzeigt. Der Mean-Reversion-Parameter  $a_1$  ist stets insignifikant von Null verschieden und weist darüber hinaus im Falle des Dreimonatszinssatzes das falsche Vorzeichen auf.

### 3. Ergebnisse der Markov-Switching-Modellschätzungen

Um die Bedeutung von Regimewechseln für die Volatilität von Zinssätzen isoliert beurteilen zu können, wurden – unter Anwendung des in Kapitel II beschriebenen rekursiven Schätzverfahrens – zunächst herkömmliche Markov-Switching-Modelle (Hamilton (1988, 1989, 1990)) mit konstanten Varianzen innerhalb der Regime geschätzt. Heteroskedastizität ist in Markov-Switching-Modellen auf stochastische Regimewechsel zurückzuführen, so daß bedingte Heteroskedastizität ausschließlich in Gestalt von Regimeunsicherheiten auftreten kann. Die in Tabelle 2 dokumentierten Ergebnisse deuten für beide Zeitreihen auf die Existenz zweier Regime hin, die sich hinsichtlich ihrer Volatilität sowie hinsichtlich ihrer Mean Reversion unterscheiden. Die Regime weisen jeweils eine hohe Persistenz auf, was anhand der geschätzten Übergangswahrscheinlichkeiten  $P$  und  $Q$  erkennbar ist, die zumeist Werte oberhalb von 0,9 annehmen. Sowohl für den Monats- als auch für den Dreimonatszinssatz ist die Standardabweichung  $b_{01}$  in Regime 1 ungefähr dreimal so hoch

<sup>6</sup> Vgl. zu diesem Vorgehen Dahlquist/Gray (1995), S. 15 - 16, sowie Gray (1996a), S. 36.



wie die Standardabweichung  $b_{02}$  in Regime 2. In dem volatilen Regime 1 kann für beide Zinssätze eine statistisch signifikante Mean Reversion festgestellt werden. Der aus den geschätzten Koeffizienten berechenbare  $(-a_{01}/a_{11})$  langfristige Mittelwert für das Zinsniveau beträgt 5,83 Prozent bzw. 5,38 Prozent. In Regime 2 folgen die Zinssätze dagegen einem Random Walk. Die Parameter  $a_{12}$  weisen jeweils einen geringen Wert auf und sind insignifikant von Null verschieden. Vor dem Hintergrund aktueller Zweifel an der Instationarität von Zinssätzen (*Lin und Tsay* (1996), *Wu und Zhang* (1996)) deutet dieses Ergebnis auf eine mögliche Inadäquanz solcher Stationaritätsanalysen hin, die endogene Regimewechsel nicht berücksichtigen.

Formal kann die statistische Signifikanz eines zweiten Regimes nicht durch die Anwendung eines Likelihood-Ratio-Tests festgestellt werden, da die Parameter des zweiten Regimes unter der Nullhypothese eines einzigen Regimes nicht identifiziert sind und die Teststatistik in diesem Fall nicht  $\chi^2$ -verteilt ist.<sup>7</sup> Berechnete „Quasi-LRT-Statistiken“ (*Gray* (1996a)), welche jeweils über den Erklärungsgehalt des Markov-Switching-Modells gegenüber dem eines einfachen (hier nicht dokumentierten) Modells mit konstanter Varianz informieren sollen, sind mit 397,83 im Falle des Monatszinssatzes und 229,85 im Falle des Dreimonatszinssatzes allerdings derartig hoch, daß die Existenz eines zweiten Regimes höchst plausibel ist. Wenngleich die durch Regimewechsel verursachte Heteroskedastizität beachtlich ist, geht aus den teilweise signifikanten Ljung-Box-Statistiken hervor, daß traditionelle Markov-Switching-Modelle nicht die gesamte Volatilität der betrachteten Zeitreihen erfassen können. Im folgenden soll daher untersucht werden, welcher Erklärungsgehalt dem GRS-Modell zukommt, in dem alle drei Arten bedingter Heteroskedastizität simultan auftreten können.

#### 4. Ergebnisse der GRS-Modellschätzungen

Das in Kapitel II entwickelte und in Tabelle 3a dargestellte pfadunabhängige GRS-Modell wurde für beide Zinssätze sowohl mit konstanten als auch mit zeitvariablen Übergangswahrscheinlichkeiten geschätzt. Aus den in Tabelle 3b dokumentierten Schätzergebnissen geht zunächst hervor, daß sämtliche den bedingten Erwartungswert beschreibenden

<sup>7</sup> *Hansen* (1992, 1996) hat ein Verfahren entwickelt, welches dem Identifikationsproblem Rechnung trägt, jedoch für komplexe Modelle wie das GRS sehr aufwendig ist. Der LRT-Test wird dort auf der Basis einer modifizierten  $\chi^2$ -Verteilung durchgeführt:

Tabelle 2

**Spezifikation und Schätzungen von Regime-Switching-Modellen  
mit konstanten Varianzen innerhalb der Regime**

$\Delta r_t   \Phi_{t-1} \sim \begin{cases} N(a_{01} + a_{11} r_{t-1}, b_{01}) & \text{mit der Wahrscheinlichkeit } p_{1t} \\ N(a_{02} + a_{12} r_{t-1}, b_{02}) & \text{mit der Wahrscheinlichkeit } (1 - p_{1t}) \end{cases}$ $p_{1t} = P \left[ \frac{f_{1t-1} p_{1t-1}}{f_{1t-1} p_{1t-1} + f_{2t-1} (1 - p_{1t-1})} \right] + (1 - Q) \left[ \frac{f_{2t-1} (1 - p_{1t-1})}{f_{1t-1} p_{1t-1} + f_{2t-1} (1 - p_{1t-1})} \right]$ $f_{1t} = f(\Delta r_t   S_t = 1) \quad \text{und} \quad f_{2t} = f(\Delta r_t   S_t = 2)$		
	<b>Euro-Monatszinssatz</b>	<b>Euro-Dreimonatszinssatz</b>
<b>a<sub>01</sub></b>	0,1377** (2,07)	0,0786 (1,46)
<b>a<sub>02</sub></b>	- 0,0153* (1,74)	- 0,0145 (1,50)
<b>a<sub>11</sub></b>	- 0,0236** (2,16)	- 0,0146* (1,88)
<b>a<sub>12</sub></b>	0,0020 (1,39)	0,0021 (1,37)
<b>b<sub>01</sub></b>	0,2914*** (12,76)	0,2183*** (12,48)
<b>b<sub>02</sub></b>	0,0801*** (19,62)	0,0774*** (7,14)
<b>P</b>	0,8935*** (24,60)	0,9182*** (34,06)
<b>Q</b>	0,9444*** (62,94)	0,9476*** (34,94)
<b>Log-Likelihood</b>	408,5578	482,5117
<b>LB<sub>2</sub><sup>2</sup></b>	5,81 (0,02)	6,11 (0,01)
<b>LB<sub>5</sub><sup>2</sup></b>	10,93 (0,05)	18,23 (0,00)
<b>LB<sub>15</sub><sup>2</sup></b>	13,32 (0,58)	20,74 (0,15)

Siehe die Erläuterungen zu Tabelle 1.

Koeffizienten insignifikant von Null verschieden sind. Unter Beachtung der in Tabelle 2 dokumentierten Schätzwerte der Parameter  $a_{11}$  und  $a_{12}$  lassen sich allerdings auch hier jeweils Evidenzen für ein „Mean Reverting Regime“ mit hoher Volatilität sowie für ein „Random Walk Regime“ mit geringer Volatilität finden. Was die Volatilitätsdynamik anbelangt, finden sich einige interessante Ergebnisse, wenngleich weniger als die Hälfte der geschätzten Koeffizienten statistisch signifikant sind.<sup>8</sup> Speziell im Falle des Zinssatzes für Einmonatsgeld zeigt sich, daß die bedingte Varianz im volatilen Regime 1 zwar empfindlicher auf aktuelle Schocks reagiert als die bedingte Varianz in Regime 2 ( $b_{11} > b_{12}$ ), die Persistenz von Schocks in der bedingten Varianz jedoch in dem wenig volatilen Regime 2 erheblich größer ist als in Regime 1 ( $b_{21} < b_{22}$ ).

<sup>8</sup> Vgl. hierzu auch die ähnlichen Ergebnisse von Gray (1996a), S. 50, sowie Gray (1996b), S. 80.

*Tabelle 3a*  
**Spezifikation von GRS-Modellen**

$$\begin{aligned}
 \Delta r_t | \Phi_{t-1} &\sim \begin{cases} N(a_{01} + a_{11} r_{t-1}, v_{1t}) & \text{mit der Wahrscheinlichkeit } p_{1t} \\ N(a_{02} + a_{12} r_{t-1}, v_{2t}) & \text{mit der Wahrscheinlichkeit } (1 - p_{1t}) \end{cases} \\
 v_{1t} &= h_{1t} + \sigma_1^2 r_{t-1} \\
 h_{1t} &= b_{11} \varepsilon_{t-1}^2 + b_{21} v_{t-1} \\
 \varepsilon_{t-1} &= \Delta r_{t-1} - [p_{1t-1} \mu_{1t-1} + (1 - p_{1t-1}) \mu_{2t-1}] \\
 \mu_{1t-1} &= a_{01} + a_{11} r_{t-2} \\
 v_{t-1} &= p_{1t-1} (\mu_{1t-1}^2 + v_{1t-1}) + (1 - p_{1t-1}) (\mu_{2t-1}^2 + v_{2t-1}) - [p_{1t-1} \mu_{1t-1} + (1 - p_{1t-1}) \mu_{2t-1}]^2 \\
 p_{1t} &= P_t \left[ \frac{f_{1t-1} p_{1t-1}}{f_{1t-1} p_{1t-1} + f_{2t-1} (1 - p_{1t-1})} \right] + (1 - Q_t) \left[ \frac{f_{2t-1} (1 - p_{1t-1})}{f_{1t-1} p_{1t-1} + f_{2t-1} (1 - p_{1t-1})} \right] \\
 f_{1t} &= f(\Delta r_t | S_t = 1) \quad \text{und} \quad f_{2t} = f(\Delta r_t | S_t = 2) \\
 P_t &= \Phi(c_1 + d_1 r_{t-1}), \quad Q_t = \Phi(c_2 + d_2 r_{t-1}) \\
 &\text{bzw. mit konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten } P_t = P \text{ und } Q_t = Q
 \end{aligned}$$

Dieses auch von *Gray (1996a)* festgestellte Phänomen kann weder durch die in Abschnitt III.2 geschätzten Modelle GARCH(1,1) und SGRS noch durch Markov-Switching-Modelle mit konstanten Varianzen innerhalb der Regime erfaßt werden. Es läßt sich möglicherweise durch geld- und währungspolitische Maßnahmen begründen, die als „Signale“ interpretiert werden und einerseits starke einmalige Zinsschwankungen induzieren, andererseits aber die Unsicherheit in folgenden Perioden minimieren (*Friedman und Laibson (1989)*).

Die Summe der geschätzten GARCH-Koeffizienten ist in jedem Regime deutlich geringer als in den oben geschätzten GARCH-Modellen und stets deutlich kleiner als Eins, was auf die Stationarität der Varianzprozesse schließen läßt. Dieses bedeutende Ergebnis resultiert aus dem Umstand, daß das GRS-Modell in der Lage ist, zwischen zwei Ursachen der Persistenz in Zinsvolatilitäten zu diskriminieren. Zeichnet sich eines der Regime durch eine hohe durchschnittliche Varianz aus, während das zweite Regime durch eine vergleichsweise niedrige durchschnittliche Varianz gekennzeichnet ist, und sind beide Regime darüber hinaus persistent, so wird auch die Volatilität der betrachteten Zeitreihe persistent sein: „A long period of low average variance may be followed by a long period of high average variance if the regime switches and then persists“ (*Gray (1996a)*, S. 48). Dagegen ist die Persistenz *innerhalb* eines Regimes

Tabelle 3b  
Schätzungen von GRS-Modellen

	Euro-Monatszinssatz		Euro-Dreimonatszinssatz	
	konstante Übergangs- wahrschein- lichkeiten	zeitvariable Übergangs- wahrschein- lichkeiten	konstante Übergangs- wahrschein- lichkeiten	zeitvariable Übergangs- wahrschein- lichkeiten
$a_{01}$	0,2746 (1,11)	0,1180 (1,57)	0,1556 (0,82)	0,1269 (1,06)
$a_{02}$	- 0,0092 (0,92)	- 0,0072 (0,72)	- 0,0156 (1,53)	- 0,0149 (1,39)
$a_{11}$	- 0,0304 (1,21)	- 0,0146 (1,12)	- 0,0257 (1,00)	- 0,0221 (1,34)
$a_{12}$	0,0002 (0,09)	0,0002 (0,16)	0,0017 (1,11)	0,0019 (0,99)
$b_{11}$	0,2347 (0,90)	0,2087 (1,16)	0,0616 (0,65)	0,0525 (0,46)
$b_{21}$	0,3764 (0,73)	0,2968 (0,75)	0,4109 (1,29)	0,0817 (0,23)
$\sigma_1$	0,1205*** (6,66)	0,1230*** (7,08)	0,0817*** (4,60)	0,0911*** (4,71)
$b_{12}$	0,0696 (0,31)	0,0458 (0,65)	0,0954** (2,11)	0,1031 (1,51)
$b_{22}$	0,5403* (1,74)	0,5294*** (4,97)	0,3041** (2,12)	0,3264*** (3,12)
$\sigma_2$	0,0000 (0,00)	0,0000 (0,00)	0,0249*** (4,17)	0,0230*** (4,04)
$P / c_1$	0,6418*** (3,20)	- 0,5551 (0,88)	0,8539*** (10,73)	-0,6937 (0,46)
$d_1$	-	0,1573* (1,77)	-	0,3035 (1,19)
$Q / c_2$	0,9574*** (19,95)	1,2124*** (4,26)	0,9559*** (17,63)	1,1286 (1,39)
$d_2$	-	0,0753*** (2,92)	-	0,0983 (1,11)
<b>Log- Likelihood</b>	427,3233	431,9443	488,7825	490,2558
$LB_1^2$	0,15 (0,70)	0,14 (0,71)	0,02 (0,88)	0,16 (0,68)
$LB_5^2$	0,37 (0,99)	0,46 (0,99)	0,52 (0,99)	4,69 (0,45)
$LB_{15}^2$	1,92 (0,99)	1,79 (0,99)	2,09 (0,99)	7,22 (0,95)

Zur Notation siehe die in Tabelle 3a dargestellte Modellspezifikation sowie die Erläuterungen zu Tabelle 1.

dadurch gekennzeichnet, daß es infolge eines Schocks lange dauert, bis die Varianz zu ihrem langfristigen Durchschnittswert zurückkehrt.

Da die geschätzten Übergangswahrscheinlichkeiten insbesondere für das Regime 2 auf eine hohe Persistenz schließen lassen ( $Q > 0,95$ ) und die Persistenz innerhalb der Regime gleichzeitig geringer ist als im GARCH(1,1)-Modell, stellt letzteres eine Fehlspezifikation der stochastischen Volatilität der hier untersuchten Zeitreihen dar: „Since the single-regime GARCH model cannot capture the persistence of regimes, all of the persistence in volatility is thrown into the persistence of an individual shock. Individual shocks then appear to take too long to die down to the average variance“ (Gray (1996a), S. 48).

Die Vernachlässigung von Regimewechseln in GARCH-Modellen resultiert damit auch im Falle der hier untersuchten Zeitreihen in der hinlänglich bekannten Überzeichnung autoregressiv bedingter Heteroskedastizität (Lamoureux und Lastrapes (1990), Cai (1994)). Ein Vergleich der unterschiedlich skalierten Abbildungen 3 und 4 verdeutlicht diese Überzeichnung insbesondere zum Zeitpunkt der EWS-Krise im Herbst 1992.

Wie in Kapitel II dargestellt, liegt als Resultat der rekursiven Schätzung von GRS-Modellen eine Zeitreihe bedingter Ex-ante-Regimewahrscheinlichkeiten  $p_{1t} = Pr[S_t = 1 | \Phi_{t-1}]$  vor, die ausschließlich auf der Grundlage der jeweils vorhandenen Informationsmenge berechnet wurden. Während solche Ex-ante-Wahrscheinlichkeiten zur Prognose herangezogen werden, geben geglättete Regimewahrscheinlichkeiten  $Pr[S_t = 1 | \Phi_T]$  darüber Auskunft, ob und wann in der Vergangenheit Regimewechsel aufgetreten sind. Sie lassen sich auf der Grundlage der gesamten Informationsmenge kalkulieren und können dank der rekursiven Eigenschaften von  $p_{1t}$  mit Hilfe eines Filters errechnet werden (Gray (1995c)). Abbildung 5 zeigt die aus der GRS-Schätzung mit zeitvariablen Übergangswahrscheinlichkeiten gewonnenen Ex-ante-Regimewahrscheinlichkeiten  $p_{1t}$  für den Dreimonatszinsatz.

Während des fünfzehnjährigen Untersuchungszeitraums sind immer wieder starke Regimeunsicherheiten aufgetreten, was sich an der hohen Variabilität der Regimewahrscheinlichkeit  $p_{1t}$  erkennen läßt. Besonders auffällig ist eine zu Beginn und gegen Ende der achtziger Jahre anhaltend hohe sowie eine in der Zwischenzeit und insbesondere seit 1994 anhaltend geringe Wahrscheinlichkeit für das volatile Regime 1. Beachtlich ist auch der sprunghafte Anstieg der Regimewahrscheinlichkeit im Herbst 1992 auf nahezu 100 Prozent nach einer längeren Zeit äußerst niedriger Volatilität.



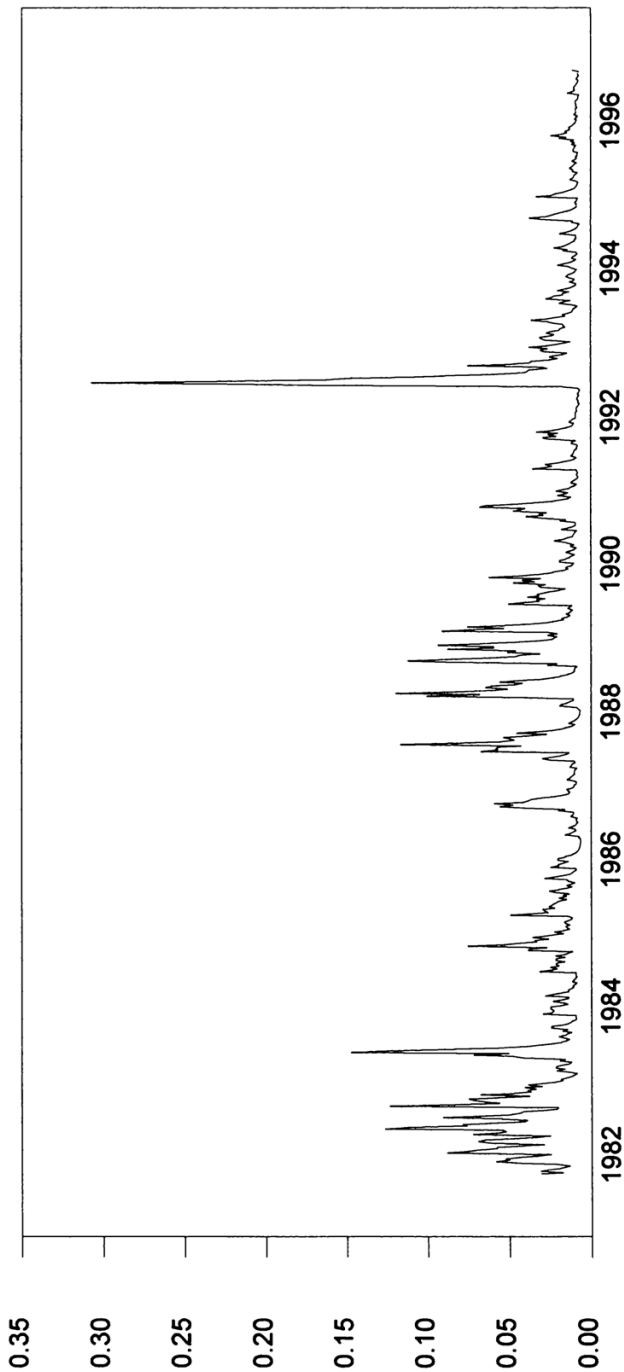


Abb. 3: Bedingte Varianz wöchentlicher Zinsänderungen  
GARCH(1,1)-Modell für den Dreimonatssinssatz am Euro-Markt

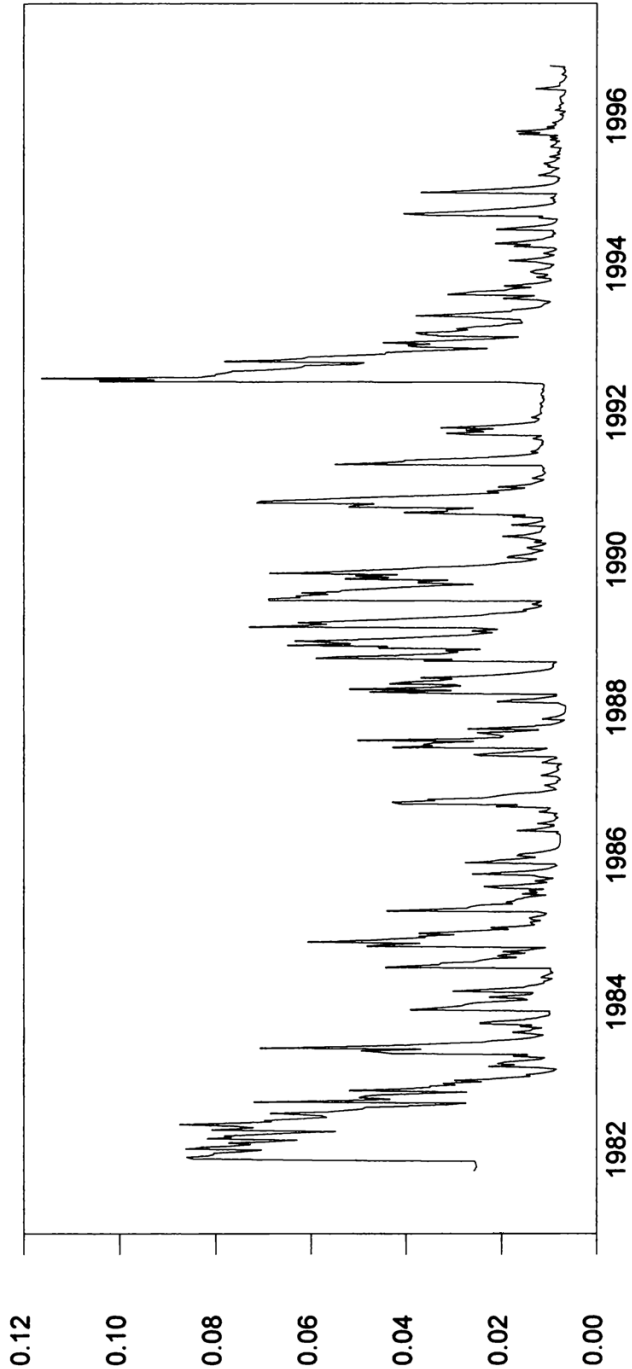


Abb. 4: Bedingte Varianz wöchentlicher Zinsänderungen  
GRS-Modell für den Dreimonatszinssatz am Euro-Markt

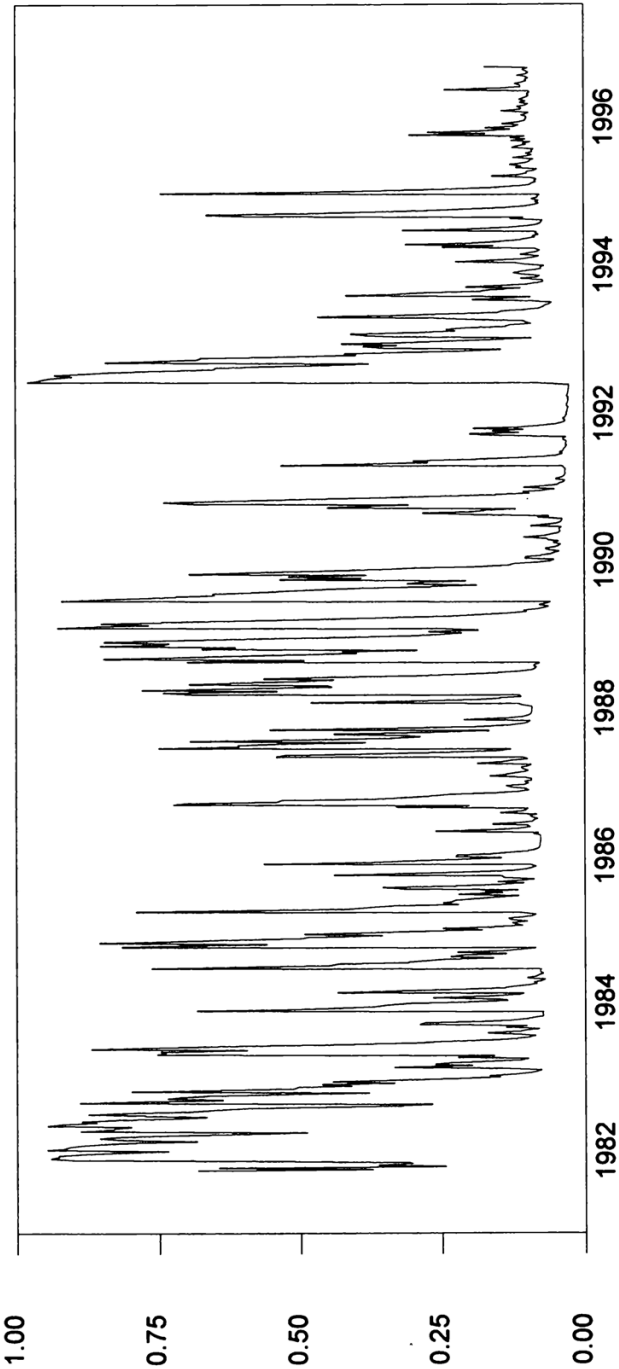


Abb. 5: Ex-ante-Regimewahrscheinlichkeiten (Regime 1)  
GRS-Modell für den Dreimonatssinssatz am Euro-Markt

Ein weiteres wichtiges Resultat der GRS-Schätzungen stellt die Signifikanz und quantitative Bedeutsamkeit des Volatility-Level-Link insbesondere im volatilen Regime 1 dar. Der Wert des Koeffizienten  $\sigma_1$  (Tabelle 3b) ist für beide Zinssätze in allen Modellvarianten ungefähr dreimal so hoch wie der Wert des Koeffizienten  $\sigma$  im SGRS-Modell (Tabelle 1). Da die bedingte Varianz in Regime 1 funktional von der Höhe des Zinssatzes abhängig ist, ist bei einem anhaltend hohen Zinsniveau auch die Zinsvolatilität persistent. Für den Einmonatszinssatz kann angesichts der insignifikanten GARCH-Koeffizienten in Regime 1 und der völligen Abwesenheit des Volatility-Level-Link in Regime 2 sogar von einem „Volatility-Level-Link-Regime“ und einem „GARCH-Regime“ gesprochen werden. Im Falle des dreimonatigen Zinssatzes ist der Volatility-Level-Link-Koeffizient auch im zweiten Regime signifikant, weist aber einen vergleichsweise geringen Wert auf.

Alle bislang diskutierten Ergebnisse gelten – von geringfügigen Unterschieden abgesehen – gleichermaßen für das GRS-Modell mit konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten  $P$  und  $Q$  wie für das GRS-Modell mit zeitvariablen, von der Höhe des Zinsniveaus abhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten. Das volatile Regime 1 ist vor allem im Falle des Einmonatszinssatzes weitaus weniger persistent ( $P = 0,64$ ) als Regime 2 ( $Q = 0,96$ ) und möglicherweise im Sinne von *Dahlquist* und *Gray* (1995) als „Realignment Regime“ interpretierbar. Abbildung 5 veranschaulicht das gleiche Phänomen ( $P = 0,85$ ,  $Q = 0,96$ ) für den Dreimonatszinssatz. Die Signifikanz sämtlicher GARCH- und Volatility-Level-Link-Parameter wird durch die Anwendung eines Likelihood-Ratio-Tests überprüft, der das GRS-Modell dem einfachen Markov-Switching-Modell aus Abschnitt III.3 gegenüberstellt. Die Teststatistik, welche unter der Nullhypothese mit sechs Freiheitsgraden  $\chi^2$ -verteilt ist, nimmt im Falle des Einmonatszinssatzes den Wert 37,53 und im Falle des Dreimonatszinssatzes den Wert 12,54 an. Das GRS-Modell ist damit signifikant auf dem 1-prozentigen bzw. 10-prozentigen Niveau. Eine zeitvariable Modellierung der Übergangswahrscheinlichkeiten erhöht allerdings nur im Falle des Einmonatszinssatzes die Leistungsfähigkeit des GRS-Modells: Die unter der Nullhypothese mit zwei Freiheitsgraden  $\chi^2$ -verteilte Statistik des Likelihood-Ratio-Tests nimmt den Wert 9,24 an, so daß das Modell mit konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten  $P$  und  $Q$  auf einem 1-prozentigen Niveau abgelehnt wird. Die positiven Werte der geschätzten Parameter  $d_1$  und  $d_2$  erscheinen allerdings ökonomisch nicht plausibel. Sie besagen, daß die Wahrscheinlichkeit von Regimewechseln mit einem Anstieg des Zinsniveaus abnimmt, unabhängig davon, in welchem

Regime sich die Volkswirtschaft momentan befindet. Im Falle des dreimonatigen Zinssatzes ist die Teststatistik gleich 2,95. Die Restriktion konstanter Übergangswahrscheinlichkeiten ist somit adäquat.

#### IV. Volatilitätsprognosen

Mit zunehmender Tendenz werden alternative Volatilitätsmodelle auch hinsichtlich ihrer Prognoseleistung verglichen (West und Cho (1995)).<sup>9</sup> Grundsätzlich weisen ARCH-Modelle insbesondere über kurze Prognosehorizonte eine recht gute Performance auf, wenngleich eine signifikante Überlegenheit gegenüber einfachen Ansätzen wie etwa der Extrapolation historischer Volatilitätsdurchschnitte oder linearen Regressionen häufig nicht feststellbar ist (Brailsford und Faff (1996)). Eine möglichst exakte Prognose von Zinsvolatilitäten ist vor allem für die Bewertung zins-sensitiver Aktiva sowie für das Zinsrisikomanagement von Interesse. Darüber hinaus gelangt man durch die Berechnung bedingter Varianzen zu realistischeren Prognoseintervallen, was die Vorhersage von Zinssatzänderungen anbelangt.

Zur Beurteilung der Prognosegüte aller fünf oben geschätzten Modelle wurden jeweils Zeitreihen der bedingten Varianz über unterschiedliche Zeiträume berechnet. Die bedingte Varianz  $fv_t = E_{t-1}[\varepsilon_t^2]$  stellt eine Ein-Schrittprognose des quadrierten Residuums der nachfolgenden Periode  $av_t = \varepsilon_t^2$  (mit  $\varepsilon_t = \Delta r_t - E_{t-1}[\Delta r_t]$ ) dar, so daß sich auf der Grundlage der Zeitreihe des Prognosefehlers ( $av_t - fv_t$ ) die bekannten Fehlermaße Root Mean Square Error (RMSE) und Mean Absolute Error (MAE) errechnen lassen (Gray (1996a), S. 54).

Im Rahmen von „In-sample-Prognosen“, deren Ergebnisse in Tabelle 4 dokumentiert sind, wurden die jeweils über den gesamten Untersuchungszeitraum geschätzten Modelle (vgl. dazu die Tabellen 1 bis 3) zur Volatilitätsprognose herangezogen. Als Prognosezeiträume wurden dabei (1) der gesamte Stützbereich (1982 bis 1996), (2) der die EWS-Krise einschließende Zeitraum von 1992 bis 1993 sowie (3) der vergleichsweise wenig turbulente Zeitraum von 1994 bis 1996 ausgewählt. Dabei zeigt sich sowohl für den Einmonatszinsatz als auch für den Dreimonatszinsatz gemessen am RMSE eine klare Überlegenheit des GRS-Modells in nahezu sämtlichen Prognoseexperimenten. Der auf der Grundlage von

<sup>9</sup> Als das zur Zeit sicherlich bedeutendste Einsatzgebiet von Volatilitätsprognosen in der Praxis läßt sich die Bewertung von Optionen auf Aktien und Devisen identifizieren (Noh, Engle und Kane (1995)).



Volatilitätsprognosen des Einmonatszinssatzes errechnete RMSE läßt sich durch die Verwendung des GRS-Modells anstelle des generell schlecht prognostizierenden GARCH(1,1)-Modells um etwa zehn Prozent reduzieren. Im Falle des weniger volatilen Dreimonatszinssatzes beträgt die prozentuale Verbesserung allerdings lediglich zwei bis drei Prozent. Zieht man den MAE als Gütekriterium heran, so fällt der Vergleich noch eindeutiger aus. In jedem Prognoseexperiment erweist sich zumindest eine der beiden GRS-Spezifikationen als überlegen.

In den für praktische Fragestellungen relevanteren Out-of-sample-Prognosen wurden die Modelle jeweils bis zum Beginn des Prognosezeitraums geschätzt. Die Zeitreihen der bedingten Varianz wurden dann für den gewählten Prognosezeitraum konstruiert, ohne dabei die Parameter durch eine erneute Modellschätzung zu aktualisieren. Im ersten Prognoseexperiment wurden die Modelle auf der Datenbasis von 1982 bis 1989 geschätzt, während die Prognosen für den Zeitraum von 1990 bis 1996 erstellt wurden. Die beiden weiteren Prognosezeiträume sind mit denen des In-sample-Experiments identisch, wobei die Modellschätzung hier ausschließlich auf Informationen des Zeitraums von 1982 bis 1991 bzw. von 1982 bis 1993 basiert. Gemessen am MAE liefert das GRS-Modell mit konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten in allen Fällen die exaktesten Out-of-sample-Prognosen. Speziell für die Periode von 1994 bis

*Tabelle 4*  
**In-Sample-Ein-Schrittprognosen**

	1982 - 1996 (772) <sup>a</sup>		1992 - 1993 (105) <sup>a</sup>		1994 - 1996 (156) <sup>a</sup>	
	Euro-Monatszinssatz					
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
GARCH(1,1)	0,1168 (5)	0,0460 (4)	0,1482 (4)	0,0589 (4)	0,0210 (3)	0,0154 (3)
SGRS	0,1112 (4)	0,0502 (5)	0,1429 (3)	0,0694 (5)	0,0236 (5)	0,0198 (5)
MARKOV	0,1090 (3)	0,0405 (3)	0,1567 (5)	0,0539 (2)	0,0227 (4)	0,0165 (4)
GRS CP	0,1065 (2)	0,0389 (1)	0,1348 (1)	0,0519 (1)	0,0187 (2)	0,0134 (1)
GRS TVP	0,1061 (1)	0,0390 (2)	0,1382 (2)	0,0542 (3)	0,0183 (1)	0,0135 (2)
	Euro-Dreimonatszinssatz					
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
GARCH(1,1)	0,0509 (5)	0,0255 (4)	0,0778 (2)	0,0329 (2)	0,0141 (3)	0,0106 (3)
SGRS	0,0505 (4)	0,0272 (5)	0,0771 (1)	0,0369 (5)	0,0147 (4)	0,0116 (4)
MARKOV	0,0503 (3)	0,0248 (3)	0,0845 (5)	0,0330 (3)	0,0155 (5)	0,0118 (5)
GRS CP	0,0495 (1)	0,0244 (1)	0,0807 (3)	0,0322 (1)	0,0140 (2)	0,0098 (1)
GRS TVP	0,0499 (2)	0,0247 (2)	0,0830 (4)	0,0331 (4)	0,0138 (1)	0,0099 (2)

<sup>a</sup>: Anzahl der generierten Prognosen. Die in Klammern aufgeführten Werte geben die Rangfolge der Verfahren hinsichtlich der Prognosegüte an, wobei das überlegene Verfahren mit dem Wert (1) gekennzeichnet ist

Tabelle 5  
Out-Of-Sample-Ein-Schrittprognosen

	1990 - 1996 (365) <sup>a</sup>		1992 - 1993 (105) <sup>a</sup>		1994 - 1996 (156) <sup>a</sup>	
	Euro-Monatszinssatz					
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
GARCH(1,1)	0,0999 (1)	0,0388 (2)	0,1419 (1)	0,0549 (3)	0,0262 (2)	0,0231 (2)
SGRS	0,1049 (5)	0,0551 (5)	0,1546 (3)	0,0671 (5)	0,0398 (5)	0,0388 (5)
MARKOV	0,1016 (3)	0,0412 (3)	0,1556 (4)	0,0537 (2)	0,0264 (3)	0,0243 (3)
GRS CP	0,1031 (4)	0,0288 (1)	0,1585 (5)	0,0469 (1)	0,0197 (1)	0,0145 (1)
GRS TVP	0,1014 (2)	0,0432 (4)	0,1544 (2)	0,0565 (4)	0,0315 (4)	0,0301 (4)
	Euro-Dreimonatszinssatz					
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
GARCH(1,1)	0,0452 (1)	0,0221 (2)	0,0751 (1)	0,0317 (2)	0,0182 (3)	0,0162 (3)
SGRS	0,0510 (5)	0,0294 (5)	0,0872 (3)	0,0371 (5)	0,0234 (4)	0,0224 (5)
MARKOV	0,0503 (4)	0,0221 (3)	0,0874 (4)	0,0324 (3)	0,0159 (2)	0,0132 (2)
GRS CP	0,0497 (3)	0,0183 (1)	0,0889 (5)	0,0310 (1)	0,0139 (1)	0,0104 (1)
GRS TVP	0,0483 (2)	0,0262 (4)	0,0856 (2)	0,0342 (4)	0,0225 (5)	0,0213 (4)

Siehe die Erläuterungen zu Tabelle 4.

1996 kann eine mehr als 35-prozentige Verbesserung gegenüber dem GARCH(1,1)-Modell konstatiert werden. Legt man den RMSE zugrunde, so beträgt die Verbesserung hier ungefähr 25 Prozent. Allerdings zeigt sich unter Berücksichtigung des RMSE sowohl für den Einmonats- als auch für den Dreimonatszinssatz in den Prognoseperioden von 1990 bis 1996 sowie von 1992 bis 1993 eine Überlegenheit des GARCH(1,1)-Modells.

Vor dem Hintergrund, daß komplexere Modelle infolge einer besseren Anpassung an die Daten eine häufig schlechtere Out-of-sample-Güte besitzen (Overfitting), ist die Leistungsfähigkeit der GRS-Modelle, die gegenüber dem GARCH(1,1)-Modell sieben bzw. neun zusätzliche Parameter enthalten, beachtlich. Aufgrund der zu hoch ausgewiesenen Volatilitätspersistenz in GARCH-Modellen kann im Falle von Mehrschrittprognosen eine noch deutlichere Überlegenheit von GRS-Modellen vermutet werden. Prinzipiell enttäuschend ist die Prognoseleistung der SGRS-Modelle sowie der Markov-Switching-Modelle.

## V. Zusammenfassung und Schlußfolgerung

Dieser Beitrag vergleicht alternative Verfahren zur Modellierung und Prognose von Zinsvolatilitäten. Im Mittelpunkt steht das kürzlich von Gray (1996a, 1996b) entwickelte und in Kapitel II dargestellte Generalized Regime-Switching-Modell (GRS-Modell), welches gegenüber bisherigen Ansätzen erhebliche Vorteile aufweist: (1) Das GRS-Modell schließt eine Vielzahl bekannter Spezifikationen wie GARCH und Markov Switching sowie den aus zeitstetigen Modellen motivierten Zusammenhang zwischen bedingter Varianz und Zinsniveau (Volatility-Level-Link) als Spezialfälle ein und erlaubt damit eine sehr flexible Formulierung der Volatilitätsdynamik. (2) Im Gegensatz zu vielen bekannten Markov-Switching-Modellen können im GRS-Modell sämtliche Parameter zeitvariabel formuliert werden, wodurch die Modellierung bedingter Heteroskedastizität auch innerhalb der Regime ermöglicht wird. (3) Das Problem der Pfadabhängigkeit, welches bislang eine Kombination von GARCH- und Markov-Switching-Modellen verhinderte, konnte für das GRS-Modell gelöst werden. (4) Aufgrund seiner rekursiven Repräsentation läßt sich das GRS-Modell – ähnlich wie ARCH- und GARCH-Modelle – mit einem vergleichsweise geringen Aufwand implementieren.

Im empirischen Teil der Arbeit wurde die Leistungsfähigkeit des GRS-Modells anhand eines Vergleichs mit GARCH-Modellen sowie mit traditionellen Markov-Switching-Modellen überprüft. Im Rahmen einer Analyse der Zinssätze auf einmonatige und dreimonatige Ausleihungen am Euro-DM-Markt im Zeitraum von 1982 bis 1996 zeigt das GRS-Modell gegenüber diesen herkömmlichen Ansätzen eine deutlich bessere statistische Anpassung (Kapitel III). Bei den in Kapitel IV dokumentierten Out-of-sample-Prognosen erweist sich das GRS-Modell als konkurrenzfähig und insbesondere für den Zeitraum von 1994 bis 1996 als überlegen.

## Literatur

Bera, Anil K./Higgins, Matthew L. (1993): ARCH Models: Properties, Estimation and Testing, *Journal of Economic Surveys*, Vol. 7, S. 305 - 366. – Bollerslev, Tim (1986): Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, Vol. 31, S. 307 - 327. – Bollerslev, Tim/Chou, Ray Y./Kroner, Kenneth F. (1992): ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence, *Journal of Econometrics*, Vol. 52, S. 5 - 59. – Bollerslev, Tim/Wooldridge, Jeffrey M. (1992): Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances, *Econometric Reviews*, Vol. 11, S. 143 - 172. – Bollerslev, Tim/Engle, Robert F./Nelson, Daniel B. (1994): ARCH

Models, Handbook of Econometrics, Volume IV, Chapter 49, S. 2959 - 3038. – *Brailsford*, Timothy J./*Faff*, Robert W. (1996): An Evaluation of Volatility Forecasting Techniques, *Journal of Banking & Finance*, Vol. 20, S. 419 - 438. – *Brennan*, Michael J./*Schwartz*, Eduardo S. (1980): Analyzing Convertible Bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 15, S. 907 - 929. – *Cai*, Jun (1994): A Markov Model of Switching-Regime ARCH, *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 12, S. 309 - 316. – *Chan*, K. C./*Karolyi*, G. Andrew/*Longstaff*, Francis A./*Sanders*, Anthony B. (1992): An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate, *Journal of Finance*, Vol. XLVII, S. 1209 - 1227. – *Cox*, John C./*Ingersoll*, Jonathan E./*Ross*, Stephen A. (1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, Vol. 53, 385 - 407. – *Dahlquist*, Magnus/*Gray*, Stephen F. (1995): Regime-Switching and Interest Rates in the European Monetary System, Working Paper (Fuqua School of Business, Duke University). – *Dewachter*, Hans (1996): Modelling Interest Rate Volatility: Regime-Switches and Level Links, *Weltwirtschaftliches Archiv*, Vol. 132, S. 236 - 257. – *Engel*, Charles/*Hamilton*, James D. (1990): Long Swings in the Dollar: Are They in the Data and Do Markets Know It?, *American Economic Review*, Vol. 80, S. 689 - 713. – *Engle*, Robert F. (1982): Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, Vol. 50, S. 987 - 1008. – *Engle*, Robert F./*Lillien*, David M./*Robins*, Russell P. (1987): Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Modell, *Econometrica*, Vol. 55, S. 391 - 407. – *Engle*, Robert F./*Ng*, Victor K./*Rothschild*, Michael (1990): Asset Pricing with a Factor-ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills, *Journal of Econometrics*, Vol. 45, S. 213 - 237. – *Friedman*, Benjamin M./*Laibson*, D. I. (1989): Economic Implications of Extraordinary Movements in Stock Prices, *Brookings Papers on Economic Activity*, Vol. 2/1989, S. 137 - 189. – *Gray*, Stephen F. (1996a): Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process, *Journal of Financial Economics*, Vol. 42, S. 27 - 62. – *Gray*, Stephen F. (1996b): Regime-Switching in Australian Short-Term Interest Rates, *Accounting and Finance*, Vol. 36, S. 65 - 88. – *Gray*, Stephen F. (1996c): An Analysis of Conditional Regime-Switching-Models, Working paper (Fuqua School of Business, Duke University). – *Hamilton*, James D. (1988): Rational-Expectations Econometric Analysis of Changes in Regime. An Investigation of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 12, S. 385 - 423. – *Hamilton*, James D. (1989): A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrica*, Vol. 57, S. 357 - 384. – *Hamilton*, James D. (1990): Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime, *Journal of Econometrics*, Vol. 45, S. 39 - 70. – *Hamilton*, James D./*Susmel*, Raul (1994): Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime, *Journal of Econometrics*, Vol. 64, S. 307 - 333. – *Hansen*, Bruce E. (1992): The Likelihood Ratio Test under Nonstandard Conditions: Testing the Markov Switching Model of GNP, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 7, S. S61-S82. – *Hansen*, Bruce E. (1996): Erratum: The Likelihood Ratio Test under Nonstandard Conditions: Testing the Markov Switching Model of GNP, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 11, S. 195 - 198. – *Lamoureux*, Christopher G./*Lastrapes*, William D. (1990): Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model, *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 8, S. 225 - 234. – *Lin*, Jin-Lung/*Tsay*, Ruey S. (1996): Co-Integration Constraint and Forecasting: An Empirical Examination, *Journal of Applied Eco-*



nometrics, Vol. 11, S. 519 - 538. – *Lütkepohl*, Helmut (1997): Statistische Modellierung von Volatilitäten, Allgemeines Statistisches Archiv, Band 81, S. 62 - 84. – *Neumann*, Manfred J. M./*von Hagen*, Jürgen (1993): Monetary Policy in Germany, in: *Fratianni*, Michele U./*Salvatore*, Dominik (eds.): Monetary Policy in Developed Economies, Handbook of Comparative Economic Policies, Vol. 3, Westport/London. – *Noh*, Jaesun/*Engle*, Robert F./*Kane*, Alex (1995): Forecasting Volatility and Option Prices of the S&P 500 Index, in: *Engle*, Robert F. (ed.): ARCH, Selected Readings, Oxford University Press, S. 314 - 331. – *Palm*, Franz C. (1996): GARCH Models of Volatility, in: *Maddala*, G. S./*Rao*, C. R. (eds.): Handbook of Statistics, Vol. 14, S. 209 - 240. – *Trevor*, Rob (1994): GARCH Models in RATS, Ratsletter, Vol. 9, S. 2 - 4. – *West*, Kenneth D./*Cho*, Dongchul (1995): The predictive ability of several models of exchange rate volatility, Journal of Econometrics, Vol. 69, S. 367 - 391. – *White*, Halbert (1980): A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity, Econometrica, Vol. 48, S. 817 - 838. – *Wu*, Yangru/*Zhang*, Hua (1996): Mean Reversion in Interest Rates: New Evidence from a Panel of OECD Countries, Journal of Money, Credit, and Banking, Vol. 28, S. 604 - 621.

## Zusammenfassung

### **Prognose von Zinsvolatilitäten mit Regime-Switching-Modellen: Eine empirische Analyse des Euro-DM-Geldmarktes**

Dieser Beitrag untersucht die Eignung des von Gray (1996a, 1996b) vorgeschlagenen Generalized-Regime-Switching-(GRS-)Modells für die Modellierung und Prognose von Zinsvolatilitäten am Euro-DM-Markt. Im theoretischen Teil der Arbeit wird das GRS-Modell zunächst vorgestellt. Dabei zeigt sich, daß viele bekannte Modelle wie GARCH und Markov Switching als restringierte Varianten des GRS-Modells betrachtet werden können. Im empirischen Vergleich mit diesen traditionellen Ansätzen erweist sich das GRS-Modell in der Beschreibung der Volatilitätsdynamik sowohl des Einmonats- als auch des Dreimonatszinsatzes als die überlegene Spezifikation. Anhand von Ein-Schrittprognosen kann darüber hinaus eine gute Out-of-sample-Prognoseleistung des GRS-Modells festgestellt werden. Ungeachtet seiner Komplexität läßt sich das GRS-Modell aufgrund seiner rekursiven Repräsentation mit einem geringen Aufwand implementieren. (JEL C22, C53, E43, G12)

## Summary

### **Predicting Interest Rate Volatility with Regime-Switching Models: An Empirical Analysis of the Euro-Deutschmark Money Market**

This contribution analyses the usefulness of the Generalized Regime-Switching-(GRS)-Model proposed by Gray (1996a, 1996b) for modelling and forecasting interest rate volatility in the Euro-Deutschmark money market. The theoretical part of the contribution begins by introducing the GRS model. It turns out that many known models such as GARCH and Markov switching may be regarded as a

Kredit und Kapital 3/1998



restricted variant of the GRS model. An empirical comparison with the traditional approaches shows that the GRS model is the superior option for describing the dynamics of the interest rate volatility of both one-month and three-month money. Moreover, one-step forecasts suggest a good out-of-sample performance of the GRS model. Irrespective of the GRS model's complexity, its recursive representation allows it to be implemented easily.

### Résumé

#### **Prévision des volatilités des taux d'intérêt avec des modèles de Regime Switching: une analyse empirique du marché monétaire de l'Euro-DM**

Cet article examine si le modèle «Generalized Regime Switching» (GRS) proposé par Gray (1996a, 1996b) est adéquat pour modéliser et prévoir les volatilités des taux d'intérêt sur le marché Euro-DM. Dans la partie théorique de ce travail, le modèle GRS est d'abord présenté. On constate que beaucoup de modèles connus comme ceux de GARCH et de Markov peuvent être considérés comme variantes restreintes du modèle GRS. En comparant empiriquement le modèle GRS avec ces modèles traditionnels, on constate qu'il décrit de manière plus spécifique la dynamique de volatilité des taux d'intérêt autant à un mois qu'à trois mois. A l'aide de projections à une séquence, on constate que le modèle GRS peut en outre offrir de bonnes prévisions hors-échantillon. Sans tenir compte de sa complexité, le modèle GRS peut s'appliquer facilement grâce à sa représentation récursive.