

# Optimales Hedging (Kurssicherung) im Außenhandel

Von Wolfgang Jakobs und Jürgen Schröder<sup>1</sup>, Mannheim

## I. Einleitung

In diesem Aufsatz werden Währungsoptionen und Währungsterminkontrakte in ihrer Eigenschaft als Kurssicherungsinstrumente miteinander verglichen. Insbesondere soll die grundlegende Frage, mit welchem der beiden Instrumente sich ein Wirtschaftssubjekt gegen Preisschwankungen seines risikobehafteten Aktivums absichern soll, im Rahmen einer mikroökonomischen Analyse beantwortet werden. Exemplarisch wird ein Exporteur unterstellt, der entweder bereits eine offene Dollarposition aus einem Exportgeschäft hat oder noch erwägt, ob für den Auslandsmarkt produziert werden soll.

Die wenigen Empfehlungen aus der Literatur für die Wahl zwischen Optionen und Terminkontrakten finden eher signifikante Unterschiede in den Kurssicherungs-Eigenschaften beider Instrumente: Kurssicherung (Hedging) mit Optionen biete im Gegensatz zur Absicherung mit Terminkontrakten die Möglichkeit, an günstigen Kursentwicklungen des zugrundeliegenden Finanzaktivums teilhaben zu können. Dieser Vorteil müsse allerdings mit einer Optionsprämie erkaufte werden.

## II. Hedge-Möglichkeiten

Das hier verwendete Modell der Optionspreisbestimmung wird detailliert in *Jakobs/Schröder* (1995) beschrieben. Es wird ein Exporteur betrachtet, der aus einem Warengeschäft am Ende der Periode einen Dollar erhält. Der zukünftige Wechselkurs ist zu Beginn der Periode unsicher; es wird unterstellt, daß er einem binomialen stochastischen Prozeß folgt.  $S$  ist der Preis des Dollars zu Beginn der Periode; am Ende der Periode beträgt er entweder  $uS$  (mit der Wahrscheinlichkeit  $q$ )

---

<sup>1</sup> Wir möchten uns an dieser Stelle bei Gerd Matzer und Rainer Pfadt für ihre zahlreichen wertvollen Anregungen bedanken.

oder  $dS$  (mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - q$ ). Da  $u > d$ , wird  $u$  im folgenden als Eintritt des günstigen Umweltzustands gedeutet,  $d$  entsprechend als Eintritt des ungünstigen Umweltzustands. Der einheitliche amerikanische Zinssatz wird mit  $R^*$  bezeichnet, der entsprechende deutsche Zins mit  $R$ . Die Bruttoertragsrate einer Anlage in den USA wird mit  $r^*$ , die Bruttoertragsrate einer Anlage in Deutschland wird mit  $r$  bezeichnet. Definitiv gelten folgende Zusammenhänge:  $r \equiv 1 + R$  und  $r^* \equiv 1 + R^*$ .

Dem Exporteur bieten sich zumindest drei Möglichkeiten, um das Wechselkursrisiko seiner zukünftigen offenen Dollarposition auszuschalten: Hedging via Devisenkassamarkt, Hedging via Devisenterminmarkt und Hedging via Devisenverkaufsoption. Im folgenden werden alle drei Absicherungsstrategien beschrieben und miteinander verglichen.

### 1. Hedging via Devisenkassamarkt

Der Investor kann sich gegen die unterstellte Kursschwankung seines künftigen Dollarvermögens vollständig absichern, indem er sofort einen Kredit über  $1/r^*$  Dollar aufnimmt. Diesen Dollarbetrag wechselt er am Kassamarkt in  $(1/r^*)S$  DM um und legt diese zur Ertragsrate  $r$  in Deutschland an. Am Ende der Periode muß der Kredit mit 1 Dollar getilgt werden. Der Exporteur verwendet hierzu die Dollarzahlung aus dem Exportgeschäft. Es verbleiben ihm in jedem Umweltzustand  $(r/r^*)S$  DM aus der DM-Anlage. Diese Absicherung kann anschaulich im sogenannten Diagramm der Umweltzustände illustriert werden. Der Punkt  $E1$  in Abbildung 1 repräsentiert sozusagen die „Ausgangssituation“ des Exporteurs. Ohne Absicherung beträgt der DM-Wert seiner Dollarforderung am Ende der Periode entweder  $uS$  oder  $dS$ , je nach Umweltzustand. Sichert er sich – wie oben beschrieben – vollständig gegen das Wechselkursrisiko ab, erreicht er den Punkt  $E2$ ; dieser liegt auf der  $45^\circ$ -Linie, die für jeden Umweltzustand denselben Portfeuillewert  $(r/r^*)S$  impliziert.

Die Steigung der Geraden durch  $E2$  und  $E1$  kann direkt aus der Zeichnung abgelesen werden. Es gilt:<sup>2</sup>

$$(1) \quad \tan \beta = \frac{u - r/r^*}{r/r^* - d} = \frac{r^*u - r}{r - r^*d} = \frac{1 - q^*}{q^*},$$

<sup>2</sup> Um triviale Ergebnisse zu vermeiden, muß  $r^*u > r > r^*d$  gelten.

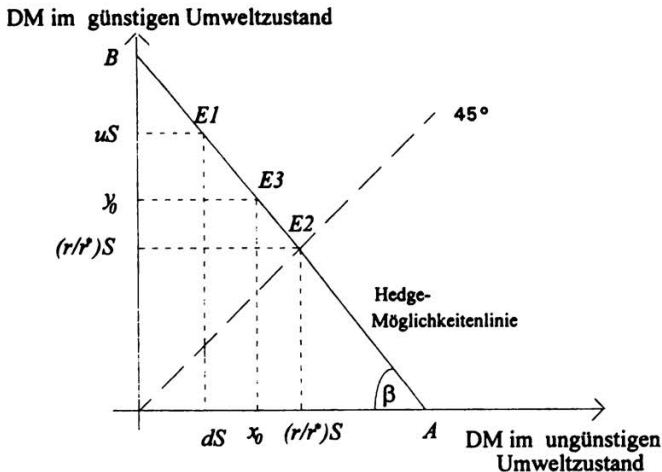


Abbildung 1

wobei:

$$(1a) \quad q^* \equiv \frac{r - r^*d}{r^*(u - d)} \Rightarrow 1 - q^* \equiv \frac{r^*u - r}{r^*(u - d)}$$

Je höher der Dollarbetrag, den der Exporteur als Kredit aufnimmt, desto mehr entfernt sich sein Risikoprofil von *E1* auf der Hedge-Möglichkeitenlinie in Richtung *E2*. Will er beispielsweise die Hälfte seiner künftigen Dollarforderung gegen das Wechselkursrisiko absichern, muß er einen Dollarkredit in Höhe von  $(1/2)(1/r^*)$  aufnehmen. Umtausch in DM und Anlage in Deutschland führt zu einem Endwert von  $(1/2)(r/r^*)S$  DM. Der fällige Kredit wird mit der Hälfte der Dollarforderung am Ende der Periode getilgt, es verbleibt dem Exporteur ein halber Dollar, der je nach Umweltzustand entweder  $(1/2)uS$  DM oder  $(1/2)dS$  DM wert ist. Tabelle 0 zeigt den gesamten DM-Endwert seines Portefeuilles in Abhängigkeit vom Umweltzustand.

Dieses Portefeuilleprofil wird in Abb. 1 durch den Punkt *E3* angedeutet. Durch entsprechende Variation der Kreditaufnahme kann theoretisch jeder Punkt der Hedge-Möglichkeitenlinie auch außerhalb der Strecke *E1 - E2* erreicht werden. Damit ist die Hedge-Möglichkeitenlinie folgendermaßen definiert: Auf ihr liegen alle Risikoprofile, die bei gegebener Anfangsausstattung durch alternative Hedge-Positionen erreicht werden können. Ihre Steigung (1) gibt die Vermögensabnahme im günsti-

Tabelle 0

$u$	$y_0 \equiv (1/2) \cdot (r/r^*)S + (1/2) \cdot (uS)$
$d$	$x_0 \equiv (1/2) \cdot (r/r^*)S + (1/2) \cdot (dS)$

gen Umweltzustand an, die notwendig ist, um eine zusätzliche Vermögenseinheit im ungünstigen Umweltzustand zu erreichen. Je höher der inländische Zins  $r$  und je höher  $d$ , desto flacher verläuft die Hedge-Möglichkeitenkurve. Höhere Werte beider Parameter sorgen demnach dafür, daß weniger Vermögen im günstigen Zustand aufgegeben werden muß, um eine zusätzliche DM im ungünstigen Umweltzustand zu erhalten. Demgegenüber erhöhen sich diese Opportunitätskosten mit steigendem  $u$  und  $r^*$ .

## 2. Hedging via Devisenterminmarkt

Alternativ zur Absicherung über den Kassamarkt kann der Exporteur seine gesamte Dollarforderung auch durch einen Verkauf am Devisenterminmarkt absichern. Er erhält damit in jedem Umweltzustand den Terminkurs  $F$ . Im Arbitragegleichgewicht müssen beide Wege der Absicherung zum gleichen Ertrag führen, d. h.  $F = (r/r^*)S$ . (Vgl. hierzu *Jakobs/Schröder* (1995)). Damit ist der Exporteur zwischen beiden Wegen der Absicherung indifferent.

Sichert sich der Exporteur über den Kassa- und Kreditmarkt ab, kann er verschiedene Punkte der Möglichkeitenlinie (Risikoprofile) durch Variation seiner Dollarkreditaufnahme erreichen. Bei der Terminmarktabsicherung lassen sich die gleichen Risikoprofile durch Variation der per Termin verkauften Dollar erreichen. Wenn  $\lambda$  denjenigen Anteil der Dollarforderung bezeichnet, den der Exporteur per Termin verkauft, verbleiben ihm  $(1 - \lambda)$  Dollar, die nicht abgesichert sind. Sein Risikoprofil am Ende der Periode ist in Tabelle 1 dargestellt.

Wählt der Investor beispielsweise  $\lambda = 0$ , bleibt er im Punkt  $E1$ , d. h., er behält seine Anfangsausstattung. Ein  $\lambda = 1$  führt ihn zum Punkt  $E2$ , was einem Terminverkauf seines ganzen Portefeuilles entspricht. Ein  $\lambda$  zwischen 0 und 1 bedeutet, daß lediglich ein Teil der Dollar per Termin verkauft wird. In diesem Fall behält der Investor ein Restrisiko. Mit zunehmendem  $\lambda$  nähert er sich dem Punkt  $E2$ . Mit einem  $\lambda > 1$  lassen sich

Tabelle 1

$u$	$y_1 \equiv \lambda \cdot (r/r^*)S + (1 - \lambda) \cdot (uS)$
$d$	$x_1 \equiv \lambda \cdot (r/r^*)S + (1 - \lambda) \cdot (dS)$

Punkte zwischen  $E2$  und  $A$  erreichen. Der Investor würde in einem solchen Fall mehr Dollar per Termin verkaufen, als er tatsächlich erhält. Um seiner Lieferverpflichtung nachzukommen, müßte er bei Fälligkeit entsprechend Dollar nachkaufen. Sinkt der Dollar auf  $dS$ , erhöht dies den Portefeuillewert, da der Preis für die nachzukaufenden Dollar unter dem Preis des Terminkontrakts liegt. Steigt der Dollar hingegen auf  $uS$ , verschlechtert sich der Portefeuillewert entsprechend. Im Extremfall kann der Investor sogar den Punkt  $A$  erreichen. Dies würde einen Portefeuillewert von 0 im günstigen Umweltzustand implizieren. Mit einem negativen  $\lambda$  erreicht der Investor Punkte zwischen  $E1$  und  $B$ . Ein negatives  $\lambda$  entspricht dem Kauf von Dollar per Termin zusätzlich zur bereits vorhandenen Dollarforderung.

Nur am Rande sei erwähnt, daß theoretisch wie praktisch auch Punkte rechts unterhalb von  $A$  und links oberhalb von  $B$  erreicht werden können. Punkte links oberhalb von  $B$  implizieren einen negativen Portefeuillewert im ungünstigen, Punkte rechts unterhalb von  $A$  einen negativen Portefeuillewert im günstigen Umweltzustand.

### 3. Hedging via Verkaufsoptionen

Alternativ könnte der Investor sein Risikoprofil durch Optionsgeschäfte ändern. Will er sein Kursrisiko vermindern, ist der Kauf einer Verkaufsoption auf 1 Dollar mit dem Basispreis  $K$  ein geeignetes Instrument. Im Binomialmodell beträgt der Wert einer Verkaufsoption,  $p$ , solange  $K \in (uS, dS)$  (vgl. *Jakobs/Schröder* 1995):

$$(2) \quad p(K) = \frac{1 - q^*}{r} (K - dS).$$

Während man bei Terminkontrakten *durch Variation von  $\lambda$*  das Risikoprofil  $(y, x)$  beeinflussen kann, lassen sich beim Hedging mit Verkaufsoptionen *durch Variation von  $K$*  unterschiedliche Risikoprofile erzeugen.

Vergleicht man die Absicherungseigenschaften von Optionen und Terminkontrakten, muß berücksichtigt werden, daß beim Terminverkauf des Dollarbetrages keine Kosten anfallen, während beim Kauf einer Verkaufsoption die Optionsprämie gemäß (2) zu Beginn der Periode bezahlt werden muß. Um gleiche Bedingungen herzustellen, wird daher im folgenden angenommen, daß der Exporteur die Optionsprämie durch Kreditaufnahme finanziert, so daß bei Vertragsabschluß ebenfalls kein Eigenkapital erforderlich wird. Für die folgende Argumentation wird unterstellt, daß der Kredit in den USA aufgenommen wird; eine Kreditaufnahme im Inland wäre allerdings ebenso gut möglich. Zur Finanzierung der Optionsprämie müssen  $[p(K)/S]$  \$ aufgenommen werden, die am Ende der Periode inklusive Zinsen mit  $[r \cdot p(K)/S]$  \$ zu tilgen sind. Aufgrund dieser Überlegung läßt sich der DM-Portefeuillewert in Abhängigkeit vom Umweltzustand wie folgt zusammenfassen:

Tabelle 2

$u$	$y_2 \equiv uS - [r \cdot p(K)/S] \cdot uS = uS - r \cdot u p(K)$
$d$	$x_2 \equiv K - [r \cdot p(K)/S] \cdot dS = K - r \cdot d p(K)$

Tritt der günstige Umweltzustand ein, wird die Option nicht ausgeübt, und es verbleibt die Dollarforderung ( $uS$ ) abzüglich der Tilgungsverpflichtung. Bei Eintritt des ungünstigen Umweltzustandes übt der Exporteur die Option aus und erhält den Basispreis gegen Lieferung seiner Dollarforderung. Er muß allerdings auch in diesem Umweltzustand den Kredit tilgen, wobei seine Verpflichtung, gemessen in DM, durch den gesunkenen Dollarkurs entsprechend niedriger ist.

#### 4. Die Äquivalenz von Verkaufsoption und Terminkontrakt als Hedge-Instrument

Bei einem Basispreis von  $K = dS$  beträgt der Optionswert gemäß (2) genau null. In diesem Fall bleibt der Portefeuillewert im Punkt  $E1$  in Abb. 1, da die Option auch im ungünstigen Zustand nicht gewinnbringend ausgeübt werden kann. Mit steigendem  $K$  (und damit mit zunehmender Prämie  $p(K)$ ) sinkt die Varianz des Portefeuilles, da es sich auf der AB-Geraden der 45°-Linie nähert.

Nun ist zu prüfen, ob sich mit Verkaufsoptionen die gleichen Risikoprofile wie mit Terminkontrakten herstellen lassen. Dies ist möglich, wenn bei alternativen Werten für  $K$  und  $\lambda$  *gleichzeitig*  $y_1 = y_2$  und  $x_1 = x_2$  erfüllt ist, wenn also beide Absicherungsarten in jedem Umweltzustand zum gleichen Portefeuillewert führen. Löst man beide Gleichungen nach  $\lambda$  auf, ergibt sich:

$$(3) \quad \lambda = \frac{r^*u}{(u-d)} \frac{K-dS}{rS}.$$

D.h., solange  $K \in (uS, dS)$ , gibt es zu jedem  $K$  genau ein  $\lambda$ , bei dem die Absicherung mit Hilfe von Terminkontrakten zum gleichen Risikoprofil am Ende der Periode führt wie die Absicherung mit den Verkaufsoptionen. Zur Illustration soll demonstriert werden, bei welchem Basispreis das Hedgeportefeuille mit der Verkaufsoption in jedem Umweltzustand den gleichen Endwert aufweisen würde. Man wählt hierzu denjenigen Basispreis, bei dem  $y_2 = x_2$ . Dieser lautet  $K = S(ur + r^*ud - rd)/r^*u$ . Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man in (3)  $\lambda = 1$  setzt und nach  $K$  auflöst. Dies ist verständlich, wenn man bedenkt, daß die Absicherung mit Terminkontrakten in jedem Umweltzustand zum gleichen Endwert führt, wenn man  $\lambda = 1$  wählt.

Zusammenfassung: Mit Hilfe von Optionen oder Terminkontrakten lassen sich – ebenso wie mit der Absicherung über den Kassamarkt – alle Punkte der Hedge-Möglichkeitenlinie erreichen. Hier ergibt sich eine Analogie zur mikroökonomischen Funktion des Kreditmarktes. Im Zweiperiodenmodell ermöglicht der Kreditmarkt, von der Anfangsausstattung abweichende Konsumprofile zu wählen. Graphisch werden diese Konsumprofile durch Punkte auf der Budgetgeraden eines Haushalts dargestellt. Der Kreditmarkt erfüllt demnach im intertemporalen Modell die gleiche Funktion wie die erwähnten Absicherungsmöglichkeiten im Modell mit unsicherem Wechselkurs.

### 5. Interpretation der Hedge-Möglichkeiten

Die Absicherung über den Terminmarkt eröffnet dem Exporteur gegenüber der klassischen Absicherung über den Kassamarkt keine neuen Möglichkeiten. Ebenso lassen sich mit Optionen keine Risikoprofile erreichen, die man nicht auch mit Terminkontrakten haben könnte. D.h., in diesem Modell bieten Optionen gegenüber der klassischen Absicherung keine weiteren Möglichkeiten. Dies widerspricht der Intuition und bedarf deshalb einer Erklärung. Die im Modell unterstellte Stocha-

stik erlaubt es, eine Option durch Kassamarkt- und Kreditgeschäfte (Äquivalenzportefeuille) nachzubilden. Hieraus folgt sofort, daß jedes Optionsprofil ebenso gut durch das Äquivalenzportefeuille erreicht werden kann.<sup>3</sup> Die Option wird redundant. *Ohne* eine konkrete Annahme über die Stochastik des zukünftigen Dollarkurses wäre es allerdings unmöglich, ein Äquivalenzportefeuille zu einer Dollaroption zu konstruieren. Die Dollaroption könnte in diesem Fall nicht rechnerisch bewertet werden. Hedgingprofile mit Optionen könnten nicht durch Termin- und Kassageschäfte nachgebildet werden. D.h., letztlich ist es die Annahme über die Stochastik des zukünftigen Wechselkurses, die Optionen in einer Welt ohne Transaktionskosten überflüssig macht.

### III. Die optimale Kurssicherung

Im folgenden werden die oben besprochenen Absicherungsmöglichkeiten in die mikroökonomische Theorie eingebunden. Die bisherigen Überlegungen haben bereits verdeutlicht, daß jeder Investor zwischen den verschiedenen Absicherungsgeschäften indifferent ist, da sie ihm die gleichen Risikoprofile ermöglichen. Nicht beantwortet ist allerdings die Frage, welches der Risikoprofile auf der Möglichkeitenlinie für einen risikoaversen Investor optimal ist.

#### 1. Die Optimalitätsbedingung für einen risikoaversen Investor

Der Einfachheit halber wird im folgenden die optimale Absicherungsstrategie in termini von Terminkontrakten formuliert. Es wird – wie in der mikroökonomischen Theorie üblich – angenommen, daß der risikoscheue Investor den *Erwartungsnutzen* seines Portefeuillewertes am Ende der Periode maximiert. Da  $y_1$  den Wert des Portefeuilles im günstigen Umweltzustand und  $x_1$  den entsprechenden Wert des Portefeuilles im ungünstigen Umweltzustand bezeichnet (vgl. Tab. 1), lautet der Erwartungsnutzen des Investors:

$$(4) \quad EU = q \cdot v(y_1) + (1 - q) \cdot v(x_1),$$

---

<sup>3</sup> Diese Aussage gilt natürlich nur, wenn man Transaktionskosten ausschließt. Wie aus der binomialen Optionspreistheorie bekannt ist, muß das Äquivalenzportefeuille im allgemeinen  $n$ -Perioden-Fall bei jeder Wechselkursänderung bis zur Fälligkeit der Option angepaßt werden, damit es äquivalent zur Option bleibt (vgl. z.B. *Cox/Rubinstein* (1985)). Transaktionskosten bei jeder Anpassung würden das Äquivalenzportefeuille erheblich verteuern.



wobei die Funktion  $v(\cdot)$  die üblichen Konkavitätseigenschaften aufweisen soll. Das Optimierungsproblem des Investors besteht darin, dasjenige  $\lambda$  zu finden, das seinen Erwartungsnutzen maximiert. Die Bedingung 1. Ordnung hierzu lautet formal:  $\partial EU / \partial \lambda = 0$ . Dies impliziert:

$$(5) \quad \frac{(1-q) \cdot v'(x_1)}{q \cdot v'(y_1)} = \frac{r^* u - r}{r - r^* d} = \frac{1 - q^*}{q^*}.$$

Steigung der Indifferenzkurve = Steigung der Hedge-Möglichkeitenlinie

Hieraus lassen sich folgende Charakterisierungsaussagen für das optimale  $\lambda$  ableiten:

- a) Wenn  $q = q^*$ , folgt  $v'(y_1) = v'(x_1)$  und damit  $y_1 = x_1$ . Dies impliziert  $\lambda = 1$ .
- b) Wenn  $q < q^*$ , folgt  $v'(y_1) > v'(x_1)$  und damit  $y_1 < x_1$ . Dies impliziert  $\lambda > 1$ .
- c) Wenn  $q > q^*$ , folgt  $v'(y_1) < v'(x_1)$  und damit  $y_1 > x_1$ . Dies impliziert  $\lambda < 1$ .

Diese Charakterisierungsaussagen verdeutlichen, daß die Beziehung zwischen  $q$  und  $q^*$  für die Höhe des optimalen  $\lambda$  von entscheidender Bedeutung ist. Während  $q$  die Wahrscheinlichkeit mißt, mit welcher der Investor den günstigen Umweltzustand erwartet, umfaßt  $q^*$  die exogenen Parameter  $u, d, r$  und  $r^*$ , die annahmegemäß jedem Investor bekannt sind. Im folgenden werden die Fälle a, b und c ökonomisch interpretiert.

## 2. Interpretationen der Optimalitätsbedingungen

### a) Fall a: $q = q^*$

Wenn  $q = q^*$ , ist, wie man sich mit Hilfe der Definitionsgleichung (1a) leicht klar machen kann, folgende Gleichung erfüllt:

$$(6) \quad rS/r^* = quS + (1 - q)dS.$$

Auf der linken Seite steht der DM-Wert eines Dollars am Ende der Periode, wenn vollständig abgesichert wird. Auf der rechten Seite der Gleichung steht der (subjektive) Erwartungswert eines Dollars ohne Absicherung, ebenfalls ausgedrückt in DM. Wenn also  $q = q^*$ , stimmt der (subjektive) Erwartungswert der offenen Position (*E1*) mit dem Wert der vollständig abgesicherten Position (*E2*) überein. Jeder risikoaverse

Investor bevorzugt bei gleichen Erwartungswerten das Portefeuille mit der geringsten Varianz. Er wird, wie in Fall a) beschrieben,  $\lambda = 1$ , also die vollständige Absicherung wählen.

Bei genauerer Betrachtung von (6) bietet sich eine noch prägnantere Interpretation an. Auf der linken Seite steht der Terminkurs, auf der rechten Seite der erwartete Kassakurs. Bildet der risikoaverse Investor seine Erwartungen gemäß (6), *entspricht also der Terminkurs dem von ihm erwarteten Kassakurs, ist vollständige Absicherung optimal.*

Die vorangegangene Interpretation wird leichter verständlich, wenn man den Einfluß von Hedging auf den Erwartungswert des Portefeuilles betrachtet. Hedging entlang der Hedge-Möglichkeitenlinie impliziert den Verzicht auf einen Teil des Vermögens im günstigen Umweltzustand, um im ungünstigen Umweltzustand Vermögen hinzu zu gewinnen. Die Wirkung dieser Maßnahme auf den Erwartungswert des Portefeuilles ist a priori nicht eindeutig. Wird beispielsweise via Terminmarkt gehedgt, läßt sich der Erwartungswert  $\mu$  jedes Portefeuilles der Hedge-Möglichkeitenlinie allgemein in Abhängigkeit von  $\lambda$  wie folgt schreiben (vgl. Tabelle 1):

$$(7) \quad \mu(\lambda) = q \cdot y_1(\lambda) + (1 - q) \cdot x_1(\lambda).$$

Der Erwartungswert des Hedgeportefeuilles reagiert auf Änderungen von  $\lambda$  wie folgt:

$$(8) \quad \mu'(\lambda) = S \left( \frac{r}{r^*} - d - q(u - d) \right).$$

Bildet nun der Investor seine Erwartung gemäß (6), ist also  $q = q^*$ , folgt aus (8) in Verbindung mit (1a)  $\mu'(\lambda) = 0$ , d.h., jedes Risikoprofil entlang der Hedge-Möglichkeitenlinie hat für den Investor den gleichen Erwartungswert. Ist er risikoneutral, d.h.  $v'(y_1) = v'(x_1) = \text{konstant}$ , stimmt seine Indifferenzkurve mit der Hedge-Möglichkeitenlinie überein. Damit stiftet ihm jedes Risikoprofil auf der Hedge-Möglichkeitenlinie den gleichen Nutzen. Die Indifferenzkurven des risikoaversen Investors verlaufen hingegen konvex zum Ursprung. Bei  $q = q^*$  stimmt die Steigung seiner Indifferenzkurve genau an der Stelle  $E2$  mit der Steigung der Hedge-Möglichkeitenlinie überein, wie aus (5) hervorgeht und in Abbildung 2 graphisch dargestellt ist.

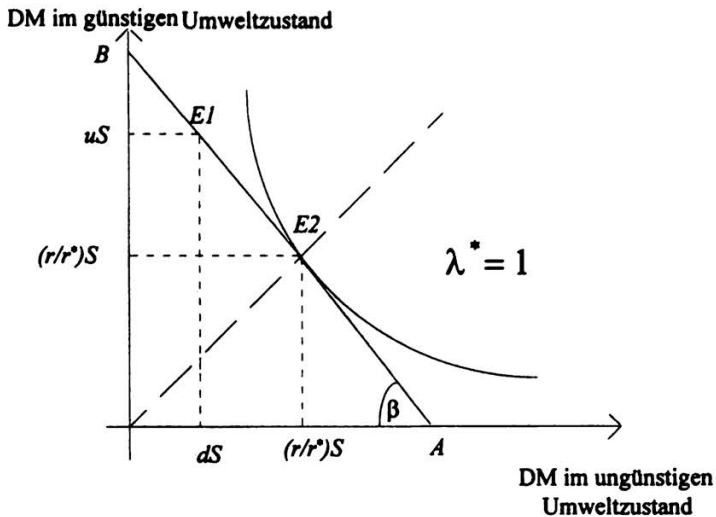


Abbildung 2

b) Fall b:  $q < q^*$

In termini von (6) ausgedrückt, impliziert  $q < q^*$ :

$$(6a) \quad rS/r^* > quS + (1 - q)dS.$$

D.h., aus der Sicht des Investors liegt der Terminkurs des Dollars über dem erwarteten Kassakurs. Das vollständige Absichern führt also nicht nur zu einer geringeren Varianz, sondern erhöht zusätzlich den Erwartungswert des Portefeuilles. Genauer gesagt folgt für  $q < q^*$ :  $\mu'(\lambda) > 0$ . D.h., je mehr sich der Investor auf der Linie dem Punkt A nähert, desto größer wird der Erwartungswert seiner Auslandsposition. Wie aus (5) hervorgeht, ist der Betrag der Steigung der Indifferenzkurve am Punkt der vollständigen Absicherung  $E2$  größer als der Betrag der Steigung der Hedge-Möglichkeitenlinie. Abbildung 3 illustriert, daß das optimale Risikoprofil in diesem Fall rechts von  $E2$  (im Punkt  $E3$ ) liegt.

c) Fall c:  $q > q^*$

In termini von (6) ausgedrückt, impliziert  $q > q^*$ :

$$(6b) \quad rS/r^* < quS + (1 - q)dS.$$

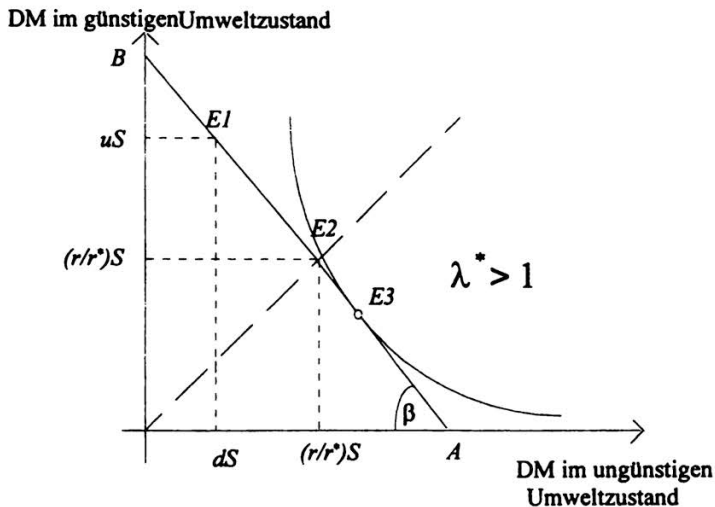


Abbildung 3

Hier übersteigt der vom Investor erwartete Kassakurs den Terminkurs. In analoger Begründung zu Abschnitt b) reduziert Hedging den Erwartungswert seiner Auslandsposition. Die Steigung der Indifferenzkurve des risikoaversen Investors ist im Punkt  $E2$  nun flacher, d. h., sein optimales Risikoprofil wird links von  $E2$  liegen. Wie weit dieser Optimalpunkt von  $E2$  entfernt ist, hängt neben  $q$  noch vom Grad der Risikoaversion ab.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß der risikoaverse Investor seine offene Auslandsposition nur dann vollständig absichern wird, wenn der erwartete Kassakurs dem Terminkurs entspricht.

### 3. Interpretation von $q^*$

$q^*$  kann als gleichgewichtige Wahrscheinlichkeit für den günstigen Umweltzustand in einer Welt mit überwiegend risikoneutralen Marktteilnehmern gedeutet werden. Angenommen, alle Marktteilnehmer seien risikoneutral und stimmten darin überein, daß ein Dollar am Ende der Periode entweder zum Preis  $uS$  oder  $dS$  gehandelt werden wird. Da risikoneutrale Anleger nur den Erwartungswert betrachten, muß im Gleichgewicht der erwartete Ertrag eines Dollars mit dem Ertrag der risikoneutralen Anlage übereinstimmen, d. h., (6) muß erfüllt sein. Während also

auf einzelwirtschaftlicher Ebene Gleichung (6) die Erwartung eines bestimmten Investors beschreibt, kann man sie auf der Makroebene unter der Annahme allgemeiner Risikoneutralität als Gleichgewichtsbedingung interpretieren, aus der  $q = q^*$  resultiert. Die makroökonomische Sichtweise liefert folgende Interpretation der Optimalitätsbedingung: Stimmt die Erwartung des risikoaversen Investors mit der des risikoneutralen Marktes überein, hat für ihn jedes Risikoprofil auf der Möglichkeitenlinie den gleichen Erwartungswert. Hält der Investor jedoch den günstigen Umweltzustand für weniger wahrscheinlich als der Markt, wird er mehr Dollar per Termin verkaufen, als er tatsächlich erhalten wird, und damit im ungünstigen Zustand einen höheren Portefeuillewert haben als im günstigen Umweltzustand. Damit weist auch dieses optimal abgesicherte Portefeuille eine Varianz auf.

#### IV. Hedge-Möglichkeiten versus Produktionsentscheidung

Bisher wurde unterstellt, daß der Exporteur seine Ware bereits im Ausland verkauft hat und lediglich überlegt, wie er sich optimal gegen das Wechselkursrisiko seiner Dollarforderung absichern kann. Nun soll untersucht werden, wie das Wechselkursrisiko und Hedge-Möglichkeiten bereits die Produktionsentscheidung eines potentiellen risikoaversen Exporteurs beeinflussen. Wechselkursschwankungen implizieren unsichere DM-Erlöse, denen sichere Produktionskosten gegenüberstehen. Hedge-Möglichkeiten reduzieren die Erlösschwankungen, was sich wiederum auf die Produktionstätigkeit auswirkt. Welche Produktions- und welche Absicherungsstrategie wird ein risikoaverser Produzent und Exporteur verfolgen?

##### 1. Optimale Produktion ohne Absicherungsmöglichkeiten

Um diese Frage im Modell zu beantworten, wird nun unterstellt, daß dem Exporteur die Produktionstechnik  $f(k)$  mit  $f' > 0$ ,  $f'' < 0$  zur Verfügung steht.  $k$  bezeichnet das in der Produktion verwendete Kapital, welches der Exporteur in beliebiger Menge zum konstanten Preis von  $\tau$  DM mieten kann; dieser Mietpreis ist erst am Ende der Periode zu entrichten. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß der Exporteur seine gesamte Produktion zum festen Stückpreis von 1 Dollar in den USA verkaufen kann. Produktion, Export und Eingang der Dollarforderung nehmen genau ein Jahr in Anspruch, so daß der DM-Erlös des Exporteurs mit dem zukünftigen Dollarkurs schwankt. Unter Berück-

sichtigung der binomialen Stochastik läßt sich der zukünftige Erlös des Exporteurs demnach wie folgt formulieren: Mit der Wahrscheinlichkeit  $q$  erhält er  $f(k) \cdot uS$  DM, mit der Wahrscheinlichkeit  $(1 - q)$  erhält er  $f(k) \cdot dS$  DM. Berücksichtigt man neben den Kosten noch die Absicherungsmöglichkeiten über den Terminmarkt, läßt sich sein *Gewinn* – je nach Dollarkursentwicklung – in Anlehnung an Tabelle 1 folgendermaßen formulieren:

Tabelle 3

$u$	$y_3 \equiv f(k) \cdot \alpha - \tau k$
$d$	$x_3 \equiv f(k) \cdot \beta - \tau k$

mit:  $\alpha \equiv y_1 \equiv [\lambda \cdot (r/r^*) S + (1 - \lambda) \cdot (uS)]$

$\beta \equiv x_1 \equiv [\lambda \cdot (r/r^*) S + (1 - \lambda) \cdot (dS)]$

Sichert der Exporteur beispielsweise seine gesamte Dollarforderung ab ( $\lambda = 1$ ), beträgt sein Erlös in jedem Umweltzustand  $f(k) \cdot (r/r^*) S$  DM.

Der Erwartungsnutzen  $V(k, \lambda) = EU(k, \lambda)$  des Exporteurs lautet (in Anlehnung an Gleichung (4)):

(9) 
$$V(k, \lambda) = q \cdot v(y_3) + (1 - q) \cdot v(x_3).$$

Ziel des Exporteurs ist es, den Erwartungsnutzen des DM-Gewinns zu maximieren. Eigentlich müßte er simultan den optimalen Kapitaleinsatz  $k^*$  und die optimale Hedgestrategie  $\lambda^*$  ermitteln. Es soll jedoch zunächst nicht darum gehen, das Gesamtergebnis der Überlegungen des Exporteurs zu charakterisieren; vielmehr wird untersucht, wie der optimale Kapitaleinsatz von Hedge-Möglichkeiten, ausgedrückt durch die Hedgevariable  $\lambda$ , abhängt. Die Bedingung 1. Ordnung für die optimale Faktormenge  $k^*$  bei gegebener Hedge-Strategie lautet:

(10) 
$$\frac{\partial}{\partial k} V(k, \lambda) \equiv V_k = q \cdot v'(y_3) \cdot \theta_u + (1 - q) \cdot v'(x_3) \cdot \theta_d = 0,$$

wobei  $\theta_u \equiv f'(k) \cdot \alpha - \tau =$  Grenzgewinn bei einem Anstieg des Dollars,

$\theta_d \equiv f'(k) \cdot \beta - \tau =$  Grenzgewinn bei einem Sinken des Dollars.

Solange nicht voll abgesichert wird, also  $\lambda < 1$ , ist der DM-Grenzerlös einer Produktionseinheit im günstigen Umweltzustand größer als im ungünstigen Umweltzustand, d.h.  $\alpha > \beta$ .<sup>4</sup> Hieraus folgt, daß auch die Grenzgewinne in beiden Umweltzuständen nicht übereinstimmen können, solange  $\lambda < 1$ . Unter dieser Annahme gilt vielmehr:  $\theta_u > \theta_d$ . Die Bedingung für den optimalen Faktoreinsatz (10) impliziert damit  $\theta_u > 0$  und  $\theta_d < 0$ . Wäre der Grenzgewinn in jedem Umweltzustand positiv, wäre auch der Grenznutzen des Kapitals ( $V_k$ ) positiv<sup>5</sup>, womit die Optimalitätsbedingung nicht erfüllt wäre.<sup>6</sup> Bei  $\theta_u < 0$  wäre auch  $\theta_d < 0$ ; dies hätte aber einen negativen Grenznutzen des Kapitals zur Folge, was ebenfalls suboptimal ist.

Ökonomisch interpretiert, erwirtschaftet der Exporteur bei Eintritt des günstigen Umweltzustands einen positiven, bei Eintritt des ungünstigen Umweltzustandes einen negativen Grenzgewinn, solange er seinen Dollarerlös nicht voll absichert. Steigt nun der Dollar, entgeht dem Exporteur Gewinn, weil er zuwenig produziert hat, sinkt der Dollar, entgeht ihm ebenfalls Gewinn; diesmal, weil er zuviel produziert hat. Solange nicht vollständig abgesichert wird, sieht sich der Exporteur mit *zwei* möglichen Dollarkursentwicklungen konfrontiert; er hat aber nur *eine* Instrumentvariable ( $k$ ) zur Verfügung. Wäre nur ein zukünftiger Dollarkurs möglich, würde der Exporteur seinen Faktoreinsatz so wählen, daß der Grenzgewinn gleich null wird. Bei unsicherer Dollarkursentwicklung muß er eine Art Mischkalkulation betreiben, die – isoliert betrachtet – ex post in jedem Umweltzustand zu einem unbefriedigenden Ergebnis führt.

Wie im Anhang gezeigt wird, nimmt der Grenznutzen des Kapitals mit zunehmendem Kapitaleinsatz ab, d.h.  $\partial V_k / \partial k < 0$ . Diese Gesamtwirkung setzt sich aus 4 Teilwirkungen zusammen, die im folgenden Pfeilschema skizziert werden:

$$(10a) \quad q \cdot v'(y_3) \downarrow \cdot \theta_u \downarrow + (1 - q) \cdot v'(x_3) \uparrow \cdot \theta_d \downarrow.$$

Eine Erhöhung von  $k$  senkt offenbar die meisten Bestandteile von  $V_k$ . Der Grenzgewinn in jedem Umweltzustand ( $\theta_u, \theta_d$ ) sinkt aufgrund der unterstellten abnehmenden Grenzproduktivität des Kapitals. Weiterhin steigt der Gewinn im günstigen Zustand ( $y_3$ ), was den Grenznutzen in diesem Zustand reduziert. Andererseits sinkt der Gewinn im ungünsti-

<sup>4</sup> Ist beispielsweise  $\lambda = 0$ , gilt  $\alpha = uS$  und  $\beta = dS$ .

<sup>5</sup> Vom Grenznutzen des Kapitals,  $V_k$ , streng zu unterscheiden ist die Grenzproduktivität des Kapitals  $f'(k)$ .

<sup>6</sup> Es wird unterstellt, daß  $v'(0) \rightarrow \infty$  geht. Damit strebt der Exporteur auch im ungünstigen Umweltzustand einen positiven Gewinn an, d.h.  $x_3 > 0$ .

gen Umweltzustand ( $x_3$ ), was den Grenznutzen des Gewinns in diesem Umweltzustand erhöht.<sup>7</sup> Abbildung 4 skizziert einen möglichen Verlauf der Grenznutzenfunktion, wobei unterstellt wird, daß der Gewinn im Fall der Dollarkursenkung ( $x_3$ ) nicht zu klein wird.

## 2. Der Einfluß von Hedge-Möglichkeiten auf die Produktionsentscheidung

Der Grenznutzen des Kapitals hängt gemäß Tabelle 3 von  $\lambda$  ab. Damit hängt auch der optimale Faktoreinsatz von  $\lambda$  ab, d.h.  $k^* = k(\lambda)$ . Zur Erläuterung dieser Abhängigkeit sei zunächst der Einfluß von  $\lambda$  auf den Grenznutzen des Kapitals *bei gegebenem Kapitalbestand* betrachtet. Ein Anstieg von  $\lambda$  senkt  $\alpha$  und erhöht  $\beta$ ; damit sinkt jedoch auch  $y_3$ , während  $x_3$  steigt, was wiederum zu einer Steigerung von  $v'(y_3)$  und einer Senkung von  $v'(x_3)$  führt. Zusammengefaßt lassen sich diese Effekte einer marginalen Erhöhung von  $\lambda$  mit Pfeilen anschaulich skizzieren:

$$(10b) \quad q \cdot v'(y_3) \uparrow \cdot \theta_u \downarrow + (1 - q) \cdot v'(x_3) \downarrow \cdot \theta_d \uparrow$$

Die Pfeile in (10b) vermitteln den Eindruck, daß der Einfluß von  $\lambda$  auf die Optimalitätsbedingung völlig unbestimmt ist. Wie im Anhang 1 gezeigt wird, erhöht sich der Grenznutzen des Kapitals jedoch immer, wenn  $\lambda$  steigt, d.h.  $\partial V_k / \partial \lambda > 0$ , wenn  $\lambda < 1$  und  $q = q^*$ .

Zur Erklärung dieses Ergebnisses soll vereinfachend unterstellt werden, daß die Wahrscheinlichkeiten der beiden Umweltzustände nicht zu weit auseinander liegen. Geht man von einer Situation ohne Absicherung aus, ist der Grenznutzen des Gewinns im günstigen Umweltzustand kleiner als im ungünstigen, d.h.  $v'(y_3) < v'(x_3)$ . Damit (10) trotzdem erfüllt ist, muß der Grenzgewinn im günstigen Zustand betragsmäßig größer als der Grenzverlust im ungünstigen Zustand sein, also  $|\theta_u| > |\theta_d|$ . Beginnt der Exporteur nun bei konstantem Kapitaleinsatz abzusichern, führt dies zu einem Sinken von  $\theta_u$  und zu einem Anstieg von  $\theta_d$ . Beide Grenzgewinne bewegen sich auf null zu, wobei sich – wieder aufgrund von  $v'(y_3) < v'(x_3)$  – das Sinken von  $\theta_u$  weniger auf den Grenznutzen des Faktors auswirkt als der Anstieg von  $\theta_d$ . Damit führt bei gegebenem Faktoreinsatz eine marginale Erhöhung von  $\lambda$  zu einem Anstieg des Grenznutzens des Kapitals.

In Abbildung 5 wird der Grenznutzen des Kapitals (bei konstantem Kapitalbestand) in Abhängigkeit von  $\lambda$  skizziert. Mit zunehmender Absi-

<sup>7</sup> Es gilt:  $\partial y_3 / \partial k = \theta_u > 0$ ;  $\partial x_3 / \partial k = \theta_d < 0$ , solange nicht voll abgesichert wird.



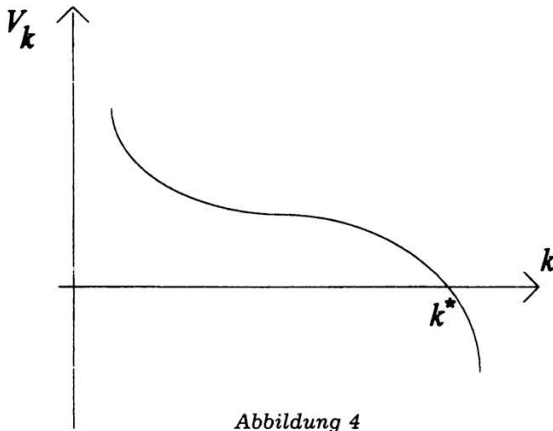


Abbildung 4

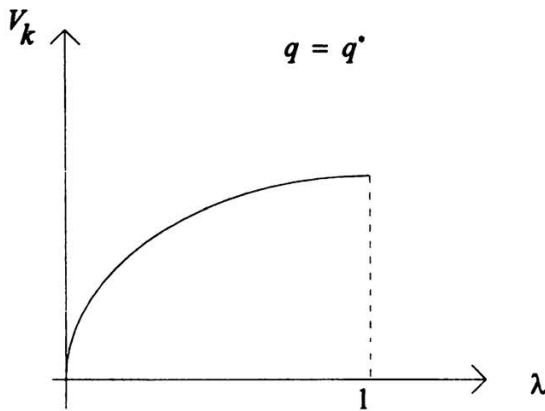


Abbildung 5

cherung wird der positive Effekt auf den Grenznutzen geringer, da sich  $v'(y_3)$  und  $v'(x_3)$  immer weiter annähern.

Auf der Basis dieser Überlegungen kann gezeigt werden, daß der Investor auf Hedging immer mit einer Ausdehnung seiner Produktion reagiert, wenn man  $q = q^*$  unterstellt:<sup>8</sup>

$$(11) \quad \text{Für } \lambda \in [0,1) \text{ gilt } k'(\lambda) = -\frac{\partial V_k / \partial \lambda}{\partial V_k / \partial k} > 0.$$

Graphisch gesprochen führt ein erhöhtes  $\lambda$  zu einer Verschiebung der Grenznutzenfunktion in Abhängigkeit vom Kapitalbestand:

<sup>8</sup> Vgl. Anhang 2.

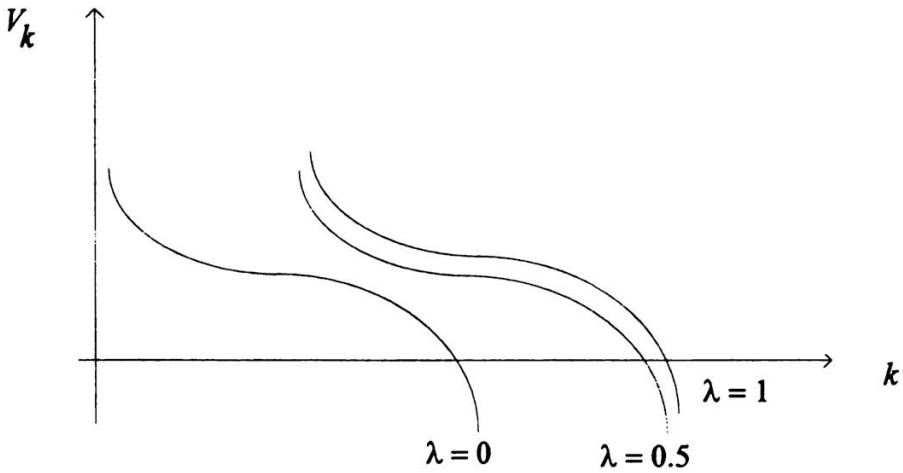


Abbildung 6

Abbildung 6 zeigt für verschiedene Hedgestrategien den Grenznutzen des Kapitals in Abhängigkeit vom Kapital selbst. Man kann erkennen, daß die Grenznutzenfunktion bei höherem Faktoreinsatz die Abszisse schneidet, wenn der Anteil der abgesicherten DM-Erlöse zunimmt, wenn man  $q = q^*$  unterstellt. Dies verdeutlicht, daß mit zunehmender Absicherung der optimale Faktoreinsatz steigt. Allerdings verringert sich der Anstieg des optimalen Kapitaleinsatzes mit zunehmendem  $\lambda$ , da dessen Wirkung auf den Grenznutzen mit zunehmender Größe nachläßt (vgl. Abbildung 5).

### 3. Das optimale Hedging und die optimale Produktionsentscheidung

Wie im Anhang gezeigt wird, ist es auch für den produzierenden Exporteur optimal, seine DM-Erlöse vollständig abzusichern, vorausgesetzt natürlich, daß  $q = q^*$ . Dieses Ergebnis gilt unabhängig vom gewählten Faktoreinsatz.<sup>9</sup> Mit dieser Überlegung kann nun der optimale Faktoreinsatz mit Hilfe der Bedingung 1. Ordnung (10) leicht bestimmt werden. Der DM-Erlös einer produzierten Einheit beträgt bei voller Absicherung  $(r/r^*)S = F$  DM in jedem Umweltzustand. Der Grenznutzen des Faktors wird null, wenn der Grenzerlös in jedem Umweltzustand

<sup>9</sup> Generell ist es für einen risikoaversen Marktteilnehmer immer optimal, eine offene Position vollständig zu schließen, wenn durch diese Absicherung deren Erwartungswert nicht verändert wird. Dabei spielt es keine Rolle, wie die offene Position entsteht.

den Grenzkosten entspricht, wenn also  $f'(k) \cdot F = \tau$ . D.h., wenn der Terminkurs dem erwarteten Kassakurs entspricht, *hängt die Produktionsentscheidung nicht mehr von den Risikopräferenzen des Exporteurs ab*. Dies wird verständlich, wenn man sich vor Augen hält, daß sich der Exporteur bei dieser Erwartung vollständig absichert und damit kein Erlösrisiko mehr hat.

Bisher wurde vereinfachend unterstellt, daß der vom Exporteur erwartete Kassakurs dem Terminkurs entspricht. Angenommen,  $E(S) > F$ . Die vorangegangene Analyse hat verdeutlicht, daß sich der Exporteur bei dieser Erwartung nicht mehr voll absichert ( $\lambda < 1$ ) und damit ein Erlösrisiko behält. Welchen Einfluß hat dieses Erlösrisiko auf die optimale Faktormenge? Im Anhang wird gezeigt, daß der Exporteur weiterhin mit der Faktormenge produziert, bei der  $f'(k) \cdot F = \tau$ . Warum, so könnte man fragen, spekuliert er nicht durch unvollständige Absicherung *und* zusätzliche Produktion auf einen steigenden Dollarkurs? Jede zusätzliche Produktion senkt die Grenzproduktivität, während die Grenzkosten konstant bleiben. Daher ist es effizienter, die Produktion konstant zu lassen und auf einen steigenden Dollarkurs zu spekulieren, indem ein Teil der (optimalen) Exportmenge nicht mehr abgesichert wird. Liegt der erwartete Dollarkurs wesentlich über dem Terminkurs, hat der Exporteur die Möglichkeit, auf Absicherung seines gesamten Exporterlöses zu verzichten und zusätzlich noch Dollar per Termin zu kaufen. Eine ähnliche Argumentation gilt für  $E(S) < F$ . Auch hier bleibt die Produktionsentscheidung unverändert; der Exporteur wird (effizient) auf einen sinkenden Dollarkurs spekulieren, indem er mehr als seinen Dollarumsatz per Termin verkauft.<sup>10</sup>

Hat der Exporteur demnach genügend Hedge-Möglichkeiten, hängt sein Produktionsvolumen weder vom Ausmaß des Wechselkursrisikos noch von seinen Erwartungen oder seiner Risikoaversion ab (*Separationstheorem*).<sup>11</sup> Vielmehr wird es neben den Produktionsbedingungen entscheidend vom Terminkurs gemäß  $f'(k) \cdot F = \tau$  bestimmt. Erwartungen und Risikoaversion beeinflussen lediglich das Ausmaß der Absicherung. Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß auch Optionen an diesem Tatbestand nichts ändern können.<sup>12</sup> Im Modell ohne Trans-

<sup>10</sup> Bei diesen spekulativen Termingeschäften entsteht kein Kreditwürdigkeitsproblem, solange das Risikoprofil der gesamten Position des Exporteurs im positiven Quadranten, d.h. zwischen den Punkten A und B in Abb. 1, bleibt.

<sup>11</sup> Vgl. Sandmo (1971) und besonders Ethier (1973).

<sup>12</sup> Vgl. dazu die andere Sichtweise aus den siebziger Jahren. Ethier (1973) beispielsweise schreibt die Gültigkeit des Separationstheorems der Existenz von Terminmärkten zu.

aktionskosten ist es dem Exporteur völlig gleichgültig, mit welchem Instrument er sich absichert.

## V. Zusammenfassung

- Im ökonomischen Sinn bieten Terminkontrakte und Optionen die gleichen Hedge-Möglichkeiten wie die Absicherung über den Kassa- und Kreditmarkt. Sie erlauben dem Exporteur, von seiner Anfangsausstattung abweichende Risikoprofile zu erreichen.
- Beim optimalen Hedging geht es demnach nicht um die Wahl des geeigneten Absicherungsinstruments, sondern um die Erwartungen und die Risikoaversion des Investors. Erst die Einführung von Transaktionskosten kann zu Unterschieden zwischen den einzelnen Instrumenten führen.
- Volle Absicherung, ganz gleich mit welchem Instrument, ist für jeden risikoaversen Investor nur optimal, wenn der Terminkurs dem von ihm erwarteten Kassakurs entspricht.
- Das Separationstheorem wird durch die Existenz von Optionskontrakten nicht beeinträchtigt.

## Anhang

### *Anhang 1: Der Einfluß von $k$ und $\lambda$ auf den Grenznutzen des Faktoreinsatzes*

Der Grenznutzen des Faktoreinsatzes lautet gemäß (10):

$$(A1) \quad V_k = q \cdot v'(y_3) \cdot \theta_u + (1 - q) \cdot v'(x_3) \cdot \theta_d.$$

Die Ableitung dieses Grenznutzens nach dem Faktor lautet:

$$(A2) \quad \frac{\partial V_k}{\partial k} = q [v''(y_3) \cdot \theta_u^2 + \alpha \cdot v'(y_3) \cdot f''] + \\ + (1 - q) [v''(x_3) \cdot \theta_d^2 + \beta \cdot v'(x_3) \cdot f''],$$

wobei  $\partial y_3 / \partial k = \theta_u$  und  $\partial x_3 / \partial k = \theta_d$ . Aufgrund der Konkavität der Nutzenfunktion und der Produktionsfunktion folgt:

$$(A3) \quad \frac{\partial V_k}{\partial k} < 0.$$

Auf eine Änderung der Hedgestrategie reagiert der Grenznutzen des Faktoreinsatzes wie folgt:

$$(A4) \quad \frac{\partial V_k}{\partial \lambda} = q \left[ v''(y_3) \frac{\partial y_3}{\partial \lambda} \cdot \theta_u + v'(y_3) \frac{\partial \theta_u}{\partial \lambda} \right] + \\ (1 - q) \left[ v''(x_3) \frac{\partial x_3}{\partial \lambda} \cdot \theta_d + v'(x_3) \frac{\partial \theta_d}{\partial \lambda} \right].$$

Gemäß Tabelle 3 gilt:

$$\frac{\partial y_3}{\partial \lambda} = f \cdot \alpha_\lambda; \quad \frac{\partial \theta_u}{\partial \lambda} = f' \cdot \alpha_\lambda; \quad \frac{\partial x_3}{\partial \lambda} = f \cdot \beta_\lambda; \quad \frac{\partial \theta_d}{\partial \lambda} = f' \cdot \beta_\lambda,$$

$$\text{wobei } \alpha_\lambda \equiv \alpha'(\lambda) < 0; \quad \beta_\lambda \equiv \beta'(\lambda) > 0.$$

Dies eingesetzt in (A4) ergibt:

$$\frac{\partial V_k}{\partial \lambda} = q [f \cdot v''(y_3) \cdot \theta_u + v'(y_3) \cdot f'] \alpha_\lambda + \\ (1 - q) [f \cdot v''(x_3) \cdot \theta_d + v'(x_3) \cdot f'] \beta_\lambda.$$

Dieser Ausdruck ist positiv, wenn

$$\frac{q}{1 - q} [f \cdot v''(y_3) \cdot \theta_u + v'(y_3) \cdot f'] < \frac{q^*}{1 - q^*} [f \cdot v''(x_3) \cdot \theta_d + v'(x_3) \cdot f'].$$

Man beachte, daß sich bei der Division durch das negative  $\alpha_\lambda$  das „>“ Zeichen umkehrt. Weiterhin wurde genutzt, daß

$$-\frac{\beta_\lambda}{\alpha_\lambda} = \frac{q^*}{1 - q^*}.$$

Unterstellt man  $q = q^*$ , vereinfacht sich der obige Ausdruck noch weiter und es gilt:

$$(A5) \quad \frac{\partial V_k}{\partial \lambda} > 0, \quad \text{wenn } [v''(y_3) \cdot \theta_u - v''(x_3) \cdot \theta_d] f < [v'(x_3) - v'(y_3)] f'.$$

Aufgrund der Konkavität der Nutzenfunktion in Verbindung mit der Überlegung, daß  $\theta_d < 0$ , solange  $\lambda < 1$ , ist (A5) erfüllt.

*Anhang 2: Der Einfluß von  $\lambda$  auf den optimalen  
Faktoreinsatz ( $q = q^*$ )*

Aufgrund dieser Überlegungen ist es nun einfach, den Effekt einer Erhöhung von  $\lambda$  auf den optimalen Faktoreinsatz abzuleiten. Aus der Bedingung 1. Ordnung folgt, daß der optimale Faktoreinsatz eine Funktion von  $\lambda$  ist, also  $k^* = k(\lambda)$ . Dies in die Bedingung 1. Ordnung eingesetzt, führt zu folgender Definitionsgleichung:

$$(A6) \quad \hat{V}_k \equiv V_k [k(\lambda), \lambda] \equiv 0.$$

Da (A6) für alle  $\lambda$  erfüllt ist, ist auch die Ableitung dieser Definitionsgleichung null. D. h.:

$$\frac{\partial \hat{V}_k}{\partial \lambda} = \frac{\partial V_k}{\partial k} k'(\lambda) + \frac{\partial V_k}{\partial \lambda} = 0.$$

Auflösen nach  $k'(\lambda)$  ergibt:

$$k'(\lambda) = - \frac{\partial V_k / \partial \lambda}{\partial V_k / \partial k} > 0.$$

*Anhang 3: Die Wirkung von Hedging auf den Nutzen des Exporteurs  
bei bereits optimiertem Faktoreinsatz*

Diese Wirkung erhält man, indem man die Faktornachfrage  $k(\lambda)$  in die Nutzenfunktion (9) einsetzt. Die hieraus entstehende indirekte Nutzenfunktion  $\hat{V}$  lautet allgemein:

$$(A7) \quad \hat{V}(\lambda) = V [k(\lambda), \lambda].$$

Gemäß (10) beeinflusst  $\lambda$  den indirekten Nutzen des Exporteurs über zwei Kanäle:

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial \lambda} = \frac{\partial V}{\partial k} \cdot k'(\lambda) + \frac{\partial V}{\partial \lambda}.$$

Bei Gewinnmaximierung sorgt der Exporteur dafür, daß  $\partial V / \partial k = 0$  wird. Damit folgt:

$$(A8) \quad \frac{\partial \hat{V}}{\partial \lambda} = \frac{\partial V}{\partial \lambda}.$$

Der Einfluß der Hedge-Möglichkeiten auf die indirekte Nutzenfunktion entspricht also dem Einfluß von  $\lambda$  auf die (direkte) Nutzenfunktion. Aus Gleichung (5) geht hervor, daß der Nutzen des Hedging bei dem  $\lambda$  maximal wird, bei dem die Steigung der Indifferenzkurve der Steigung der Hedge-Möglichkeitenkurve entspricht.

#### Anhang 4: Optimales Hedging und optimale Produktion

Hierzu ist Gleichung (9) nach  $k$  und  $\lambda$  abzuleiten; diese Ableitungen sind gleich null zu setzen:

$$\begin{aligned} q \cdot v'(y_3) \cdot \partial y_3 / \partial k + (1 - q) \cdot v'(x_3) \cdot \partial x_3 / \partial k &= 0, \\ q \cdot v'(y_3) \cdot \partial y_3 / \partial \lambda + (1 - q) \cdot v'(x_3) \cdot \partial x_3 / \partial \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen folgt:

$$\frac{\partial y_3 / \partial k}{\partial x_3 / \partial k} = \frac{\partial y_3 / \partial \lambda}{\partial x_3 / \partial \lambda}.$$

Dies läßt sich weiter umformen zu:

$$\frac{f'(k)\beta - \tau}{f'(k)\alpha - \tau} = \frac{q^*}{1 - q^*}.$$

Diese Optimalitätsbedingung enthält keinen Hinweis auf die Nutzenfunktion oder die Erwartungen des Exporteurs. Durch einige Umformungen kann man zeigen, daß das optimale  $k$  so gewählt werden muß, daß  $f'(k)F = \tau$  erfüllt ist.

#### Literatur

Cox, John; Rubinstein, Mark (1985): „Options Markets“; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. – Ethier, W. (1973): „International Trade and the Forward Exchange Market“; in: American Economic Review S. 494 - 503. – Giddy, Ian, H. (1985): The Foreign Exchange Option as a Hedging Tool in: Lessard, Donald, R. (ed.), International Financial Management; John Wiley & Sons, New York, S. 343 - 354. – Jakobs, Wolfgang; Schröder, Jürgen (1995): Optionen und Terminkontrakte auf Währungen: Bewertung und ökonomische Bedeutung; in: WIST, Nr. 9 (1995). – Sandmo, A. (1971): „On the theory of the Competitive Firm under Price Uncertainty“; American Economic Review S. 65 - 74. – Varian, Hal (1993): Microeconomic Analysis; W. W. Norton and Company, New York.

## Zusammenfassung

### Optimales Hedging (Kurssicherung) im Außenhandel

Die vorliegende Arbeit integriert Währungsoptionen in ein einfaches mikroökonomisches Außenhandelsmodell bei Unsicherheit. Hierbei zeigt sich zunächst, daß Optionen keine zusätzlichen Absicherungsmöglichkeiten gegenüber Terminkontrakten bieten. D. h., ein risikoaverser Exporteur wird generell indifferent zwischen beiden Instrumenten sein. Ob er eine offene Devisenposition voll absichert oder nicht, hängt von seinen Wechselkurserwartungen ab. Liegt der von ihm erwartete Kassakurs über dem Terminkurs, wird er – je nach Grad der Risikoaversion – einen mehr oder weniger großen Teil seiner Position offenhalten. Das für ihn optimale „Risikoprofil“ kann er sowohl mit Optionen als auch mit Terminkontrakten erreichen. Im gleichen Modell wird anschließend die ökonomische Intuition hinter dem Separationstheorem rekapituliert, gemäß dem Produktionsentscheidungen in der Exportindustrie unabhängig vom Wechselkursrisiko sowie den Erwartungen und der Risikoaversion der Exporteure getroffen werden. Es wird gezeigt, daß die Existenz von Optionen die Gültigkeit dieses Theorems nicht berührt.

## Summary

### Optimal Hedging in Foreign Trade

This paper integrates currency options in a simple microeconomic model on foreign trade in an environment of uncertainty. Initially, it appears that options do not offer hedging possibilities additional to those of futures contracts. This means that a risk-averse exporter will generally be indifferent to both instruments. The question whether an open currency commitment is fully hedged or not ultimately depends on his exchange-rate expectations. If the spot rate is over and above the exchange-rate he expects, he will – depending on the degree of his risk-averseness – keep a more or less large part of his commitment open. Both options and futures contracts permit him to reach the “risk profile” he considers to be optimal for his purposes. The same model is subsequently used for recapitulating economic intuition underlying the separation theorem according to which the export industry reaches production decisions independent of the exchange-rate risk as well as of exporters’ expectations and risk averseness. It is shown that the existence of options does not affect the validity of this theorem.

## Résumé

### Garantie de change optimale (hedging) en commerce extérieur

Ce travail intègre les options monétaires dans un modèle microéconomique simple de commerce extérieur en cas d'instabilité. On y montre tout d'abord que les options n'offrent aucune garantie supplémentaire par rapport aux contrats à terme. En d'autres termes, un exportateur avec une aversion pour le risque n'aura



en général pas de préférence pour l'un ou l'autre instrument. Ses attentes par rapport à l'évolution des taux de change détermineront s'il garantit complètement ou non une position ouverte en devises. Si le cours au comptant qu'il attend est supérieur au cours à terme, il gardera ouverte une partie plus ou moins grande de sa position, selon le degré de son aversion pour le risque. Il peut atteindre son »profil de risque« optimal autant avec des options qu'avec des contrats à terme. Dans le même modèle, on récapitule ensuite l'intuition économique avec le théorème de la séparation, selon lequel les décisions de production dans l'industrie exportatrice sont prises indépendamment du risque de change ainsi que des attentes et de l'aversion pour le risque des exportateurs. Comme il est montré dans ce travail, l'existence d'options n'invalide pas ce théorème.