

Die Bedeutung der Preiserwartungen für die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze

Von Heino Faßbender, Bonn

Im folgenden werden zwei Problemkreise untersucht. Zunächst gilt das Interesse dem Zusammenhang zwischen Preiserwartungen und Zinsbildung am Kapitalmarkt. Anschließend wird aus den auf der Basis der Preiserwartungen gebildeten Zinserwartungen die Zinsstruktur erklärt. Damit ist der theoretische Teil abgeschlossen. Im empirischen Teil werden an Hand von hierfür berechneten Zinsstrukturdaten für die BRD die Koeffizienten des theoretischen Modells getestet, die unter anderem Aufschluß über den Grad der vorhandenen Geldillusion der am Kapitalmarkt beteiligten Wirtschaftssubjekte geben.

I. Theoretische Analyse

1. Der Zusammenhang zwischen Preis- und Zinserwartungen

Eine erste Annahme über den Zusammenhang zwischen Nominalzins und Preisänderungsrate macht Irving Fisher¹

$$(1) \quad R_t = R_t^r + w_{E,t}^P + w_{E,t}^P C_t .$$

Hierbei ist R_t der in t geltende Nominalzinssatz im Sinne einer Effektivrendite eines festverzinslichen Wertpapiers, nicht etwa der Couponsatz. R_t^r ist der in t geltende Realzinssatz, $w_{E,t}^P$ ist die erwartete Änderungsrate des Preisniveaus definiert durch Gleichung (2):

$$(2) \quad w_{E,t}^P = \frac{P_{t+1}^E - P_t}{P_t} .$$

Hierin ist P_{t+1}^E die für den Zeitpunkt $t + 1$ erwartete Höhe des Preisniveaus, während P_t die in t beobachtete Höhe des Preisniveaus ist. Die Größe C_t in Gleichung (1) ist die in t anfallende Zinszahlung.

¹ I. Fisher, *The Rate of Interest*, New York 1930, deutsche Übersetzung, *Die Zinstheorie*, Jena 1932, S. 327 - 366.

Somit geht Gleichung (1) von einem Kapitalmarkt aus, an dem vollständig rationale Gläubiger ihr Kapital anbieten. Ein rationaler Gläubiger, der nicht von der Geldillusion befangen ist, verlangt in dem von ihm für die Kapitalhergabe geforderten Zins R_t auch ein Entgelt für den Kaufkraftverlust des Kapitals in Höhe des 2. Summanden auf der rechten Seite von Gleichung (1) sowie ein Entgelt für den Kaufkraftverlust der vereinbarten Zinszahlung C_t . Somit ist Gleichung (1) eine für ein klassisches Modell mit rational handelnden Wirtschaftssubjekten typische Hypothese.

Im Gegensatz hierzu wird im folgenden von einer Welt ausgegangen, in der nur im Grenzfall die Wirtschaftssubjekte vollständige Transparenz haben. Mithin wird als Hypothese für den Zusammenhang zwischen Preiserwartungen und Zinserwartungen davon ausgegangen, daß nur ein Teil der erwarteten Preisänderungen in die erwartete Zinsänderung Eingang findet²:

$$(3) \quad \Delta R_{t,j}^E = q_j \Delta P_{t,j}^E .$$

Hierin ist q_j eine Proportionalitätskonstante, die Auskunft darüber gibt, wieviel Prozent der von Wirtschaftssubjekt j erwarteten Änderung des Preisniveaus zu einer Änderung der Zinserwartung führt. Diese Proportionalitätskonstante kann Werte zwischen 0 und 1 einschließlich annehmen:

$$(4) \quad 0 \leq q_j \leq 1 .$$

In dem einen Extremfall $q = 0$ liegt vollständige Geldillusion vor: Erwartete Preisniveauänderungen führen nicht zu der Erwartung einer Zinssatzänderung. Der andere Extremfall mit $q = 1$ charakterisiert einen Gläubiger, der völlig frei von Geldillusion ist: Erwartete Preisniveauänderungen führen zu gleich hoch erwarteten Zinssatzänderungen. q_j ist somit eine Maßgröße für den Grad der Geldillusion des Wirtschaftssubjektes j .

Die erwartete Zinssatzänderung in Gleichung (3) ist definiert durch:

$$(5) \quad \Delta R_{1,t,j}^E = e_{1,t+1,t,j} - R_{1,t} , \quad j = 1, \dots, J .$$

² H. Faßbender, Zur Theorie und Empirie der Fristigkeitsstruktur der Zinssätze, Berlin 1973, S. 120.

Hierin ist $e_{1, t+1, t, j}$ der von Wirtschaftssubjekt j im Zeitpunkt t für den Zeitpunkt $t + 1$ erwartete Zins für eine Forderung mit einjähriger Laufzeit. Die zusätzlich eingeführten Indizes 1 geben also an, daß sich die Zinssätze auf einjährige Forderungen beziehen. Zusätzlich wird in Gleichung (5) rechts vom Komma angegeben, daß sich J Wirtschaftssubjekte am Kapitalmarkt befinden.

Entsprechend ist die erwartete Preisänderung in Gleichung (3) definiert durch:

$$(6) \quad \Delta P_{t, j}^E = P_{t+1, t, j}^E - P_t, \quad j = 1, \dots, J.$$

Wird somit Gleichung (3) unter Verwendung von (5) und (6) aufgelöst nach dem für $t + 1$ in t erwarteten Einperiodenzinssatz, erhält man

$$(7) \quad e_{1, t+1, t, j} = q_j(P_{t+1, t, j}^E - P_t) + R_{1, t}.$$

Um die in dieser Gleichung auftretende nicht beobachtbare Größe $P_{t+1, t, j}^E$ auf beobachtbare Größen zurückzuführen, wird angenommen, daß die Erwartung, die in t für das Preisniveau in $t + 1$ angestellt wird, sich additiv zusammensetzt aus der Erwartung, die in $t - 1$ für das entsprechende Preisniveau in t gehalten wurde, und einer Korrektur in Höhe des von t unabhängigen Bruchteiles α_j des Erwartungsirrtums von $t - 1$, der sich in t herausstellt:

$$(8) \quad P_{t+1, t, j}^E = \alpha_j(P_t - P_{t, t-1, j}^E) + P_{t, t-1, t}^E.$$

Durch eine unendliche Substitution der erwarteten Ausdrücke rechts durch einen (8) entsprechenden Ausdruck erhält man das erwartete Preisniveau, ausgedrückt in tatsächlich realisierten Preisniveaus³:

$$(9) \quad P_{t+1, t, j}^E = \alpha_j \sum_{\tau=0}^{\infty} (1 - \alpha_j)^{\tau} P_{t-\tau}, \quad j = 1, \dots, J.$$

Dies in (7) eingesetzt ergibt:

$$(10) \quad e_{1, t+1, t, j} = q_j \left[\alpha_j \sum_{\tau=0}^{\infty} (1 - \alpha_j)^{\tau} P_{t-\tau} - P_t \right] + R_{1, t}.$$

Diese Bestimmung für den erwarteten Zinssatz wird im folgenden Abschnitt in das Zinsstrukturmodell eingesetzt.

³ H. Faßbender, S. 78 f.

2. Theoretische Erklärung der Zinsstruktur

Im folgenden wird die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze für einen gegebenen Einperiodenzinssatz aus einer Marktgleichgewichtsbedingung bestimmt. Unter der Fristigkeitsstruktur der Zinssätze hat man die Gesamtheit aller in einem Zeitpunkt t geltenden effektiven Zinssätze für Forderungen, die sich nur durch ihre Restlaufzeit unterscheiden, zu verstehen⁴. Die folgende Analyse betrachtet allerdings nur eine reduzierte Fristigkeitsstruktur, die aus einem Einperioden- und einem Zweiperiodenzinssatz besteht. Der erstere wird im folgenden auch der kurz- und der zweite der langfristige Zinssatz genannt. Somit besteht die Aufgabe der Untersuchung in der Bestimmung von $R_{2,t}$, welches identisch ist mit der Bestimmung des von dieser in t geltenden Zinsstruktur für $t + 1$ implizierten Terminzinssatzes, der durch die folgende Gleichung definiert wird:

$$(11) \quad r_{1,t+1,t} = \frac{(1 + R_{2,t})^2}{1 + R_{1,t}} - 1 .$$

Somit gibt dieser Terminzinssatz an, mit welchem Prozentsatz der Erlös aus der Einperiodenanlage in der zweiten Periode verzinst werden muß, damit diese zweimalige Einperiodenanlage einen gleich hohen Ertrag bringt wie die einmalige Zweiperiodenanlage. Dieser Terminzins ist somit zu bestimmen⁵. Hierzu wird ein Modell von *Bierwag* und *Grove*⁶ verwendet.

Zuerst wird bestimmt, welche Anteile a_L und a_K die lang- und kurzfristigen Wertpapiere am Gesamtportfolio des einzelnen Investors haben. Dieser sei bestrebt, seinen Nutzen, der von dem Erwartungswert und der Varianz des Ertrages seines Gesamtportfolios abhängt, zu maximieren:

$$(12) \quad U = U(\bar{E}(a_K), s^2(a_K)) \rightarrow \max_{a_K} !$$

Hierin ist U der Nutzen, \bar{E} das erste und s^2 das zweite Moment der Wahrscheinlichkeitsverteilung des in t unbekanntes Gesamtertrages des

⁴ H. *Faßbender*, S. 21.

⁵ Dieser Terminzins wurde von der klassischen Erwartungstheorie als vom Markt in t für $t + 1$ erwarteter Einperiodenzinssatz interpretiert; vgl. z. B. J. W. *Conard*, *Introduction to the Theory of Interest*, Berkeley 1959, S. 294 bis 360.

⁶ G. O. *Bierwag* u. M. A. *Grove*, *A Model of the Term Structure of Interest Rates*, in: *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 49 (1967), S. 50 - 62.

Portfolios, der mit E bezeichnet wird. Diese beiden Momente hängen nur noch von einem Anteil, z. B. a_K , ab, da die Budgetrestriktion

$$(13) \quad a_K + a_L = 1$$

gilt. Der Gesamtertrag lautet:

$$(14) \quad E = (1 - a_K) r_{1, t+1, t} (1 + R_{1, t}) + a_K e_{1, t+1, t} (1 + R_{1, t}) \\ = [1 + R_{1, t}] [r_{1, t+1, t} + a_K (e_{1, t+1, t} - r_{1, t+1, t})]$$

Hierin ist $e_{1, t+1, t}$ der aus dem ersten Abschnitt her bekannte erwartete Einperiodenzinssatz, der wahrscheinlichkeitsverteilt sei mit den ersten beiden Momenten e^+ und S^2 . Da $e_{1, t+1, t}$ eine Zufallsvariable ist, ist auch E eine Zufallsvariable, und zwar mit den beiden ersten Momenten:

$$(15) \quad \bar{E} = [1 + R_{1, t}] [r_{1, t+1, t} + a_K (e^+ - r_{1, t+1, t})]$$

und

$$(16) \quad s^2 = a_K^2 (1 + R_{1, t})^2 S^2$$

Für die Maximierung des Nutzens ist notwendig, daß

$$(17) \quad \frac{dU}{da_K} = \frac{\partial U}{\partial \bar{E}} \cdot \frac{d\bar{E}}{da_K} + \frac{\partial U}{\partial s^2} \cdot \frac{ds^2}{da_K} = 0$$

oder daß

$$(18) \quad - \frac{\partial U / \partial \bar{E}}{\partial U / \partial s^2} = \frac{ds^2 / da_K}{d\bar{E} / da_K}$$

Setzt man die Ableitungen der Gleichungen (15) und (16) bezüglich a_K in Gleichung (18) ein und löst nach a_K auf, so erhält man die optimale Aufteilung des Portfolios als Lösung des Entscheidungsproblems:

$$(19) \quad a_K = \frac{m}{S^2} \cdot \frac{e^+ - r_{1, t+1, t}}{1 + R_{1, t}}$$

Hierin hat m folgende Bedeutung:

$$(20) \quad m = - \frac{\partial U / \partial \bar{E}}{2 \partial U / \partial s^2}$$

welches somit ein Maß für die Kühnheit des Investors ist.

V_j sei das insgesamt von Investor j in lang- und kurzfristigen Wertpapieren anzulegende Vermögen. Versieht man nun in Gleichung (19)

alle nur für Investor j gültigen Größen mit einem Index j , erhält man nach Multiplikation dieser Gleichung mit V_j den Nachfragebetrag dieses Investors nach kurzfristigen Wertpapieren:

$$(21) \quad K_j = a_{K,j} V_j = m_j V_j \frac{e_j^+ - r_{1,t+1,t}}{(1 + R_{1,t}) S_j^2}.$$

Zugleich ist wegen Gleichung (13) auch der von Investor j nach langfristigen Wertpapieren nachgefragte Betrag bekannt. Geht man davon aus, daß sich Schuldner nach analogen Nutzenkriterien verhalten und versieht man deren Verschuldungsbeträge mit einem negativen Vorzeichen und führt für diese die entsprechende Multiplikation der analogen Gleichung (19) mit diesem negativen Schuldbetrag durch, so erhält man als Gleichgewichtsbedingung für den kurzfristigen Markt:

$$(22) \quad \sum_{j=1}^J K_j = 0.$$

Nimmt man an, daß insgesamt gleichviel Schuld angeboten wie nachgefragt wird, daß also

$$(23) \quad \sum_{j=1}^J V_j = 0$$

wird, sichert die Gleichgewichtsbedingung (22) ebenfalls ein Gleichgewicht am langfristigen Markt. Setzt man (21) ein und löst dieses nach dem die Zinsstruktur bestimmenden Einperiodenterminzinssatz auf, erhält man:

$$(24) \quad r_{1,t+1,t} = \sum_{j=1}^J e_j^+ v_j,$$

in der die Größe v_j die folgende Bedeutung hat:

$$(25) \quad v_j = \frac{\frac{m_j V_j}{S_j^2}}{\sum_{i=1}^J \frac{m_i V_i}{S_i^2}}, \quad \sum_{j=1}^J v_j = 1.$$

Der Terminzins in der Zinsstruktur wird somit aus einem gewogenen arithmetischen Mittel der Erwartungen im Sinne von Erwartungswerten gebildet. Die Gewichte enthalten die für das Verhalten und die Bedeutung des Marktteilnehmers am Wertpapiermarkt relevanten subjektiven

Merkmale. Für die Erklärung der Erwartungsbildung werden nun die Kenntnisse aus dem ersten Abschnitt verwendet.

Interpretiert man $e_{1, t+1, t, j}$ in Gleichung (10) im ersten Abschnitt als Erwartungswert des Einperiodenzinssatzes, so kann man (10) in das Zinsstrukturmodell (24) einsetzen und erhält:

$$(26) \quad \begin{aligned} r_{1, t+1, t} &= \sum_{j=1}^J \left[q_j \left\{ \alpha_j \sum_{\tau=0}^{\infty} (1 - \alpha_j)^{\tau} P_{t-\tau} - P_t \right\} + R_{1, t} \right] v_j \\ &= \sum_{\tau=0}^{\infty} u_{\tau} P_{t-\tau} - \sum_{j=1}^J q_j v_j P_t + \sum_{j=1}^J v_j R_{1, t}, \end{aligned}$$

wobei

$$(27) \quad 1 - \alpha_j = \beta_j$$

sowie

$$(28) \quad \sum_{j=1}^J \beta_j^{\tau} q_j v_j \alpha_j = u_{\tau}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots$$

Um dieses Modell einem empirischen Test zugänglich machen zu können, ist nun noch die Anzahl der unendlichen Summanden auf einen endlichen Ausdruck zurückzuführen. Hierzu werden die unendlich vielen Koeffizienten u_{τ} als von dem unendlichen Summenausdruck⁷

$$(29) \quad T(L) = u_0 + u_1 L + u_2 L^2 + \dots$$

erzeugt aufgefaßt, da

$$(30) \quad u_{\tau} = \frac{T^{(\tau)}(0)}{\tau!}.$$

Der in (29) auftauchende Ausdruck L wird als Lag-Operator, definiert durch

$$(31) \quad P_{t-\tau} = P_t L^{\tau},$$

aufgefaßt.

Nachdem man das in Gleichung (29) auftretende unendliche Polynom durch den Quotienten zweier endlicher Polynome ausgedrückt hat, ge-

⁷ Vgl. hierzu W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Application*, New York 1950, S. 248 ff.; G. O. Bierwag und M. A. Grove, S. 57 ff.; H. Faßbender, S. 79 ff. u. S. 122 ff.

langt man schließlich für den Fall $J = 1$, also den Fall eines Meinungspols am Kapitalmarkt, zu folgendem Zinsstrukturmodell

$$(32) \quad r_{1,t+1,t} = (1 - \alpha) r_{1,t+1,t} + \alpha q P_t - [P_t + (-1 + \alpha) P_{t-1}] q + R_{1,t} - (1 - \alpha) R_{1,t-1}$$

oder nach Subtraktion von $R_{1,t}$ und einigen Umklammerungen zu der Differenzenschreibweise:

$$(33) \quad \Delta r_{1,t+1,t} - \Delta R_{1,t} = \alpha (R_{1,t-1} - r_{1,t+1,t-1}) + (\alpha - 1) q \Delta P_t .$$

Damit ist eine im folgenden testbare und ökonomisch interpretierbare Hypothese formuliert.

II. Empirische Analyse

Nun wird versucht, die Rolle der Preiserwartungen bei der Zinserwartungsbildung und damit bei der Erklärung der Zinsstruktur empirisch zu überprüfen. Für diesen und für andere empirische Tests⁸ wurden Zinsstrukturdaten für die BRD für den Zeitraum von 1962 bis 1971 in Form von Quartalswerten berechnet, da solche bislang für die BRD in geschlossener Zeitreihe noch nicht veröffentlicht wurden. Die der theoretischen Hypothese (33) entsprechende und für Quartalswerte unformulierte Schätzgleichung lautet:

$$(34) \quad \Delta r_{4,t+4,t} - \Delta R_{4,t} = \alpha (R_{4,t-4} - r_{4,t+4,t-4}) + \gamma \Delta P_t + u_t ,$$

wobei $\gamma = (\alpha - 1) q$ und u_t die Zufallsschwankungen bezeichnet. Zunächst wurde versucht, die Koeffizienten in (33) aus dem Datenmaterial für den gesamten Zehnjahreszeitraum zu schätzen. Hierbei zeigte sich der Koeffizient γ der Preisänderungen als nicht signifikant. Dies ist plausibel, wenn man bedenkt, daß beobachtete Preisänderungen allenfalls gegen Ende des Beobachtungszeitraumes in nennenswertem Umfang die Zinserwartungsbildung beeinflussen haben können. Daher wurde der Beobachtungszeitraum systematisch verkürzt, indem der Anfang zunächst drei und ab dann jeweils zwei Jahre später angesetzt wurde. Für jeden dieser Zeiträume wurden die Koeffizienten neu geschätzt. Die Tabelle⁹ enthält

⁸ Zur Beschreibung dieses Datenmaterials siehe H. *Faßbender*, 4. Kapitel.

⁹ Hierin bedeuten R^2 das Bestimmtheitsmaß, SE die Standardabweichung und DW der *Durbin-Watson*-Koeffizient. q_1 und q_2 sind die Grenzen, innerhalb derer sich die nach dem *Cochrane-Orcutt*-Verfahren berechnete Proportionalitätskonstante, definiert durch $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, wobei ε_t die Zufallsschwankungen

die Ergebnisse für die Beobachtungsperiode vom ersten Quartal 1969 bis zum letzten von 1971.

Test des Preiserwartungsmodells mit deutschen Daten
I 1967 - IV 1971

α	γ	ϱ_1	ϱ_2	R^2	SE	DW
1,290 (3,623)	0,137 (2,951)	0,2686	0,2689	0,71	0,534	1,86

Aus

$$(35) \quad \alpha = 1,290 \\ (\alpha - 1) q = 0,137$$

berechnet sich der abgerundete Wert $q = 0,47$.

Diese Zahlen lassen folgende Interpretation zu:

Der Wert α , der angibt, um welchen Bruchteil des offenbaren Irrtums in der Preiserwartung die alte Erwartung korrigiert wird, liegt über eins, so daß die Erwartungen extrapolativ entwickelt werden; d. h. die Erwartung, die für das in $t + 1$ geltende Preisniveau in t angestellt wird, setzt sich additiv zusammen aus dem in $t - 1$ für t erwarteten Preisniveau und einem Betrag, der wegen $\alpha > 1$ größer als der Erwartungsirrtum in t ist. Ein Blick auf Gleichung (8) verdeutlicht diesen Zusammenhang.

Aus dem Wert des Koeffizienten q in Höhe von 0,47 kann man schließen, daß ungefähr die Hälfte des erwarteten Preisanstiegs in die Zins-erwartungsbildung eingeht. Der Fisher-Hypothese (1) entsprechend hätte der Wert für q in der Nähe von eins liegen müssen. Der tatsächlich ermittelte Wert für q entspricht den im Zusammenhang mit Gleichungen (3) und (4) gemachten Ausführungen.

Zusammenfassung

Die Bedeutung der Preiserwartungen für die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze

Im vorliegenden Aufsatz wird die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze aus dem Gleichgewicht am Markt für festverzinsliche Wertpapiere erklärt.

Zunächst werden mikroökonomisch das Angebot und die Nachfrage nach lang- und kurzfristigen Wertpapieren portfoliotheoretisch erklärt. Der einzelne kung bedeutet, bei den nächsten Iterationsschritten bewegen würde; eine autoregressive Transformation 1. Ordnung nach diesem Verfahren wurde durchgeführt, da eine Autokorrelation der Residuen angenommen werden mußte; vgl. H. Faßbender, S. 191.

Marktteilnehmer trifft seine Emissionsentscheidung bezüglich der Laufzeit, indem er seine Nutzenfunktion maximiert. Deren Argumente sind Erwartungswert und Varianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Portfolioertrages, die wiederum von Erwartungswert und Varianz des erwarteten zukünftigen kurzfristigen Zinssatzes abhängen. Der erwartete Zinssatz wird aus den Preiserwartungen erklärt.

Die mikroökonomischen Angebots- und Nachfragefunktionen werden dann aggregiert. Unter Berücksichtigung der Marktgleichgewichtsbedingung wird damit die Erklärung der Zinsstruktur möglich.

Diese Hypothese wird anschließend empirisch an Daten für die BRD getestet. Die quantitativen Ergebnisse erlauben eine Aussage über den Grad der Geldillusion in den Jahren von 1969 bis 1971.

Summary

The Importance of Price Expectations for the Term Structure of Interest Rates

This article explains the term structure of interest rates on the basis of the equilibrium on the market for fixed-interestbearing securities.

First, a microeconomic explanation of the supply of and demand for long and short term bonds is given, using the portfolio theory approach. The individual market participant makes his decision on the issue as far as the maturity is concerned by maximizing his utility function. The respective arguments are the mean and variance of the probability distribution of portfolio yields, which in turn are dependent on the mean and variance of the anticipated future short-term interest rate. The anticipated interest rate is explained on the basis of the price expectations.

The microeconomic supply and demand functions are then aggregated. With allowances being made for the market equilibrium condition, this enables the interest structure to be explained.

This hypothesis is subsequently tested empirically with data for the Federal Republic of Germany. The quantitative results permit a statement on the degree of money illusion in the years from 1969 to 1971.

Résumé

La signification des perspectives des prix pour la structure des échéances des taux d'intérêt

L'article base la structure des échéances des taux d'intérêt sur l'équilibre réalisé sur le marché des titres à revenu fixe.

Sur le plan microéconomique, l'offre et la demande de valeurs mobilières à court et à long terme sont expliquées par la théorie du portefeuille. Chaque

participant au marché prend sa décision d'émission relative à la durée en optimisant la fonction d'utilité de celle-ci. Ses arguments sont la valeur projetée et la variation de la répartition des probabilités du revenu du portefeuille, qui dépend lui-même de la valeur projetée et de la variation escomptée du taux d'intérêt à court terme. Et ce taux se définit en fonction des perspectives des prix.

Les fonctions microéconomiques de l'offre de la demande sont ensuite agrégées. En tenant compte de la condition d'équilibre du marché, l'on parvient dès lors à définir la structure des taux d'intérêt.

Cette hypothèse est ensuite testée empiriquement sur des données intéressant l'Allemagne fédérale. Les résultats quantitatifs permettent de dégager un jugement sur le degré de l'illusion monétaire des années 1969 à 1971.