Ein neuer Ansatz zur Bestimmung der Zinsstruktur

Theorie und empirische Ergebnisse für den deutschen Rentenmarkt*

Von Marliese Uhrig und Ulrich Walter,
Mannheim und Frankfurt/Main

I. Einführung und Überblick

Zur Beantwortung einer Vielzahl ökonomischer Fragestellungen ist die Kenntnis der Fristigkeitsstruktur der Zinssätze (kurz Zinsstruktur) von zentraler Bedeutung. Die Zinsstruktur bildet die Grundlage für die Erfassung und Steuerung von Zinsänderungsrisiken. Sie dient insbesondere dem Pricing von (zu emittierenden) Anleihen und wird in neueren Bewertungsansätzen für zinsderivative Titel, wie z.B. Zinsoptionen oder Zinsfutures, als modellexogene Größe benötigt.

Die Zinsstruktur ist die idealisierte Darstellung aller verfügbaren Kurs- und Zinsquotierungen eines homogenen Marktsegmentes zu einem bestimmten Zeitpunkt. Zur Quantifizierung werden häufig Zinsstrukturkurven herangezogen. Diese beschreiben die internen Zinsfüße von Zerobonds als Funktion ihrer Restlaufzeit. Äquivalente Information enthalten Diskontstrukturkurven, die die Preise von Zerobonds mit einem auf eins normierten Rückzahlungsbetrag in Abhängigkeit der Restlaufzeit darstellen. Weitere äquivalente Darstellungen sind über die impliziten Terminzinssätze oder die Kupons von aktuell zu pari notierenden Anleihen (Par-Yield-Curve) möglich.

Würden Nullkuponanleihen aller Restlaufzeiten am Markt gehandelt, so könnte die Zinsstrukturkurve mit Hilfe deren Kurse unmittelbar beobachtet werden. Tatsächlich werden am deutschen Rentenmarkt nur einige wenige Zerobonds gehandelt.[1] Somit stellt sich das Problem, die

* Wir danken Sven Bartels für seine wertvolle Unterstützung und einem anonymen Referee für seine Anregungen zur Überarbeitung des Manuskripts.

[1] Zerobonds spielen am deutschen Rentenmarkt eine untergeordnete Rolle. Neben ausländischen Emittenten bedienen sich vorwiegend Spezialkreditinstitute (z.B. Kreditanstalt für Wiederaufbau, Staatsbank Berlin) dieser Finanzierungsform.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Zinsstrukturkurve aus den verfügbaren Preisen von Kuponanleihen zu ermitteln.

In der Literatur findet man eine Vielzahl von Methoden zur Schätzung von Zinsstrukturkurven. Erste Arbeiten beinhalten den Versuch, die Zinsstrukturkurve mit Hilfe von Renditen von Kuponanleihen zu approximieren.[2] Der auch als Renditestrukturkurve bezeichnete (nicht eindeutige) Zusammenhang zwischen den internen Zinssätzen von Kuponanleihen und ihrer Restlaufzeit gibt in gewisser Weise die Zinssituation am Markt wieder.[3] Jedoch kann ein interner Zinssatz einer Kuponanleihe mit einer bestimmten Fristigkeit, der tatsächlich ein gewichtetes Mittel aus verschiedenen Zinssätzen der Zinsstrukturkurve ist, allenfalls eine grobe Näherung für den gesuchten Zinssatz der Fristigkeit liefern.

Eines der ersten Verfahren zur Schätzung einer Zinsstrukturkurve wurde von *McCulloch* (1971) vorgeschlagen. Die Idee dieses Ansatzes besteht darin, den Zusammenhang zwischen den Diskontfaktoren und ihrer Fristigkeit in einfacher funktionaler Form zu spezifizieren. Während McCulloch hierzu zunächst quadratische Splines heranzieht, werden in späteren Arbeiten kubische und exponentielle Splines verwendet.[4] *Chambers/Carleton/Waldman* (1984) spezifizieren direkt den Zusammenhang zwischen den Zinssätzen der Zinsstrukturkurve und ihrer Fristigkeit. Hierzu bedienen sie sich eines Polynoms festen Grades. In der Arbeit von *Diament* (1993) wird die funktionale Form der Par-Yield-Curve vorgegeben, wohingegen *Zaretsky* (1995) quadratische Splines für die Terminzinskurve verwendet.

Eine weitere Methode zur Schätzung der Zinsstrukturkurve besteht in der Verwendung eines theoretisch begründeten Zusammenhangs zwischen Diskontfaktoren und ihrer Fristigkeit, der sich aus Zinsmodellen, wie z.B. den Ansätzen von *Brennan/Schwartz, Vasicek* oder *Cox/Ingersoll/Ross,* ergibt.[5] Erwartungsgemäß führt diese Vorgehensweise zu vergleichsweise hohen Abweichungen zwischen den zu erklärenden Marktpreisen und den Modellpreisen von Anleihen.[6]

---

2 Vgl. beispielsweise *Cohen/Kramer/Waugh* (1966) und *Fisher* (1966).

3 Für den Spezialfall von Nullkuponanleihen fallen Rendite- und Zinsstrukturkurve zusammen.

4 Vgl. beispielsweise *McCulloch* (1975), *Vasicek/Fong* (1982) und *Shea* (1984, 1985). *Lin/Paxson* (1993) verwenden kubische B-Splines.

5 Vgl. *Brennan/Schwartz,* (1982), *Vasicek* (1977) und *Cox/Ingersoll/Ross* (1985).

6 Vgl. *Brennan/Schwartz* (1982) sowie die Untersuchung von *Bußmann* (1988), S. 339, hinsichtlich des Modells von *Brennan/Schwartz* (1982). Für den Zeitraum von 1976 bis 1986 erhält Bußmann für das Marktsegment Bund, Bahn und Post durchschnittliche absolute Bewertungsfehler, die häufig deutlich über 1 DM pro

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Das Ziel der obengenannten Verfahren besteht in der Ermittlung einer stetigen Zins- bzw. Diskontstrukturkurve. Methoden zur Schätzung von diskreten Diskontfaktoren wurden von *Carleton/Cooper* (1976) und *Caks* (1977) diskutiert. Carleton/Cooper schlagen einen einfachen linearen Regressionsansatz vor. Die Idee von Caks besteht im wesentlichen darin, aus zwei Anleihen, die sich nur in ihrer Kuponhöhe unterscheiden, ein Portefeuille zu konstruieren, aus dem keine zwischenzeitlichen Zahlungen resultieren. Mit Hilfe des so generierten Zahlungsstroms eines Diskontpapiers läßt sich der Zinssatz für die der Restlaufzeit der beiden Anleihen entsprechende Fristigkeit leicht ermitteln.

In dieser Arbeit wird ein neuer Ansatz zur Bestimmung der Zinsstrukturkurve entwickelt und empirisch überprüft. In Abschnitt II. stellen wir das Verfahren vor und grenzen es gegenüber bestehenden Ansätzen ab. Die empirische Überprüfung des Verfahrens für den deutschen Rentenmarkt erfolgt in Abschnitt III. Abschnitt IV. faßt die wesentlichen Ergebnisse zusammen.

II. Zweistufiges Verfahren zur Bestimmung der Zinsstruktur

Zinsstrukturkurven müssen im wesentlichen zwei Anforderungen gerecht werden. Zum einen gilt es, die am Markt beobachteten Anleihekurse möglichst gut zu erklären. Zum anderen erfordern einige Anwendungen, die in Abschnitt II.2. näher beschrieben werden, Zinsstrukturkurven mit einem möglichst glatten Verlauf. Diesen beiden Anforderungen soll im Rahmen eines zweistufigen Verfahrens Rechnung getragen werden.

Das Verfahren bestimmt in einer ersten Stufe eine diskrete Diskontfunktion durch Lösen eines quadratischen Optimierungsproblems. Die resultierende Diskontfunktion erklärt die Marktpreise von Kuponanleihen mit maximaler Genauigkeit. Die zugehörige Zinsstrukturkurve weist jedoch in vielen Fällen einen gezackten Verlauf auf, der für einige Anwendungen zu Problemen führen kann. Sofern höhere Ansprüche an die Glattheit der Zinsstrukturkurve gestellt werden, kann dieser Forderung in einem weiteren Schritt Genüge geleistet werden. In der (optionalen) zweiten Stufe wird dabei die zugehörige Zinsstrukturkurve mit Hilfe von polynomialen Splines approximiert.

---

100 DM Nominalwert liegen und im Mittel 0,90 DM betragen. Vgl. auch *Brown/Dybvig* (1986) und *Christofi/Conforti* (1993).

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

1. *Schätzung mit maximaler Genauigkeit*

Betrachtet man die Abweichungen zwischen den theoretischen Werten und den Marktwerten der Anleihen als zentrales Gütemaß für ein Schätzverfahren, so bietet sich die Verwendung eines Verfahrens an, welches zumindest unter idealen Bedingungen alle Anleihen exakt erklären kann. Dieser Weg soll im folgenden beschritten werden.

Unter der Annahme der Arbitragefreiheit ergibt sich der theoretische Wert b_i einer gesamtfälligen Kuponanleihe ohne Sonderrechte als Summe aller diskontierten zukünftigen Zahlungen:[7]

$$b_i = \sum_t a_{it} d_t \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet a_{it} die sichere Zahlung zum Zeitpunkt t und d_t den Diskontfaktor für die Fristigkeit t. Sollen umgekehrt die diskreten Diskontfaktoren d_t mit Hilfe von n verfügbaren Kuponanleihen bestimmt werden, so erfordert dies im Prinzip die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ad = b, \tag{2}$$

wobei die rechte Seite gerade den n-dimensionalen Vektor der Anleihewerte und $A = (a_{it})$ die Zahlungsmatrix bezeichnet. $d = (d_t)$ ist der Vektor der gesuchten Diskontfaktoren. Finden Zahlungen zu m verschiedenen Zeitpunkten statt, so besteht A aus n Zeilenvektoren der Dimension m, wobei jeder Zeilenvektor den Zahlungsstrom einer Anleihe repräsentiert.

Besitzt das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, so erhält man als Lösungsvektor d die Diskontfaktoren für die m verschiedenen Fristigkeiten. Aufgrund der Datensituation am deutschen Rentenmarkt ist das Gleichungssystem jedoch im allgemeinen nicht eindeutig lösbar. Vielmehr besitzt das Gleichungssystem bei Vorliegen vermeintlicher Arbitragemöglichkeiten[8] keine Lösung, ansonsten besitzt es unendlich viele Lösungen, da die Anzahl der zur Verfügung stehenden Anleihen geringer ist als die Anzahl der zu bestimmenden Diskontfaktoren.

Im ersten Fall stellt sich die Frage, wie die Arbitragemöglichkeiten zu behandeln sind, im letzten Fall stellt sich die Frage, welche der unendlich vielen Lösungen ausgewählt werden soll.

---

[7] Hierbei wird zunächst die Existenz einer Zinsstruktur vorausgesetzt.

[8] Asynchrone Quotierungen von Kassakursen der Anleihen, Liquiditätsunterschiede und Teilbarkeitsbeschränkungen sind einige der Gründe, die bei Vernachlässigung dieser Aspekte Arbitragemöglichkeiten erscheinen lassen. Vgl. hierzu auch die Diskussion bei *Zaretsky* (1995).

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Dem Problem der Unlösbarkeit von (2) kann man beispielsweise mit einem Regressionsansatz begegnen. Anstatt des linearen Gleichungssystems (2) formuliert man dabei ein neues Problem, wobei man nicht erklärbare Bewertungsfehler akzeptiert und versucht, diese möglichst gering zu halten. Die Schätzung des Modells

$$b = \sum_t a_t d_t + \epsilon \tag{3}$$

mit dem n-dimensionalen Vektor von Störgrößen ϵ mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode (OLS-Schätzung) bestimmt gerade den Diskontvektor, der die Differenz zwischen den theoretischen und den beobachteten Werten im Sinne der euklidischen Norm minimiert.[9]

Wir stellen die Existenz einer Lösung sicher, indem wir im Falle mehrerer Anleihen mit demselben Fälligkeitstermin nur eine davon bei der Schätzung berücksichtigen. Alternativ könnte man aus den am selben Termin fälligen Anleihen eine synthetische Anleihe bilden und diese bei der Schätzung berücksichtigen.

Ist die Existenz einer Lösung sichergestellt, so verbleibt das Problem, unter den unendlich vielen Lösungen des linearen Gleichungssystems eine geeignete auswählen zu müssen. Prinzipiell sind drei Vorgehensweisen zur Behebung dieses Problems denkbar:

Eine Möglichkeit ist, die bei der Schätzung zu berücksichtigenden Anleihen sorgfältig auszuwählen und/oder die Zahlungsreihen der betrachteten Anleihen geeignet zu verschieben, so daß die Anzahl der relevanten Zeitpunkte und damit die Anzahl der Variablen kleiner oder gleich der Anzahl der durch die Summe der betrachteten Anleihen gegebenen Gleichungen ist. Die gesuchten Diskontfaktoren ergeben sich dann entweder als (eindeutige) Lösung des modifizierten Gleichungssystems oder können mit Hilfe einer linearen Regression bestimmt werden. Diesen Weg beschreiten die in der Literatur diskutierten Verfahren zur Schätzung einer diskreten Zins- beziehungsweise Diskontstrukturkurve.

Die von *McCulloch* stammende Idee, den Zusammenhang zwischen den Diskontfaktoren und ihrer Fristigkeit in einfacher funktionaler Form $f(t)$ zu spezifizieren, also die Einführung einer zusätzlichen Bedingung, kann ebenfalls als Auswahl einer speziellen Lösung aus den unendlich

---

9 Vgl. hierzu *Carleton/Cooper* (1976). Zur Spezifikation der statistischen Eigenschaften der Fehlerterme vgl. auch *Chambers/Carleton/Waldman* (1984), S. 240 - 244.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

vielen verstanden werden.[10] Da das neue Problem jedoch im allgemeinen keine Lösung besitzt, bestimmt man hier wiederum diejenige Funktion $f(t)$, die die Differenz zwischen theoretischen und beobachteten Werten im Sinne einer geeigneten Norm minimiert. Weitere Repräsentanten dieser Richtung sind *Vasicek / Fong* und *Chambers / Carleton / Waldman.*[11]

Der dritte Weg, der in dieser Arbeit beschritten werden soll, versucht, aus den unendlich vielen Lösungen diejenige auszuwählen, die aus ökonomischer Sicht am sinnvollsten erscheint. Obgleich sich aus theoretischen Überlegungen nur die Forderung einer streng monoton fallenden Diskontfunktion ableiten läßt,[12] sind nach unserer Einschätzung Diskontfunktionen mit abrupten Veränderungen oder gar größeren Sprüngen unter ökonomischen Gesichtspunkten nicht zufriedenstellend. Derartige Singularitäten könnten nur durch die besondere Bedeutung bestimmter Termine, welche sich in den Zeitpräferenzen der Marktteilnehmer widerspiegeln, begründet werden. Sofern nicht wirklich besondere Ereignisse vorliegen, sind somit Diskontfunktionen mit einem glatten Verlauf ohne übermäßige Schwankungen wünschenswert. Das Ziel des Verfahrens ist daher, aus den möglichen Diskontfunktionen diejenige auszuwählen, die dieser qualitativen Forderung am besten entspricht. Als Maß für die Glattheit der Diskontfunktion[13] wählen wir die Summe der quadrierten Differenzen aufeinanderfolgender Diskontfaktoren.[14] Somit ergibt sich das folgende quadratische Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} &\min_{d_1,\dots,d_m} \left\{ (d_1 - 1)^2 + \sum_{t=1}^{m-1} (d_{t+1} - d_t)^2 \right\} \\ &\text{u. d. N.} \quad \sum_{t=1}^{m} a_{it} d_t = b_i \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{4}$$

In der üblicherweise verwendeten Matrixschreibweise besitzt das Problem die Form

$$\begin{aligned} &\min_{d} \quad c^T d + d^T C d \\ &\text{u. d. N.} \quad Ad = b \end{aligned} \tag{5}$$

---

10 Vgl. *McCulloch* (1971), S. 28 - 30.

11 Vgl. *Vasicek / Fong* (1982) und *Chambers / Carleton / Waldman* (1984).

12 Hierbei wird die Möglichkeit der Kassenhaltung vorausgesetzt.

13 Aus Gründen der mathematischen Handhabung beziehen wir das Glattheitsmaß auf die Diskontfunktion.

14 Dieses Maß ist eng verwandt mit der Variation einer Funktion f bezüglich einer Zerlegung Z, welche die Schwankung einer Funktion quantifiziert.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

mit der symmetrischen $(m \times m)$-Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor c besitzt die Dimension m.

Da die quadratische Form $x^T Cx$ für alle $x \neq 0$ stets positiv ist, ist die Matrix C positiv definit und die quadratische Zielfunktion streng konvex. Da der durch die linearen Nebenbedingungen definierte zulässige Bereich nichtleer ist, folgt hieraus die Existenz eines eindeutigen Minimums.[15]

Aus Gründen der numerischen Stabilität führen wir zunächst eine Faktorisierung der Matrix C in $C = LL^T$ durch. Die Variablentransformation $x = L^T d$ führt schließlich auf das Problem

$$\begin{aligned} \min_x \quad & p^T x + x^T x \\ \text{u. d. N.} \quad & Mx = b \end{aligned} \tag{6}$$

mit $M = A(L^T)^{-1}$ und $p = L^{-1}c$. Über die Lagrange-Funktion

$$F(x, u) = p^T x + x^T x - u^T(Mx - b) \tag{7}$$

mit dem n-dimensionalen Vektor u der Lagrange-Multiplikatoren ergibt sich das folgende Gleichungssystem als notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingung:

$$\begin{pmatrix} 2I & -M^T \\ 0 & MM^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ Mp + 2b \end{pmatrix} \tag{8}$$

Das gesuchte eindeutige Optimum ergibt sich somit als Lösung des linearen Gleichungssystems (8). Die spezielle Blockstruktur ermöglicht die Berechnung der Lösung in zwei Teilschritten:

1. Lösung des linearen Gleichungssystems $MM^T u = Mp + 2b$. Die Dimension von MM^T entspricht gerade der Anzahl n der verwendeten Anleihen.
2. Berechnen von $x = \frac{1}{2}(M^T u - p)$.

[15] Vgl. *Neumann/Morlock* (1993), S. 553 f.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Somit reduziert sich der Aufwand im wesentlichen auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems der Dimension n. Mit $d = L^{-T}x$ erhält man schließlich den Vektor der gesuchten Diskontfaktoren.

Das vorgestellte Verfahren enthält keine explizite Monotonieforderung für die Diskontfaktoren. Obgleich diese in Form von weiteren linearen Nebenbedingungen im Rahmen des quadratischen Optimierungsproblems berücksichtigt werden könnten, ist es fraglich, ob die Lösung des deutlich komplexeren Problems tatsächlich befriedigend ist.[16] Unsere empirischen Untersuchungen zeigen, daß die geschätzten Diskontfaktoren in den meisten Fällen monoton sind und nur in Einzelfällen nicht monotone Diskontfaktoren durch eindeutig zu identifizierende Anleihekurse verursacht werden. Eine explizite Berücksichtigung der Monotonieforderung führt in diesen Fällen entweder zu einem unlösbaren Problem oder aber zu einer fast flachen Diskontfunktion an der entsprechenden Stelle, womit sich im letzten Fall zwar keine negativen Terminzinssätze mehr ergeben, aber doch Terminzinssätze, die nahe Null sind. Unseres Erachtens ist dieser Einbruch der Terminzinssätze aufgrund einer offensichtlichen Fehlbewertung einer einzelnen Anleihe nicht zu rechtfertigen. Falls die geschätzten Diskontfaktoren tatsächlich nicht monoton sind, erscheint es daher sinnvoller, dieses Problem durch die Ausklammerung der dafür verantwortlichen Anleihe zu lösen.

2. *Glättung der zugehörigen Zinsstruktur*

Die empirischen Untersuchungsergebnisse für das vorgestellte Verfahren zeigen eine sehr gute Anpassungsgüte an die Marktdaten.[17] Allerdings weisen die geschätzten Zinsstrukturkurven in vielen Fällen einen gezackten Verlauf auf, der für einige Anwendungen zu Problemen führen kann. Verwendet man die geschätzten Zinsstrukturkurven im Rahmen von Ansätzen zur Bewertung von Zinsoptionen als exogene Größe, so kann sich dies abhängig vom gewählten Modell und dem zu bewertenden Vertrag in instabilen Optionswerten niederschlagen. Auch bei der Schätzung von Zinsvolatilitäten auf der Basis von Zinssätzen aus der geschätzten Zinsstrukturkurve ergeben sich unrealistisch hohe historische Volatilitäten.

Neben einer möglichst guten Anpassung an die Marktdaten zeichnet sich eine „gute" Schätzung der Zinsstruktur offensichtlich auch durch

16 Vgl. hierzu auch *Shea* (1984), S. 261.

17 Vgl. hierzu Abschnitt III.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

einen glatten Verlauf der geschätzten Zinsstrukturkurve aus. In einem zweiten Schritt kann daher eine Glättung sinnvoll sein. Da hier jedoch im allgemeinen zwei konkurrierende Ziele aufeinandertreffen, ist abhängig von der jeweiligen Anwendung abzuwägen, ob und wie stark geglättet werden soll.

Zur Glättung schlagen wir die Approximation der geschätzten Zinsstrukturkurve mit Hilfe von polynomialen Splines vor. Hierbei verwenden wir die Methode der kleinsten Quadrate. Schätztheoretisch setzt dies voraus, daß die bei der Schätzung der diskreten Zinssätze aufgetretenen Fehler homoskedastisch sind, d.h., die Varianz des Fehlerterms insbesondere unabhängig von der Fristigkeit des betrachteten Zinssatzes ist. Dies impliziert die Annahme, daß die bei den Anleihepreisen selbst zu beobachtenden Abweichungen nicht homoskedastisch sind, sondern eine laufzeitabhängige Heteroskedastizität vorliegt. *Vasicek/Fong* (1982) und *Chambers/Carleton/Waldman* (1984) lehnen die Annahme homoskedastischer Preisresiduen ebenfalls ab und modellieren die Varianz der Preisresiduen direkt oder indirekt als wachsende Funktion der Restlaufzeit.[18]

Die ökonomische Begründung für obige Annahme liegt in der Tatsache, daß die Rendite trotz aller Vorbehalte immer noch ein wesentliches Orientierungskriterium bei der Preisfindung am Markt darstellt. Eine identische Fehlbewertung in der Rendite führt aber i.d.R. zu einer in der Restlaufzeit der Anleihe zunehmenden Fehlbewertung im Kurs. So resultiert bei einem (flachen) Zinsniveau von 8% aus einer Fehlbewertung der Rendite in Höhe von 10 Basispunkten bei einer zehnjährigen Nullkuponanleihe eine Kursdifferenz von 0,45 DM, während ein Zerobond mit einer Restlaufzeit von einem Jahr nur eine Fehlbewertung in Höhe von 0,09 DM aufweist.

Betont sei, daß – im Gegensatz zu der Vorgehensweise von *McCulloch* (1971, 1975) und *Shea* (1984, 1985) – bei dem hier vorgestellten Ansatz nicht die Diskontfunktion, sondern die Zinsstrukturkurve mit Hilfe von polynomialen Splines approximiert wird. Da Diskontfunktionen eher einen exponentiellen Verlauf besitzen, können sie durch Funktionen mit polynomialem Charakter nur unzureichend beschrieben werden.[19] Im Gegensatz hierzu erscheint die Approximation der Zinsstrukturkurve mit polynomialen Splines durchaus sinnvoll. Verglichen mit der Methode von *Chambers/Carleton/Waldman* (1984), welche die Zinsstrukturkurve

---

18 *Vasicek/Fong* (1982) wählen die Standardabweichung des Störterms proportional zur Duration der Anleihe.

19 Vgl. hierzu auch die Kritik von *Vasicek/Fong* (1982), S. 345f.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

mit Hilfe eines einfachen Polynoms festen Grades darstellen, bringt die Verwendung von polynomialen Splines eine höhere Flexibilität. Gegen eine Approximation der Terminzinskurve spricht, daß die Marktteilnehmer im Bereich Bundesanleihen den Terminzinssätzen keine praktische Bedeutung beimessen, sondern sich vielmehr an Kassazinssätzen orientieren.

III. Empirische Untersuchung für den deutschen Rentenmarkt

In diesem Abschnitt findet die vorgestellte Schätzmethode Anwendung zur Bestimmung der Zinsstruktur am deutschen Rentenmarkt für den Zeitraum von Januar 1980 bis November 1993.[20]

1. Datenbasis

Zur Schätzung der Zinsstrukturkurven für den Zeitraum von Januar 1980 bis November 1993 verwenden wir Anleihen und Obligationen des Bundes,[21] die den folgenden Kriterien genügen:

- gesamtfällig
- unkündbar
- konstanter, jährlicher Kupon
- Restlaufzeit zwischen 0,5 und 10 Jahren.

Auf die Einbeziehung der Anleihen von Bundesbahn und Bundespost wird verzichtet, da zwischen Bundesanleihen auf der einen und Bahn- sowie Postanleihen auf der anderen Seite ein deutlicher Renditeunterschied besteht. Die in die Untersuchung einbezogenen Anleihen können hinsichtlich der Kriterien Bonität, Liquidität und Besteuerung als weit-

---

20 Die bekanntesten Methoden zur Bestimmung der Zinsstruktur wurden in einer Reihe von empirischen Untersuchungen getestet. Die Arbeit von *Bliss* (1994) bietet Testmethoden zur Beurteilung der Qualität von Verfahren zur Schätzung der Zinsstruktur. Unter Verwendung von US-Daten werden dabei exemplarisch verschiedene Schätzverfahren untersucht. Einen empirischen Vergleich alternativer Verfahren zur Bestimmung der Zinsstruktur mit Daten des deutschen Rentenmarktes gibt *Bußmann* (1989). Weitere empirische Untersuchungen für den deutschen Rentenmarkt findet man beispielsweise bei *Bühler/Schulze* (1991) und *Wilhelm/Brüning* (1992). *Buono/Gregory-Allen/Yaari* (1992) testen drei verschiedene Ansätze im Rahmen einer Monte-Carlo-Studie.

21 Die Stamm- und Kursdaten der verwendeten Anleihen stammen aus der Anleihen- und Zinsdatenbank, einer Teildatenbank der Deutschen Finanzdatenbank. Bei den Kursdaten handelt es sich um die Kassakurse der Frankfurter Wertpapierbörse.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

gehend homogenes Marktsegment betrachtet werden. Die Schätzung der Zinsstrukturkurven erfolgt in wöchentlichem Abstand, wobei pro Schätztermin im Mittel 85 Anleihen zur Verfügung stehen. Da nur sehr wenige Anleihen eine Restlaufzeit von mehr als 10 Jahren besitzen,[22] wird die Schätzung auf den Fristigkeitsbereich von 0 bis 10 Jahren beschränkt. Für den Fristigkeitsbereich von 0 bis 0,5 Jahren werden aus den Anlagemöglichkeiten am deutschen Geldmarkt synthetische Anleihen konstruiert. Hierbei finden Geldmarktsätze mit Laufzeiten von einem Tag sowie einem, drei und sechs Monaten Beachtung.[23] Darüber hinaus werden bei der Schätzung nur Transaktionskurse berücksichtigt. Die Stückzinsberechnung erfolgt nach den Usancen am deutschen Rentenmarkt. Hierbei wird jeder Monat mit 30 Tagen und jedes Jahr mit 360 Tagen kalkuliert.

Zur Schätzung der diskreten Diskontfaktoren wird eine Diskretisierung von einem Tag gewählt, so daß für jeden der 726 Schätztermine jeweils eine diskrete Diskontfunktion mit 3650 Diskontfaktoren ermittelt wird.[24]

Im Hinblick auf die Glättung der Zinsstrukturkurve mit Hilfe einer aus Polynomen bestehenden Splinefunktion gilt es, einen Kompromiß zu finden zwischen der Glattheit der Zinsstrukturkurve einerseits und der Erklärung der Marktpreise andererseits. Eine größere Anzahl von Polynomen sowie die Verwendung von Polynomen höherer Ordnung führen – wie auch geringere Anforderungen an die Eigenschaften des Splines an den Nahtstellen – zu geringeren Differenzen zwischen den beobachteten Marktwerten und den entsprechenden aus der geschätzten Zinsstrukturkurve bestimmten Werten. Gleichzeitig resultiert dieses Vorgehen aber auch in einem wellenförmigeren Verlauf der Zinsstrukturkurve und damit in einer größeren Schwankung der Terminzinssätze. Die Verwendung eines aus 10 kubischen Polynomen bestehenden, überall zweimal stetig differenzierbaren Splines scheint einen guten Kompromiß im Hinblick auf obigen Zielkonflikt darzustellen. Kubische Splines besitzen ausreichend Flexibilität, um eine gute Anpassung zu gewährleisten und

---

22 Einige Emittenten nutzten die historisch niedrigen Zinsen im zweiten Halbjahr 1993 zur Plazierung von lang laufenden Anleihen. So emittierte auch der Bund zum Jahreswechsel 1993/1994 die sogenannte Silvesteranleihe mit einer Laufzeit von 30 Jahren.

23 Anleihen mit einer sehr kurzen Restlaufzeit weisen häufig eine vergleichsweise geringe Liquidität auf. Sie werden daher bei der Schätzung nicht herangezogen.

24 Da die größte betrachtete Restlaufzeit i. d. R. kleiner als 10 Jahre ist, wird die Zinsstrukturkurve im verbleibenden Bereich flach fortgeschrieben.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

genügend Stabilität, um durch einzelne Ausreißer nicht wesentlich in ihrem Verlauf beeinträchtigt zu werden.

Die Komplexität des eigentlichen Schätzvorgangs wird im Kern durch die Anzahl der zu berücksichtigenden Titel bestimmt. Bei im Schnitt zwischen 70 und 100 gehandelten Anleihen des betrachteten Segmentes übersteigt das zugehörige lineare Gleichungssystem nur in den seltensten Fällen die Dimension 100. Der Aufwand des aus der Glättung resultierenden linearen Gleichungssystems wird durch die Splinefunktion determiniert. Für die gewählte Konfiguration ist ein System mit 67 Variablen und Gleichungen zu lösen.

2. *Güte des Verfahrens*

a) Anpassungsgüte

Tabelle 1 faßt die Ergebnisse der insgesamt 726 Schätzungen diskreter Zinsstrukturkurven für den Zeitraum Januar 1980 bis November 1993 zusammen. Für den gesamten Zeitraum ergibt sich eine mittlere absolute Abweichung von 0,12 DM bezogen auf einen Nominalwert von 100 DM. Für den besten Termin reduziert sich die mittlere absolute Abweichung auf weniger als 0,01 DM, während der schlechteste Termin auf einen Wert von 0,47 DM kommt.

Verantwortlich dafür, daß überhaupt Abweichungen auftreten, sind diejenigen Titel, die bei der (endgültigen) Schätzung selbst nicht berücksichtigt werden. Hierbei sind Anleihen, die allein auf Grund der Existenz einer oder mehrerer Anleihen mit identischen Zahlungszeitpunkten unberücksichtigt bleiben, eher unkritisch. Erwartungsgemäß sind fast ausschließlich diejenigen Titel, die ursprünglich die Verletzung der Monotonieforderung verursacht hatten, für die größeren Abweichungen verantwortlich.

Abbildung 1 stellt die durchschnittlichen betragsmäßigen Abweichungen der Schätzungen im Zeitablauf dar. Offensichtlich stammen alle Schätzungen mit größeren Fehlern ausschließlich aus der Teilperiode 1980 - 1986, während im zweiten Zeitraum von 1987 - 1993 keine Schätzung eine durchschnittliche betragsmäßige Abweichung von 0,15 DM oder mehr aufweist.

Eine Ursache für diese Asymmetrie könnte die höhere Volatilität der Zinssätze Anfang der 80er Jahre sein. Da aber sowohl schlechtere Ergebnisse in ruhigeren Phasen des ersten Zeitraums, z.B. 1984, als auch sehr

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Tabelle 1

Zinsstrukturschätzungen von 1980 bis 1993: Diskrete Zinsstrukturkurven

	1980–1986	1987–1993	1980–1993
Zeitpunkte	365	361	726
Anleihekurse insgesamt	28005	33783	61788
Ø Anleihenzahl pro Termin	76,73	93,58	85,11
Ø MAD	0,1890	0,0512	0,1204
Maximum MAD	0,4690	0,1366	0,4690
Minimum MAD	0,0234	0,0036	0,0036
Termine mit			
0≤ MAD <0,1	16,38%	96,12%	56,06%
0,1≤ MAD <0,2	42,19%	3,88%	23,14%
0,2≤ MAD <0,3	28,77%	0%	14,46%
0,3≤ MAD <0,4	10,68%	0%	5,37%
0,4≤ MAD <0,5	1,92%	0%	0,96%
Anleihen mit			
0≤ AD <0,2	79,77%	91,40%	86,13%
0,2≤ AD <0,4	5,58%	4,03%	4,73%
0,4≤ AD <0,6	3,58%	2,39%	2,93%
0,6≤ AD <0,8	2,63%	0,90%	1,69%
0,8≤ AD <1	1,96%	0,44%	1,13%
1≤ AD	6,48%	0,83%	3,39%

AD: Absolut Deviation (Betragsmäßige Abweichung)
MAD: Mean Absolut Deviation (Durchschnittliche betragsmäßige Abweichung)
Die Abweichungen sind in DM pro 100 DM Nominalwert angegeben.

gute Resultate in volatileren Phasen innerhalb der zweiten Periode, z.B. 1987, vorliegen, kann die beobachtete Diskrepanz nicht ausschließlich in einer unterschiedlichen Volatilität begründet sein. Folglich scheint zumindest zum Teil eine gewisse Unvollkommenheit des Marktes für die im Vergleich zum Zeitraum 1987 - 1993 doch relativ hohen Abweichungen der Periode 1980 - 1986 verantwortlich zu sein.

Vergleicht man die Resultate der geglätteten Zinsstrukturkurven in Tabelle 2 mit den Werten für die ungeglätteten Zinsstrukturkurven, so erkennt man, daß die Glättung mit einer Zunahme der durchschnitt-

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

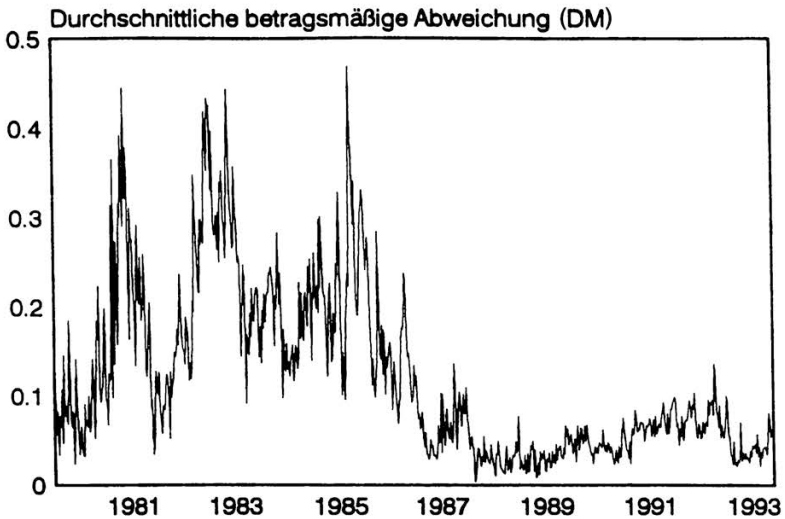

Abbildung 1: Abweichungen der diskreten Zinsstrukturschätzungen

lichen Abweichung in Höhe von 0,09 DM bis 0,15 DM einhergeht. Ein Blick auf die Fehlerstatistik zeigt, daß diese Verschlechterung fast ausschließlich zu Lasten der zuvor sehr gut erklärten Anleihen geht. Wurde im diskreten Fall die Mehrzahl der Titel exakt erklärt und hatten somit 86 % der Anleihen eine Abweichung von weniger als 0,20 DM, so befinden sich im stetigen Fall nur noch 63 % der Anleihen in dieser Sparte. Andererseits ist der Prozentsatz der Bonds mit einer Fehlbewertung über 1 DM sogar geringfügig von 3,4 % auf 2,6 % gesunken. Wie schon im diskreten Fall zeigen sich auch im Fall stetiger Zinsstrukturkurven deutlich unterschiedliche Ergebnisse in der Anpassungsgüte für die zwei Teilperioden 1980 - 1986 und 1987 - 1993.

b) Analyse der Preisresiduen

Um die geschätzten Preise auf systematische Effekte hin zu untersuchen, führen wir verschiedene Regressionsschätzungen durch. Hierbei regressieren wir das Residuum der geglätteten Schätzung bzw. dessen Absolutwert jeweils auf die Restlaufzeit der Anleihe, die Duration und die Höhe des Kupons. Tabelle 3 stellt die wesentlichen Regressionsergebnisse dar. Die beiden Regressionen des Absolutwertes des Residuums auf die Restlaufzeit bzw. die Duration der Anleihe unterstützen die

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Tabelle 2

Zinsstrukturschätzungen von 1980 bis 1993: Stetige Zinsstrukturkurven

	1980–1986	1987–1993	1980–1993
Zeitpunkte	365	361	726
Anleihekurse	28005	33783	61788
∅ Anleihenzahl	76,73	93,58	85,11
∅ MAD	0,3367	0,1462	0,2420
Maximum MAD	0,6333	0,2791	0,6333
Minimum MAD	0,1265	0,0765	0,0765
Termine mit			
0≤ MAD <0,1	0%	8,03%	3,99%
0,1≤ MAD <0,2	8,49%	81,72%	44,90%
0,2≤ MAD <0,3	33,42%	10,25%	21,90%
0,3≤ MAD <0,4	31,23%	0%	15,70%
0,4≤ MAD <0,5	18,36%	0%	9,29%
0,5≤ MAD	8,49%	0%	4,27%
Anleihen mit			
0≤ AD <0,2	45,99%	76,93%	62,91%
0,2≤ AD <0,4	24,77%	16,58%	20,29%
0,4≤ AD <0,6	13,52%	4,00%	8,31%
0,6≤ AD <0,8	7,15%	1,34%	3,98%
0,8≤ AD <1	3,45%	0,67%	1,93%
1≤ AD	5,12%	0,48%	2,58%

AD: Absolut Deviation (Betragsmäßige Abweichung)
MAD: Mean Absolut Deviation (Durchschnittliche betragsmäßige Abweichung)
Die Abweichungen sind in DM pro 100 DM Nominalwert angegeben.

Annahme heteroskedastischer Preisresiduen. In 441 bzw. 494 der 726 Regressionen ist der entsprechende Koeffizient größer Null und hierbei in 213 bzw. 231 Fällen signifikant (Signifikanzniveau 5 %) von Null verschieden. Im Einklang mit der Erwartung werden also die Preise von aus heutiger Sicht kurzlaufenden Anleihen durch die aktuelle Zinsstrukturkurve tendenziell besser erklärt als diejenigen längerlaufender Titel. Dabei wird die oben gegebene intuitive Erklärung über die Renditen zusätzlich durch die Tatsache gestützt, daß die Duration, die im Prinzip

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Tabelle 3

Analyse der Residuen

Regression	$\emptyset R^2$	b >0	Signif. (5%)	b <0	Signif. (5%)
$\lvert\epsilon\rvert = a + b * T$	0,0476	441	213	285	55
$\lvert\epsilon\rvert = a + b * D$	0,0513	494	231	232	47
$\lvert\epsilon\rvert = a + b * K$	0,0428	118	6	608	263
$\epsilon = a + b * T$	0,0036	263	0	463	0
$\epsilon = a + b * D$	0,0038	320	0	406	0
$\epsilon = a + b * K$	0,1237	49	2	677	435

ϵ: Residuum (= Marktwert – Wert gemäß Zinsstrukturkurve)
K: Kupon, T: Restlaufzeit, D: Duration

die Sensitivität des Anleihewertes gegenüber Renditeänderungen mißt, besser in der Lage ist, die Systematik der Abweichungen zu beschreiben als die Restlaufzeit selbst. Die Ergebnisse der vierten und fünften Regression zeigen, daß es aber zu keiner systematischen Über- oder Unterbewertung von Anleihen in Abhängigkeit von der Restlaufzeit bzw. der Duration kommt.

Die Regression des Residuums auf die Höhe des Kupons dokumentiert nachdrücklich einen (steuerlichen) Kuponeffekt, der unter anderem mit der steuerlichen Ungleichbehandlung von Kursgewinnen und Zinszahlungen bei Privatpersonen begründet wird.[25] Während Kuponzahlungen als Einkünfte aus Kapitalvermögen der Einkommensteuer unterliegen, sind i. d. R. Kursgewinne steuerfrei, sofern zwischen Anschaffung und Veräußerung ein Zeitraum von mehr als sechs Monaten liegt. Dies führt dazu, daß unter Vernachlässigung steuerlicher Aspekte sog. Niedrigkuponanleihen, relativ zur Zinsstrukturkurve, die ohne Berücksichtigung von Steuern ermittelt wurde, tendenziell über- und Anleihen mit höheren Kupons unterbewertet sind. Insofern ist es nicht überraschend, daß der entsprechende Regressionskoeffizient in 93 % der Fälle kleiner Null ist. Darüber hinaus sind 64 % dieser Werte signifikant von Null verschieden.

Weitaus überraschender ist die dokumentierte Systematik der Absolutwerte der Residuen in Abhängigkeit vom Kupon. In 84 % der Schätzun-

[25] Eine weitere Ursache könnte eine erhöhte Nachfrage nach unter pari notierenden Anleihen seitens institutioneller Anleger (Kreditinstitute, Investmentfonds, Versicherungen etc.) sein zur Vermeidung von durch Kursverluste bedingten Abschreibungen.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

gen nimmt die Anpassungsgüte mit wachsendem Kupon zu. Signifikant ist dieser Effekt immerhin bei 36 % der durchgeführten Regressionen. Eine genauere Analyse zeigt, daß hierfür die in einer Niedrigzinsphase begebenen Emissionen der Treuhand und des ERP-Sondervermögens sowie Neuemissionen des Bundes verantwortlich sind. Somit liegt die Ursache der dokumentierten Verzerrung in Emittenten- und Liquiditätsaspekten.

Abschließend kann festgehalten werden, daß die aufgetretenen systematischen Effekte keine durch das Schätzverfahren bedingte Verzerrungen, sondern am Markt tatsächlich vorhandene „Anomalien" widerspiegeln.

c) Visuelle Überprüfung der geschätzten Zinsstrukturkurven

Für eine visuelle Überprüfung der geschätzten Zinsstrukturkurven werden die Schätzungen für den 07.01.1983 und den 17.02.1989 näher betrachtet. Hierbei handelt es sich um die beiden Termine mit der geringsten bzw. der höchsten Anpassungsqualität. Neben der diskreten und der geglätteten Zinsstrukturkurve werden zusätzlich die in der stetigen Zinsstrukturkurve implizit enthaltenen Terminzinssätze abgebildet.[26] Die Abbildung 2 stellt die diskrete und stetige Zinsstrukturkurve bzw. die Funktion der impliziten Terminzinssätze für den 07.01.1983 dar. Obwohl an diesem Termin die Anpassungsgüte ihren schlechtesten Wert annimmt, verläuft selbst die diskrete Zinsstrukturkurve relativ glatt. Die bei der Schätzung aufgetretenen Probleme werden hauptsächlich durch den gezackten Verlauf der Werte bei einer Fristigkeit von 1,5 bis 2,5 Jahren augenfällig.

Die bei der diskreten Zinsstrukturkurve beobachteten Zacken sind durch die Glättung vollständig verschwunden. Lediglich der leicht wellige Verlauf der stetigen Zinsstrukturkurve ist Ausdruck der ursprünglich vorhandenen lokalen Schwankungen.

Die Kurve der Momentanterminzinssätze deckt die in der Zinsstrukturkurve noch enthaltenen Schwächen auf. In der Terminzinssatzkurve potenzieren sich bildlich gesprochen die Wellen der Zinsstrukturkurve. Insofern stellt die Kurve der Momentanterminzinssätze einen sehr empfindlichen Indikator für in der Zinsstrukturkurve enthaltene Schwankungen dar. Es ist allerdings zu beachten, daß es sich hierbei um *Momen-*

[26] Im zeitstetigen Kontext werden die impliziten Terminzinssätze üblicherweise in Form der Momentanterminzinssätze angegeben.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

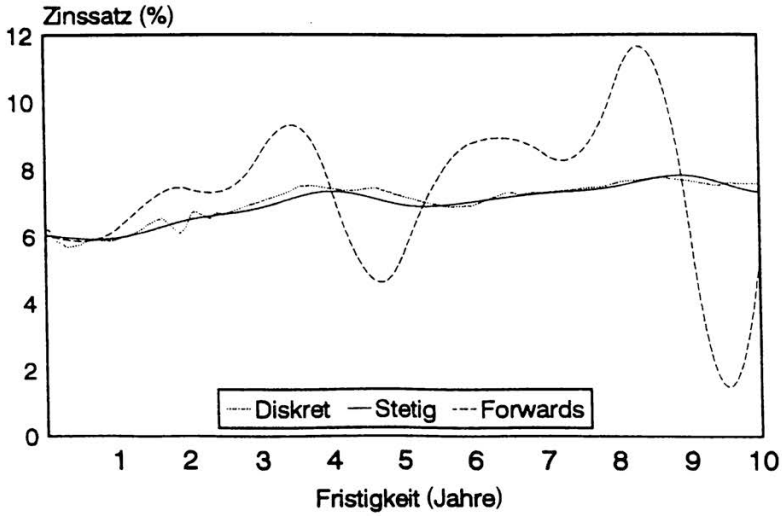

Abbildung 2: Zinsstrukturkurve: 07.01.1983

*tan*terminzinssätze handelt. Die Berechnung der Terminzinssätze für endliche Zeiträume, bspw. ein Jahr, erfolgt mit Hilfe der Auswertung des Integrals für den entsprechenden Zeitraum. Dies hat zur Folge, daß wegen der glättenden Wirkung der Integralbildung die eigentlich relevanten Terminzinssätze einen deutlich gleichmäßigeren Verlauf als die Momentanterminzinssätze besitzen.

Die Abbildung 3 stellt die geschätzten Zinskurven für den besten Anpassungstermin, den 17.02.1989, dar. Abgesehen von leichten Zacken am kurzen Ende verläuft in diesem Fall bereits die diskrete Zinsstrukturkurve sehr gleichmäßig. Die stetige Zinsstrukturkurve weist keinerlei auffallende Unregelmäßigkeiten auf und selbst die Kurve der Momentanterminzinssätze zeigt einen relativ stabilen Verlauf.

d) Out-of-the-Sample-Test

Den Abschluß der Überprüfung des Verfahrens stellt ein Out-of-the-Sample-Test für das Jahr 1993 dar. Zu diesem Zweck werden 10 Anleihen des Marktsegmentes von der Schätzung ausgeschlossen. Im Anschluß wird untersucht, wie gut die Werte dieser Titel durch die geschätzte Zinsstrukturkurve beschrieben werden. Auf diese Weise wird direkt die Einsatzfähigkeit des Verfahrens zum Pricing von Anleihen getestet.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

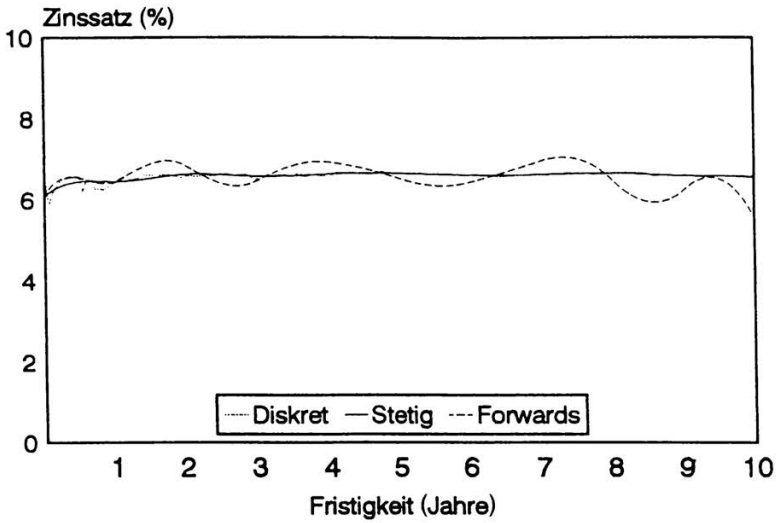

Abbildung 3: Zinsstrukturkurve: 17.02.1989

Bei den bei der Schätzung unberücksichtigten Titeln handelt es sich um 4 Bundesobligationen und 6 Bundesanleihen mit einer Restlaufzeit Mitte 1993 von 1 bis 9 Jahren. Die Anleihen der Out-of-the-Sample-Stichprobe sind somit gleichmäßig über das gesamte Laufzeitspektrum verteilt. Die gewählten Bundesobligationen decken hierbei die Restlaufzeitklassen 1 bis 4 Jahre, die Bundesanleihen die Fristigkeiten 4 bis 9 Jahre ab. Innerhalb der Gruppe der Bundesobligationen bzw. Bundesanleihen mit Fälligkeit in demselben Kalenderjahr wurde jeweils der Titel in die Out-of-the-Sample-Stichprobe aufgenommen, dessen Rückzahlungstermin den geringsten Abstand zum 1. Juli des entsprechenden Jahres besitzt. Die Ausstattungsmerkmale der 10 Out-of-the-Sample-Titel können der Tabelle 4 entnommen werden.

Abbildung 4 stellt die durchschnittliche betragsmäßige Abweichung der Out-of-the-Sample-Titel im Betrachtungszeitraum graphisch dar. Für den Zeitraum von Januar 1993 bis November 1993 ergibt sich sowohl bei den diskreten als auch bei den stetigen Zinsstrukturschätzungen eine durchschnittliche absolute Abweichung von 0,12 DM. Das schlechteste Testergebnis liegt jeweils Anfang Januar mit einem Wert von 0,22 DM (diskrete Schätzung) bzw. 0,24 DM (stetige Schätzung). Allerdings weist die Mehrzahl der Schätzungen, sowohl im diskreten als auch im stetigen Fall, ein Fehlermaß von unter 0,15 DM auf.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Tabelle 4

Out-of-the-Sample-Anleihen

Wertpapierkennummer	Typ	Fälligkeit	Kupon [%]
114085	Bundesobligation	20.07.1994	6,750
114092	dto.	20.07.1995	8,750
114096	dto.	22.04.1996	8,500
114100	dto.	21.07.1997	8,250
113456	Bundesanleihe	21.07.1997	6,125
113464	dto.	20.07.1998	6,750
113472	dto.	21.06.1999	6,750
113479	dto.	22.05.2000	8,750
113484	dto.	21.05.2001	8,375
113486	dto.	22.07.2002	8,000

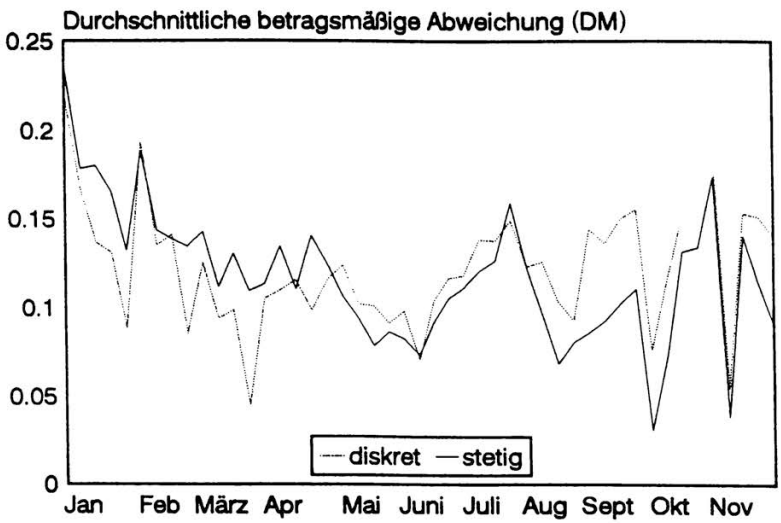

Abbildung 4: Abweichungen Out-of-the-Sample-Titel

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

IV. Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse

In der vorliegenden Arbeit wird ein neues Verfahren zur Bestimmung der Zinsstruktur vorgestellt und im Rahmen einer empirischen Untersuchung am deutschen Rentenmarkt angewendet. Im Vergleich zu den wichtigsten in der Literatur diskutierten Verfahren lassen sich einige Vorteile der hier vorgestellten Methode herausstellen:

- Im Gegensatz zu den diskreten Verfahren von *Carleton/Cooper* (1976) und *Caks* (1977) ist bei dem dargestellten Verfahren weder eine willkürliche Manipulation der Zahlungsreihen noch eine Interpolation von Zinssätzen erforderlich, da die Zinssätze beziehungsweise Diskontfaktoren für alle Fristigkeiten simultan ermittelt werden.
- Gegenüber den Verfahren zur Schätzung einer kontinuierlichen Diskont- und Zinsstrukturkurve, welche einen funktionalen Zusammenhang zur Fristigkeit unterstellen, erlaubt diese Methode, ökonomische Fragestellungen zu untersuchen – z.B. die Existenz und die Höhe von Risikoprämien am Anleihemarkt oder den Zusammenhang zwischen Zinssätzen unterschiedlicher Fristigkeiten –, ohne dabei den nur schwer abzuschätzenden Einfluß des vorausgesetzten speziellen funktionalen Zusammenhanges berücksichtigen zu müssen.
- Ist eine hinreichend glatte Zinsstrukturkurve erforderlich, so kann dies mit Hilfe der Approximation der diskreten Zinsstrukturkurve durch eine aus Polynomen bestehende Splinefunktion geschehen. Dies impliziert zum einen die ökonomisch zu rechtfertigende Annahme, daß die Anleihepreisresiduen nicht homoskedastisch sind, sondern eine laufzeitabhängige Heteroskedastizität vorliegt. Zum anderen erscheint eine polynomiale Approximation der Zinsstrukturkurve, wie auch bei *Chambers/Carleton/Waldman* (1984), im Gegensatz zu einer Approximation der Diskontstrukturkurve durch Polynome durchaus vernünftig. Im Vergleich zu den beiden sehr aufwendigen, den exponentiellen Charakter der Diskontstrukturkurve berücksichtigenden Verfahren von *Vasicek/Fong* (1982) und Chambers/Carleton/Waldman (1984) ist sowohl die Implementierung als auch die Durchführung der Schätzung selbst mit der hier vorgestellten Methode deutlich einfacher.

Die empirischen Ergebnisse zeigen, daß das Verfahren eine sehr gute Anpassungsgüte an die Marktpreise besitzt. Bei der Analyse der Preisresiduen treten keine verfahrensbedingten Verzerrungen auf; es spiegeln sich jedoch am deutschen Kapitalmarkt offensichtlich vorhandene Unvollkommenheiten wider. Insbesondere die Ergebnisse des Out-of-the-Sample-Tests unterstreichen nachdrücklich die Qualität des vorgestellten Verfahrens.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Literatur

Adams, K.J./*Van Deventer,* D.R. (1994): Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness; in: Journal of Fixed Income, June 94, S. 52 - 62. – *Bliss,* R.R. (1994): Testing Term Structure Estimation Methods; unveröffentlichtes Arbeitspapier. – *Brennan,* M.J./*Schwartz,* E.S. (1982): An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency; in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, 17, S. 301 - 329. – *Bühler,* W./*Schulze,* M. (1991): Estimation of the Transition Behaviour of Term Structures of Interest Rates; in: Statistical Papers, 32, S. 281 - 297. – *Buono,* M./*Gregory-Allen,* R.B./*Yaari,* U. (1992): The Efficacy of Term Structure Estimation Techniques: A Monte Carlo Study; in: Journal of Fixed Income, March 92, S. 52 - 63. – *Bußmann,* J. (1988): Das Management von Zinsänderungsrisiken; Peter Lang, Frankfurt. – *Bußmann,* J. (1989): Die Bestimmung der Zinsstruktur am deutschen Kapitalmarkt; in: Kredit und Kapital, 22, S. 117 - 137. – *Caks,* J. (1977): The Coupon Effect on Yield to Maturity; in: The Journal of Finance, 32, S. 103 - 115. – *Carleton,* W.T./*Cooper,* I.A. (1976): Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates; in: The Journal of Finance, 31, S. 1067 - 1083. – *Chambers,* D.R./*Carleton,* W.T./*Waldman,* D.W. (1984): A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates; in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, 19, 233 - 252. – *Christofi,* A.C./*Conforti,* K. (1993): Modeling Default-Free Bond Yield Curves; in: The Journal of Fixed Income, 3 (March), S. 45 - 57. – *Cohen,* R.L./*Kramer,* R.L./*Waugh,* W.H. (1966): Regression Yield Curves for U.S. Government Securities; in Management Science, 13, B168 - B175. – *Cox,* J.C./*Ingersoll,* J.E./*Ross,* S.A. (1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates; in: Econometrica, 53, S. 385 - 467. – *Diament,* P. (1993): Semi-Empirical Smooth Fit to the Treasury Yield Curve; in: Journal of Fixed Income, June 93, S. 55 - 70. – *Fisher,* D. (1966): Expectations, the Term Structure of Interest Rates, and Recent British Experience; in: Economica, 33, S. 319 - 329. – *Lin,* B.-H./*Paxson,* D.A. (1993): Valuing the „New-Issue" Quality Option in Bund Futures; in: Review of Futures Markets, 12(2), S. 347 - 388. – *McCulloch,* J.H. (1971): Measuring the Term Structure of Interest Rates; in: Journal of Business, 44, S. 19 - 31. – *McCulloch,* J.H. (1975): The Tax-Adjusted Yield Curve; in: The Journal of Finance, 30, S. 811 - 830. – *Nelson,* C.R./*Siegel,* A.F. (1987): Parsimonious Modeling of Yield Curves; in: Journal of Business, 60, S. 473 - 489. – *Neumann,* K./*Morlock,* M. (1993): Operations Research; Hanser, München. – *Shea,* G.S. (1984): Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data – Equilibrium Models and Spline Approximations; in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, 19, S. 253 - 269. – *Shea,* G.S. (1985): Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines – A Note; in: The Journal of Finance, 40, S. 319 - 325. – *Vasicek,* O.A. (1977): An Equilibrium Characterization of the Term Structure; in: Journal of Financial Economics, 5, S. 177 - 188. – *Vasicek,* O.A./*Fong,* H.G. (1982): Term Structure Modeling Using Exponential Splines; in: The Journal of Finance, 37, S. 339 - 348. – *Wilhelm,* J./*Brüning,* L. (1992): Die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze: Theoretisches Konstrukt und empirische Evaluierung; in: Kredit und Kapital, 2, S. 259 - 294. – *Zaretsky,* M. (1995): Generation of a Smooth Forward Curve For U.S. Treasuries; in: Journal of Fixed Income, September 95, S. 65 - 69.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Zusammenfassung

Ein neuer Ansatz zur Bestimmung der Zinsstruktur
Theorie und empirische Ergebnisse für den deutschen Rentenmarkt

Die vorliegende Arbeit stellt ein zweistufiges Verfahren zur Bestimmung der Zinsstruktur vor. Bei dieser Methode wird in einem ersten Schritt mit Hilfe der quadratischen Optimierung eine diskrete Zinsstrukturkurve geschätzt. Werden höhere Ansprüche an die Glattheit der Zinsstrukturkurven gestellt, z.B. die Forderung nach mehrmaliger stetiger Differenzierbarkeit, so erfolgt in einem zweiten Schritt eine Approximation der Zinsstrukturkurve mit Hilfe polynomialer Splines. Im Anschluß an die Diskussion des Verfahrens findet die vorgestellte Methode im Rahmen einer empirischen Untersuchung am deutschen Anleihemarkt für den Zeitraum 1980 - 1993 Anwendung. Die empirischen Ergebnisse zeigen, daß das Verfahren eine sehr gute Anpassungsgüte an die Marktpreise besitzt. Insbesondere die Ergebnisse des Out-of-the-Sample-Tests unterstreichen nachdrücklich die Qualität des vorgestellten Verfahrens.

Summary

A New Approach for Determining the Term Structure of Interest Rates
Theory and Empirical Results for the German Bond Market

In this paper we introduce a two-step procedure for the estimation of the term structure of interest rates. In the first step we use a quadratic-linear programming approach in order to determine a discrete discount function. If higher standards are demanded, e.g. a term structure which is several times continuously differentiable, we approximate the corresponding discrete term structure in a second step with splines. Subsequent to a discussion of the procedure, the proposed method is applied within an empirical study for the German market for the sample period 1980 through 1993. The empirical results emphasize the explanatory power of the proposed method. In particular, an out-of-the-sample test proofs the high quality of the method for pricing new issues.

Résumé

Nouvelle méthode pour la détermination de la structure des taux d'intérêt
Théorie et résultats empiriques pour le marché des capitaux allemands

Dans cet article, nous introduisons une procédure à deux étapes pour l'estimation de la courbe des taux d'intérêt. Dans la première étape nous utilisons une approche de programmation linéaire-quadratique pour pouvoir determiner une fonction discrète de la valeur actuelle. Si des ordres supérieurs sont demandés, par exemple une structure de taux différentiable plusieurs fois, nous faisons une approximation de la structure des taux discrète dans une deuxième étape avec une méthode des splines. Après une discussion de la procédure, la méthode proposée

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

est appliquée avec une étude empirique sur le marché allemand pour une période de 1980 à 1993. Spécialement les résultats empiriques du test «Out-of-the-Sample» montrent la qualité de la procédure.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.30.1.116 | Generated on 2025-07-26 10:49:53
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/