

# Zur Optionsscheinbewertung mit Rücksicht auf die Kapitalverwässerung bei der Ausübung

Von Hermann Naust, Saarbrücken

## I.

Optionsscheine auf Aktien gibt es in der Bundesrepublik schon seit vielen Jahren. In ihrer traditionellen Form handelt es sich um langlaufende Optionsrechte, die von Unternehmen mit genehmigtem Kapital emittiert werden und den Inhaber berechtigen, zu einem festgelegten Ausübungspreis neu zu verausgabende Aktien des emittierenden Unternehmens zu erwerben<sup>1</sup>. Dieser traditionelle Typ der Optionsscheine sei direkt emittierter Optionsschein genannt.

Seit einigen Jahren ist ein anderer Typ von Optionsscheinen von Finanzinstituten an den Markt gebracht worden, der die Bezeichnung Covered Warrant trägt. Hier hält der Emittent der Optionsrechte, der als Stillhalter anzusehen ist, das optierbare Objekt, um es auf Verlangen des Optionsinhabers zu liefern. Bei Aktienwarrants geht es also nicht um erst noch im Wege der Kapitalerhöhung zu schaffende zusätzliche Aktien, sondern um bereits früher emittierte, – und das Emissionshaus der Covered Warrants ist in aller Regel nicht identisch mit der Gesellschaft, um deren Aktien es sich handelt.

## II.

Als die Emission von Covered Warrants auf Aktien im Jahre 1989 ihren vorläufigen Höhepunkt erreichte, war verbreitet das Urteil zu vernehmen, diese Neuemissionen seien deutlich überteuert. In der Tat erwiesen sich bei Verwendung der gleichen Optionsbewertungsmodelle die Covered Warrants eher als überbewertet, während die traditionellen Optionsscheine zumeist unterbewertet erschienen<sup>2</sup>. Ein gewisser Teil der

---

<sup>1</sup> Zumeist handelt es sich bei den neu verausgabten Aktien um junge, also nicht voll dividendenberechtigte Aktien.

<sup>2</sup> Daß sich die Verhältnisse mittlerweile weitgehend umgekehrt haben, wird von Marktkennern überwiegend auf ein gestiegenes Emittentenrisiko (zumindest in der Einschätzung durch die Anleger) zurückgeführt.

Diskrepanz ist gewiß dem Umstand zuzuschreiben, daß man sich mit direkt emittierten Optionsscheinen fast immer nur junge Aktien verschaffen kann. Es stellt sich jedoch die Frage, ob nicht ein gewisser Teil der Bewertungsdiskrepanz darauf zurückzuführen ist, daß bei Ausübung von direkt emittierten Optionsscheinen eine Kapitalerhöhung stattfindet. Bei dieser Kapitalerhöhung zum Ausübungspreis kommt es zu einer Kapitalverwässerung; infolgedessen fällt der Aktienkurs, wenn und soweit sich das Optieren lohnt, geringer aus, als wenn keine Optionsmöglichkeit direkt emittiert worden wäre.

### III.

*Cox* und *Rubinstein* haben sich dem Problem gewidmet<sup>3</sup>. Sie werfen zwei Fragen auf. Erstens, wie unterscheidet sich der Wert eines direkt emittierten Optionsscheins vom Wert einer Option auf Aktien des gleichen Unternehmens beziehungsweise eines Covered Warrants bei ansonsten gleichen Parametern (Laufzeit, Ausübungskurs)? Zweitens, wie unterscheidet sich der Wert eines direkt emittierten Optionsscheins vom Wert eines gleichartigen Covered Warrants, der zum Bezug von Aktien eines gleichartigen Unternehmens berechtigt bzw. auf das gleiche Unternehmen, unterstellt, es habe keine Optionsscheine emittiert?

Die Antworten lauten: Erstens, Covered Warrants sollten den gleichen Kurs haben wie direkt emittierte Optionsscheine. Zweitens, Covered Warrants und direkt emittierte Optionsscheine müssen einen geringeren Wert aufweisen als Covered Warrants auf ein vergleichbares Unternehmen, das keine Optionsscheine direkt emittiert hat. Die formale Darstellung bei *Cox* und *Rubinstein* hat aber Anlaß zur Verwirrung gegeben, wie noch darzustellen ist, und zu einer fehlerhaften Rezeption zumindest in einem Teil der empirischen Forschung geführt.

### IV.

Der Wert  $c_{CW,T}$  einer (europäischen) Kaufoption zum Verfallszeitpunkt  $T$  beträgt

$$c_{CW,T} = \max[S_T - K, 0].$$

---

<sup>3</sup> Vgl. *John C. Cox* und *Mark Rubinstein*: *Option Markets*, Englewood Cliffs, N. J. 1985, hier S. 392 - 399. Siehe aber auch schon *Fischer Black*, und *Myron Scholes*: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, *Journal of Political Economy*, Vol. 81 (1973), S. 637 - 654, hier S. 648f. sowie *Dan Galai* und *Meir I. Schneller*: *Pricing of Warrants and the Value of the Firm*, *The Journal of Finance*, Vol. XXXIII (1978), S. 1333 - 1342.

Hierbei ist  $S_T$  der Aktienkurs zum Zeitpunkt  $T$ , und  $K$  ist der Ausübungspreis. So verhält es sich bei einem normalen Call und bei einem Covered Warrant. Die Ausübung führt weder zu einem Mittelzufluß bei der Gesellschaft, um deren Aktien es sich handelt, noch werden neue Aktien begeben. Der Aktienkurs  $S_T$  kann deshalb von der Existenz der Optionsrechte ganz unberührt bleiben.

Dies ist anders bei direkt emittierten Optionsrechten. Wenn  $n$  alte Aktien existieren, denen ein Vermögen  $V$  gegenübersteht, und  $m$  Optionscheine geschaffen werden, die je gegen Zahlung des Betrages  $K$  zum Bezug einer neuen Aktie berechtigen, so sieht die Situation zum Zeitpunkt  $T$  wie folgt aus. Ist der Aktienkurs  $S_T > K$ , wird optiert, und das neue Gesamtkapital von  $V_T + m \cdot K$  ist auf  $(n + m)$  Aktien zu verteilen. Ist der Aktienkurs  $S_T < K$ , unterbleibt das Optieren, und der Aktienkurs mindert sich nicht.

Wird optiert, so beträgt der neue Aktienkurs, der die Verwässerung reflektiert:

$$\tilde{S}_T = \frac{V_T + m \cdot K}{n + m}$$

Optiert wird also, wenn

$$\frac{V_T + m \cdot K}{n + m} > K$$

beziehungsweise wenn

$$\frac{V_T}{n} > K.$$

Dies ist unmittelbar einsichtig; man sollte optieren, wenn der Wert des Unternehmens je Altaktie höher ist als der Betrag  $K$ , den man für die Beteiligung an dem Unternehmen mit einer weiteren Aktie aufwenden müßte. Nennen wir den Wert je Altaktie vor Optieren den eigentlichen Kurs  $S^*$ , so gilt:

$$S_T^* > K \rightarrow \text{nutze das Bezugsrecht!}$$

$$S_T^* < K \rightarrow \text{lasse das Bezugsrecht verfallen!}$$

Der Wert eines direkt emittierten Optionsscheines läßt sich somit bezeichnen mit

$$c_T = \max \left[ \frac{V_T + m \cdot K}{n + m} - K, 0 \right] = \max \left[ \frac{V_T - n \cdot K}{n + m}, 0 \right]$$

beziehungsweise

$$c_T = \max \left[ \frac{V_T/n - K}{1 + \lambda}, 0 \right],$$

wobei  $\lambda$  das Verwässerungsverhältnis ( $= m/n$ ) ist.

$$c_T = \frac{1}{1 + \lambda} \cdot \max [V_T/n - K, 0]$$

beziehungsweise

$$= \frac{1}{1 + \lambda} \cdot \max [S_T^* - K, 0]$$

Der direkt emittierte Optionsschein entspricht einem Covered Warrant auf den eigentlichen Kurs  $S^*$ , multipliziert mit dem Verwässerungsfaktor  $1/(1 + \lambda)$ . Diesen Faktor ermitteln auch *Cox* und *Rubinstein*, und er wird von *Ferri*, *Kremer* und *Oberhelman* für ihre empirische Studie übernommen<sup>4</sup>.

$$c = \frac{1}{1 + \lambda} \cdot c_{CW}(S^*)$$

Diese Interpretation kann man sich noch einmal anders verdeutlichen. In Anlehnung an *Cox* und *Rubinstein* läßt sich folgende Endwertmatrix bilden, die den Wert einer Aktie und eines Optionsscheins zum Verfallszeitpunkt  $T$  wiedergibt.

Wenn:	$S_T^* \leq K$ (bzw. $V_T/n \leq K$ )	$S_T^* > K$ (bzw. $V_T/n > K$ )
Dann:		
Wert einer Altaktie	$S_T^* (= V_T/n)$	$\tilde{S}_T \left( = \frac{V_T/n + \lambda \cdot K}{1 + \lambda} \right)$ $= \frac{1}{1 + \lambda} \cdot (S_T^* + \lambda \cdot K)$
Wert eines Optionsscheins	0	$\tilde{S}_T - K \left( = \frac{V_T/n - K}{1 + \lambda} \right)$ $= \frac{1}{1 + \lambda} \cdot (S_T^* - K)$

<sup>4</sup> Vgl. *Michael G. Ferri, Joseph W. Kremer und H. Dennis Oberhelman: An Analysis of the Pricing of Corporate Warrants, Advances in Futures and Options Research, Vol. 1, Part A, (Hrsg.: F. J. Fabozzi), Greenwich, Ct., London 1986, S. 201 - 226.* Die Autoren verweisen außer auf *Cox* und *Rubinstein* auch auf *Galai* und *Schneller*.

Die Altaktionäre befinden sich gleichsam in einer Stillhalterposition gegenüber den Optionsscheininhabern. Kollektiv halten die Optionsscheininhaber den Wert

$$m \cdot \frac{1}{1 + \lambda} \cdot (S_T^* - K) \quad \text{für } S_T^* > K.$$

Die Position der Altaktionäre läßt sich beschreiben als unbedingter Titel auf den Wert  $S^*$  (mit dem Endwert  $S_T^*$ ) und einer Stillhalterposition mit dem Endwert  $\tilde{S}_T - S_T^*$  für  $S_T^* > K$ . Diese Stillhalterposition hat, anknüpfend an die Endwertmatrix, für  $S_T^* > K$  den Endwert:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_T - S_T^* &= \frac{1}{1 + \lambda} \cdot S_T^* + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot K - \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda} \cdot S_T^* \\ &= \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot (K - S_T^*) = - \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot (S_T^* - K) \end{aligned}$$

Kollektiv ist dies die Position

$$n \cdot \left[ - \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot (S_T^* - K) \right] = - \frac{m}{1 + \lambda} \cdot (S_T^* - K).$$

Dies ist gerade der Gegenposten zu dem Kollektivwert der Optionsscheine.

## V.

Der eigentliche Kurs  $S^*$  ist nicht bekannt. Bekannt ist nur der tatsächliche heutige Kurs  $S$ , der schon die Verwässerung, gewogen mit ihrer Eintrittswahrscheinlichkeit, reflektiert. Im folgenden wird eine Näherungslösung für die Bestimmung des Werts eines direkt emittierten Optionsscheins hergeleitet, bei der die konventionellen Bewertungsverfahren benutzt werden können, die nur für Covered Warrants gültig sind (genauer: nur für Aktiengesellschaften ohne direkt emittierte Scheine).

Wir knüpfen dazu an der Formel für  $c_T$  an.

$$c_T = \frac{1}{1 + \lambda} \cdot \max [S_T^* - K, 0]$$

Der Verwässerungsfaktor ist definiert als

$$\frac{1}{1 + \lambda} = \frac{n}{n + m}$$

Somit gilt:

$$c_T = \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW, T}(S^*, K)$$

Für den Barwert gilt:

$$c = \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW}(S^*, T, K)$$

Es gilt, die unbekannte Größe  $S^*$  in diesem Ausdruck zu substituieren. Der Wert eines Covered Warrant ( $c_{CW}$ ) läßt sich mit den herkömmlichen Optionspreismodellen ermitteln.

Der heutige Aktienkurs muß die Möglichkeit der Kapitalverwässerung schon reflektieren. Der Gesamtwert  $V_o$  des Unternehmens teilt sich auf Aktionäre und Optionsscheininhaber auf.

$$V_o = n \cdot S + m \cdot c$$

$$\frac{V_o}{n} = S + \frac{m}{n} \cdot c$$

Wegen

$$\frac{V_o}{n} = S^*$$

gilt

$$S^* - S = \frac{m}{n} \cdot c.$$

Die Optionspreisformel kann daher wie folgt umformuliert werden:

$$\begin{aligned} c &= \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW}(S^*) \\ &= \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW}(S + (S^* - S)) \\ &= \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW}\left(S + \frac{m}{n} \cdot c\right) \end{aligned}$$

Für kleine Verwässerungsverhältnisse ( $m \ll n$ ) und hohe Ausübungspreise (kleine Werte für  $c$ ) kann der Wert für den direkt emittierten Optionsschein mit Hilfe der Angabe für das Delta ( $\delta$ ) des Covered Warrant approximiert werden<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> Eine bessere Approximation ergibt sich, wenn auch die zweite Ableitung von  $c$  nach  $S$  verwendet wird, das sogenannte Gamma ( $\gamma$ ). Es folgt  $c^\wedge \approx \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW}(S) + \frac{n}{n+m} \cdot (\delta + \gamma/2) \cdot \frac{m}{n} \cdot c$  und  $c^\wedge \approx \frac{n}{n+m \cdot (1 - \delta - \gamma/2)} \cdot c_{CW}(S)$ . Der Gamma-wert wird von den wichtigsten einschlägigen Computerprogrammen bereitgestellt.

$$c \approx \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW}(S) + \frac{n}{n+m} \cdot \delta \cdot \frac{m}{n} \cdot c$$

$$c - \frac{m \cdot \delta}{n+m} \cdot c \approx \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW}(S)$$

$$c \approx \frac{n}{n+m \cdot (1-\delta)} \cdot c_{CW}(S) = c^{\wedge}$$

Mit Hilfe dieser Näherungsformel kann der Wert für direkt emittierte Optionsscheine unter Benutzung der konventionellen Optionsbewertungsformeln errechnet werden.

## VI.

Die Formel weicht ab sowohl von der herkömmlichen Formel, etwa der *Black/Scholes*-Gleichung, wie auch von der um den Faktor  $\frac{1}{1+\lambda}$  korrigierten Formel. Das Verwenden dieses Korrekturfaktors, wie beispielsweise in der Untersuchung von *Ferri*, *Kremer* und *Oberhelman*, beruht vermutlich auf einem Mißverständnis<sup>6</sup>. *Cox* und *Rubinstein* leiten zwar eine Formel ab, die lautet<sup>7</sup>:

$$W = \left( \frac{1}{1+\lambda} \right) C,$$

was, in die hier verwendete Nomenklatur übertragen, lautet:

$$c = \frac{1}{1+\lambda} \cdot c_{CW}.$$

Das Problem liegt darin, daß nicht spezifiziert ist, auf welchen Kurs sich der Term  $c_{CW}$  bezieht. Verständlicherweise wird häufig angenommen, es müsse sich um den beobachteten Aktienkurs  $S$  handeln. Wie wir aber sahen, müßte als Argument der „eigentliche Kurs“  $S^*$  eingesetzt werden.

So sind auch die extremen Befunde in der genannten Untersuchung, wonach bei direkt emittierten Scheinen mit einer Restlaufzeit unter einem Jahr die mit dem Faktor  $\frac{1}{1+\lambda}$  multiplizierten *Black/Scholes*-Werte um mehr als 50 vH unter den Marktpreisen für diese Scheine lagen, zu einem Teil nicht verwunderlich<sup>8</sup>. Daß die Wertbestimmung für

<sup>6</sup> M. G. *Ferri* u. a., a. a. O., S. 205.

<sup>7</sup> J. C. *Cox* und M. *Rubinstein*, a. a. O., S. 396.

längerlaufende Titel im Durchschnitt relativ gut ausfällt, mag darauf zurückzuführen sein, daß sich hier Fehler kompensieren: Einer zu starken Berücksichtigung der Verwässerung steht eine Überschätzung des  $c_{CW}$ -Wertes gegenüber, weil mit Marktzinsen vor Steuern gerechnet wurde, was für langlaufende Optionen vermutlich falsch ist<sup>9</sup>. Andere Faktoren mögen hinzutreten, so das Restrisiko, weil ein permanenter, perfekter Delta-Hedge von Aktienpositionen und Optionspositionen faktisch nicht möglich ist. Das insoweit unvermeidliche Risiko von Optionspositionen dürfte unter diesen Umständen eine stärkere „Diskontierung“ erfordern als im Modell mit vollkommenem Hedging<sup>10</sup>.

## VII.

Umgekehrt findet man unter Anlegern, aber auch Praktikern des Anlagegeschäfts häufig die Auffassung, eine Berücksichtigung eines Verwässerungseffekts sei nicht angezeigt. Denn direkt emittierte Optionsscheine würden regelmäßig im Verbund mit Anleihen begeben (Optionsanleihen), und diese würden regelmäßig einen sehr niedrigen Zinskupon aufweisen oder deutlich über pari begeben. So sei sichergestellt, daß der Aktionär keinerlei Verwässerung erfahre. Und dem entsprechend ergebe sich auch kein Bezugsrechtsabschlag, wie das sonst bei Kapitalverwässerungen typisch sei.

Diese Überlegung greift zu kurz. Die niedrige Verzinslichkeit beziehungsweise das Begeben der Optionsanleihe über pari sichert zwar die Kontinuität des alten Aktienkurses  $S$  vor Begebung der Optionsscheine mit dem Aktienkurs nach deren Begebung. Aber das schließt nicht aus, daß der „eigentliche Kurs“  $S^*$  höher ist als jene. Vielmehr gilt  $S^* > S$  – entsprechend dem Agio der Optionsanleihe beziehungsweise dem Barwert der ersparten Zinsen aufgrund des niedrigen Kupons der Anleihe.

---

<sup>8</sup> Vgl. *M. G. Ferri* u.a., a.a.O., Tabelle 4, S. 215. Einen gewissen Beitrag dieser vermeintlichen „Fehlbewertung“ dürften bei kurzlaufenden Optionstiteln die Kosten der Ausübung liefern.

<sup>9</sup> Vgl. dazu *Hermann Naust*: Bewertung langlaufender Aktienoptionen und Ertragsteuern, Manuskript, Saarbrücken 1993. Auch für die USA kann davon ausgegangen werden, daß in dem Untersuchungszeitraum die sicherheitsäquivalente Wertsteigerung geringer ausfällt als der sichere Marktzins, weil capital gains steuerlich weniger stark belastet werden als Zinseinnahmen.

<sup>10</sup> Nur bei perfekten Möglichkeiten, zu diversifizieren und zu hedgen, ist anzunehmen, daß die Risikoprämie von Aktien eine lineare Funktion ihrer Korrelation (Kovarianz) mit dem Marktportefeuille (eine lineare Funktion von  $\beta$ ) ist und die Risikoprämie von Optionsscheinen das  $\Omega$ -fache der Risikoprämie der Aktie beträgt ( $\Omega$ : Hebel beziehungsweise Elastizität der Option).



## VIII.

Zur Verdeutlichung der hier vorgestellten Näherungsformel sei für ein Bezugsverhältnis  $\neq 1$  die Formel für direkt emittierte Warrants noch einmal hergeleitet.

$$(1) \quad V^* = n \cdot S^* = n \cdot S + m \cdot c(S)$$

$V^*$  = Gesamtvermögen, das auf Aktionäre und Optionsscheininhaber entfällt

$S^*$  = eigentlicher Kurs

$S$  = aktueller Aktienkurs

$c$  = Wert eines direkt emittierten Optionsschein

$n$  = Anzahl der Altaktien

$m$  = Anzahl der ausstehenden Optionsscheine

$$(2) \quad c(S, K) = c_{CW} \left( \frac{n \cdot S^* + m \cdot v \cdot K}{n + m \cdot v}, K \right)$$

$v$  = Bezugsverhältnis der Optionsscheine, d.h. Anzahl der neuen Aktien, die pro Optionsschein bezogen werden dürfen

Für  $S^* > K$  beträgt die Differenz des verwässerten Kurses zum Ausübungspreis

$$\frac{n \cdot S^* + m \cdot v \cdot K}{n + m \cdot v} - K = \frac{n \cdot S^* - n \cdot K}{n + m \cdot v} = \frac{n}{n + m \cdot v} \cdot (S^* - K)$$

Daher kann Gleichung (2) auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$c(S, K) = \frac{n}{n + m \cdot v} \cdot c_{CW}(S^*, K)$$

oder kurz

$$(3) \quad c(S) = \frac{n}{n + m \cdot v} \cdot c_{CW}(S^*)$$

Aus (1) folgt

$$S^* = S + \frac{m}{n} \cdot c(S)$$

und

$$(4) \quad S^* - S = \frac{m}{n} \cdot c(S)$$

Gleichung (3) lautet erweitert:

$$c(S) = \frac{n}{n + m \cdot v} \cdot c_{CW}(S + (S^* - S))$$

Den Wert aus Gleichung (4) eingesetzt, ergibt dies:

$$c(S) = \frac{n}{n + m \cdot v} \cdot c_{CW} \left( S + \frac{m}{n} \cdot c(S) \right)$$

Für einen mäßigen Wert von  $\frac{m}{n}$  und  $c(S)$  gilt die Näherung

$$(5) \quad c(S) \approx \frac{n}{n+m \cdot v} \cdot c_{CW}(S) + \frac{n}{n+m \cdot v} \cdot \delta \cdot \frac{m}{n} \cdot c(S)$$

$$c(S) \cdot \left(1 - \frac{m \cdot \delta}{n + m \cdot v}\right) \approx \frac{n}{n + m \cdot v} \cdot c_{CW}(S)$$

$$(6) \quad c(S) \approx \frac{n}{n + m \cdot (v - \delta)} \cdot c_{CW}(S)$$

## IX.

Die Leistungsfähigkeit der Näherungsformel sei im folgenden anhand einiger Musterrechnungen im Vergleich zu den Werten demonstriert, die sich nach der *Black/Scholes*-Formel und der mit dem Korrekturfaktor  $1/(1 + \lambda)$  multiplizierten *Black/Scholes*-Formel ergeben (Tabelle). Unterstellt wurde in jedem Fall ein „eigentlicher Kurs“  $S^*$  von 100, ein Zinssatz von 7,5% und dividendenlose Aktien (letzteres, um die *Black/Scholes*-Formel anwendbar zu halten). Es wird angenommen, daß sich empirisch ein Aktienkurs  $S$  einstellt, wie er sich aufgrund der genannten Annahmen implizit ergibt. Der dazu passende richtige Wert des direkt emittierten Optionsscheins ist unter der Bezeichnung  $c$  ausgewiesen. Es folgen in der Tabelle der *Black/Scholes*-Wert und der relative Fehler  $R_1$ , den dieser *Black/Scholes*-Wert gegenüber dem richtigen Wert aufweist, sowie der um den Faktor  $1/(1 + \lambda)$  korrigierte *Black/Scholes*-Wert und der zugehörige relative Fehler  $R_2$ . Nachrichtlich wird der  $\delta$ -Wert aus der *Black/Scholes*-Formel mitgeteilt, mit dessen Hilfe der hier vorgeschlagene Näherungswert  $c^\wedge$  ermittelt wird. Die relative Abweichung dieses Näherungswerts von dem richtigen Wert beschließt als  $R_3$  die Tabelle. Es zeigt sich in der Tabelle auf Seite 280:

- Die unmodifizierte *Black/Scholes*-Formel (siehe  $R_1$ ) ist ziemlich gut für im Geld befindliche Optionsscheine ( $K < 100$ ), passabel für am Geld befindliche Optionsscheine ( $K = 100$ ), schlecht für aus dem Geld befindliche Optionsscheine ( $K > 100$ ). Der relative Fehler nimmt mit zunehmender Laufzeit ab. Die ermittelten Werte liegen alle zu hoch.
- Die korrigierte *Black/Scholes*-Formel (siehe  $R_2$ ) ergibt immer ziemlich schlechte Ergebnisse, namentlich bei hohen Verwässerungsfaktoren  $\lambda$ . Der relative Fehler ist weitgehend unabhängig von der Laufzeit. Die ermittelten Werte liegen alle zu niedrig.
- Der relative Fehler der Näherungsformel (siehe  $R_3$ ) ist immer sehr gering. Er beträgt maximal 0,23 Prozent (Optionsschein am Geld, niedrige Volatilität, hoher Verwässerungsfaktor).

## X.

Eine alternative Form, sich dem korrekten Wert für  $c$  zu nähern, bestünde darin, eine Näherung von  $S^*$  dadurch zu ermitteln, daß der beobachtete Preis  $c_{emp}$  des Optionsscheins in die Berechnung aufgenommen wird.

$$c^{\wedge} = \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW} \left( S + \frac{m}{n} \cdot c_{emp} \right)$$

Obwohl dadurch der zu ermittelnde Bewertungsfehler (die Differenz von  $c$  und  $c_{emp}$ ) in die Berechnung eingeht, ist das Rechenergebnis praktisch immer besser als für die *Black/Scholes*-Formel, werde diese unmodifiziert –  $c_{CW}(S)$  – oder modifiziert –  $c_{CW}(S)/(1+\lambda)$  – verwendet. Es reicht aber nicht an die Qualität der vorgeschlagenen Näherung heran, es sei denn, der Optionspreis wäre zufällig sehr nahe beim korrekten Wert  $c$ ; in diesem Fall ergäbe sich freilich ohnehin keine Arbitragemöglichkeit.

## XI.

Für eine noch genauere Annäherung müßte auch berücksichtigt werden, daß die historische Volatilität der tatsächlichen Kurse  $S$  einen Bias hat. Die benötigte Volatilität der eigentlichen Kurse  $S^*$  könnte etwas höher liegen.

$$S_i^* = S_i + \frac{m}{n} \cdot c(S_i)$$

Für die Kursänderungsfaktoren der eigentlichen Aktienkurse  $S^*$  gilt:

$$q_i^* = \frac{q_i \cdot S_{i-1} + \frac{m}{n} \cdot c(S_{i-1} \cdot q_i)}{S_{i-1} + \frac{m}{n} \cdot c(S_{i-1})}$$

$q_i = S_i/S_{i-1}$ , der Kursänderungsfaktor der beobachtbaren Aktienkurse

Für relativ kleine Kursänderungsfaktoren gilt:

$$q_i^* \approx q_i \cdot \frac{S_{i-1} + \frac{m \cdot \Omega_i}{n} \cdot c(S_{i-1})}{S_{i-1} + \frac{m}{n} \cdot c(S_{i-1})} = q_i \cdot \alpha_i > q_i$$

Mit  $\Omega$  wird der sogenannte Hebel der Option bezeichnet, die Relation von relativer Wertänderung einer Option zur relativen Wertänderung des Optionsobjekts. Eine Aktienkurssteigerung um den Faktor  $q_i$  übersetzt sich also in eine Optionswertsteigerung um den Faktor  $\Omega_i \cdot q_i$ . Der Hebel ist stets größer als eins ( $\Omega > 1$ ).

Für die Volatilität der beobachtbaren Kurse gilt<sup>11</sup>:

$$c = \sqrt{\sum (\ln q_i - \overline{\ln q})^2 / (N - 1)}$$

$\overline{\ln q}$  = Mittelwert der natürlichen Logarithmen der Kursänderungsfaktoren

$N$  = Anzahl der beobachteten Kursänderungen

Für die benötigte Volatilität  $\sigma^*$  gilt:

$$\begin{aligned} \sigma^* &\approx \sqrt{\sum (\ln(\alpha_i \cdot q_i) - \overline{\ln(\alpha \cdot q)})^2 / (N - 1)} \\ &\approx \sqrt{\sum (\ln \alpha_i + \ln q_i - \overline{\ln \alpha} - \overline{\ln q})^2 / (N - 1)} \end{aligned}$$

Bei gegebenem Kursniveau liegt  $\Omega$  fest und somit auch  $\alpha_i$  ( $\alpha_i = \alpha$ ).

Hieraus folgt:

$$\ln \alpha_i = \overline{\ln \alpha}$$

und

<sup>11</sup> Vgl. dazu etwa *John Hull: Options, and Other Derivative Securities*, Englewood Cliffs, N. J. 1989, S. 88 oder *Terry J. Watsham: Options and Futures in International Portfolio Management*, London 1992, S. 95. Für eine exaktere Formel vgl. *J. C. Cox und M. Rubinstein, a. a. O., S. 256, Fußnote 2.*

### Fehlervergleich für alternative Berechnungsformeln

Parameter						
<i>K</i>	<i>T</i>	$\sigma^*$	$\lambda$	<i>S</i>	<i>c</i>	$c_{CW}(S)$
Ausübungs-kurs	Laufzeit	Volatilität	Verwässerungsverhältnis	Aktienkurs	korrekter Optionspreis	<i>Black/Scholes</i> -Wert von <i>S</i>
100	2	0,14	0,05	99,2405	15,1900	15,3488
100	2	0,14	0,15	97,9196	13,8691	14,3245
100	2	0,30	0,05	98,8915	22,1701	22,4967
100	2	0,30	0,15	96,9637	20,2423	21,1614
100	4	0,14	0,05	98,7142	25,7167	25,8775
100	4	0,14	0,15	96,4779	23,4804	23,9515
100	4	0,30	0,05	98,3123	33,7546	34,1280
100	4	0,30	0,15	95,3771	30,8194	31,8771
125	2	0,14	0,05	99,7737	4,5266	4,6668
125	2	0,14	0,15	99,3801	4,1330	4,5194
125	2	0,30	0,05	99,3483	13,0349	13,3558
125	2	0,30	0,15	98,2148	11,9014	12,7901
125	4	0,14	0,05	99,3202	13,5951	13,8384
125	4	0,14	0,15	98,1381	12,4130	13,0943
125	4	0,30	0,05	98,7542	24,9162	25,3456
125	4	0,30	0,15	96,5876	22,7496	23,9489
80	2	0,14	0,05	98,5253	29,4941	29,5347
80	2	0,14	0,15	95,9606	26,9294	27,0593
80	2	0,30	0,05	98,3581	32,8379	33,0754
80	2	0,30	0,15	95,5026	29,9824	30,6694
80	4	0,14	0,05	98,0771	38,4576	38,5085
80	4	0,14	0,15	94,7330	35,1135	35,2749
80	4	0,30	0,05	97,8557	42,8862	43,1606
80	4	0,30	0,15	94,1265	39,1570	39,9492

<sup>1</sup> Annahmen: „eigentlicher Kurs“  $S^*$ : 100      Formeln:  $R_1 = \frac{c_{CW}(S)}{c} - 1$   
 Zinssatz  $i$ :                      7,5 %                       $R_2 = \frac{c_{CW}(S)/(1+\lambda)}{c} - 1$   
 Dividende:                      0 %                       $R_3 = \frac{c^\wedge}{c} - 1$

**für den Wert direkt emittierter Optionsscheine<sup>1</sup>**

Ergebnisse					
$R_1$	$c_{CW}(S) / (1 + \lambda)$	$R_2$	$\delta(S)$	$c^\wedge$	$R_3$
relativer Fehler des Black/Scholes-Werts (in vH)	Black/Scholes-Wert von $S$ , dividiert durch Verwässerungsfaktor	relativer Fehler (in vH)	Delta von $c_{CW}(S)$	vorgeschlagener Näherungswert	relativer Fehler des vorgeschlagenen Näherungswerts (in vH)
1,05	14,6179	- 3,77	0,7855	15,1859	- 0,03
3,28	12,4561	- 10,19	0,7652	13,8372	- 0,23
1,47	21,4254	- 3,36	0,7008	22,1651	- 0,02
4,54	18,4012	- 9,10	0,6844	20,2049	- 0,18
0,63	24,6452	- 4,17	0,8701	25,7105	- 0,02
2,01	20,8274	- 11,30	0,8520	23,4313	- 0,21
1,11	32,5029	- 3,71	0,7745	33,7475	- 0,02
3,43	27,7192	- 10,06	0,7591	30,7654	- 0,18
3,10	4,4446	- 1,81	0,3784	4,5261	- 0,01
9,35	3,9299	- 4,91	0,3709	4,1297	- 0,08
2,46	12,7198	- 2,42	0,5045	13,0329	- 0,01
7,47	11,1218	- 6,55	0,4937	11,8873	- 0,12
1,79	13,1794	- 3,06	0,6375	13,5920	- 0,02
5,49	11,3863	- 8,27	0,6214	12,3906	- 0,18
1,72	24,1387	- 3,12	0,6515	24,9115	- 0,02
5,27	20,8251	- 8,46	0,6377	22,7145	- 0,15
0,14	28,1283	- 4,63	0,9701	29,4906	- 0,01
0,48	23,5298	- 12,62	0,9598	26,8971	- 0,12
0,72	31,5004	- 4,07	0,8508	32,8305	- 0,02
2,29	26,6690	- 11,05	0,8341	29,9247	- 0,19
0,13	36,6748	- 4,64	0,9713	38,4533	- 0,01
0,46	30,6738	- 12,64	0,9622	35,0760	- 0,11
0,64	41,1053	- 4,15	0,8682	42,8780	- 0,02
2,02	34,7384	- 11,28	0,8539	39,0925	- 0,16

$$\sigma^* \approx \sqrt{\sum (\ln q_i - \overline{\ln q})^2 / (N - 1)}$$

$$\approx \sigma$$

Die Volatilität  $\sigma^*$  entspricht für mäßige Volatilitäten und weit im Geld stehende Optionsscheine ungefähr der Volatilität der beobachtbaren Aktienkurse  $S^{12}$ .

Für andere Fälle ist jedoch einzuräumen, daß  $\sigma^*$  eine geringfügig höhere Volatilität repräsentieren muß als  $\sigma$ . Denn im Verhältnis zu den Altaktionären sind die Optionsscheininhaber in einer Position wie der Inhaber eines Beteiligungstitels im Verhältnis zu den Fremdkapitalgläubigern des Unternehmens. Wie ein Beteiligter nur dann etwas vom Liquidationserlös (oder going-concern-Wert) eines Unternehmens erwarten darf, wenn diese Beiträge die Ansprüche der Gläubiger zum Zeitpunkt der Fälligkeit des Fremdkapitals übertreffen, so hat auch der Optionsscheininhaber nur etwas von seiner Position, wenn  $S^*$  zum Zeitpunkt  $T$  den Betrag  $K$  übersteigt. Ist das Risiko der Position des Optionsscheininhabers höher als die des Altaktionärs, so ist auch die kumulierte Position  $S^*$  riskanter als die Position  $S$ ; denn die Zusammenfügung von Aktienposition und Optionsscheinposition bietet keinerlei Risikokompensation.

## XII.

Ein Covered Warrant auf Aktien einer Gesellschaft, die direkt emittierte Optionsscheine ausstehen hat, ist ebenfalls nach dieser Formel zu bewerten (vorausgesetzt Laufzeit und Ausübungspreis sind identisch). Aber schon wenn nur der Ausübungspreis abweicht, ist die Näherungsformel nicht mehr unmodifiziert anwendbar.

Ist der Ausübungspreis  $K_{CW}$  für den Covered Warrant höher als der Ausübungspreis  $K$  für den direkt emittierten Schein – eine solche Situation ist typisch, weil die Aktiengesellschaften an einer hohen Ausübungswahrscheinlichkeit interessiert sind, um die neuen Finanzmittel zu erlangen, und folglich an einem niedrigen Ausübungskurs –, so werden der durchschnittliche Wert der Ausübung und die Ausübungswahrscheinlichkeit des Covered Warrant von der Kapitalverwässerung tangiert.

---

<sup>12</sup> Unter diesen Bedingungen stehen auch die Annahmen, daß sowohl die Kurse  $S$  als auch die Kurse  $S^*$  log-normalverteilte Änderungsraten aufweisen, in keinem nennenswerten Widerspruch zueinander.

Statt  $S_T^* - K_{CW}$  für  $S_T^* > K_{CW}$  beträgt der Gewinn bei Ausübung nur

$$\frac{n \cdot S_T^* + m \cdot K}{n + m} - K_{CW} \text{ für } \frac{n \cdot S_T^* + m \cdot K}{n + m} > K_{CW}$$

$$c_{CW,T}(S, K_{CW}) = \max \left[ \frac{n}{n+m} \cdot S_T^* + \frac{m}{n+m} \cdot K - K_{CW}, 0 \right]$$

$$\begin{aligned} c_{CW}(S, K_{CW}) &= \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW} \left( S^*, \frac{n+m}{n} \cdot K_{CW} - \frac{m}{n} \cdot K \right) \\ &= \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW} \left( S^*, K_{CW} + \frac{m}{n} \cdot (K_{CW} - K) \right), \\ &= \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW} \left( S + (S^* - S), K_{CW} + \frac{m}{n} \cdot (K_{CW} - K) \right) \\ &= \frac{n}{n+m} \cdot c_{CW} \left( S + \frac{m}{n} \cdot c(S, K), K_{CW} + \frac{m}{n} (K_{CW} - K) \right) \\ &\approx \frac{n}{n+m} \cdot \left[ c_{CW} \left( S, K_{CW} + \frac{m}{n} \cdot (K_{CW} - K) \right) + \hat{\delta} \cdot \frac{m}{n} \cdot c(S, K) \right] \end{aligned}$$

$$\text{mit } \hat{\delta} = \frac{\delta c_{CW}(S, K_{CW} + \frac{m}{n} \cdot (K_{CW} - K))}{\delta S}$$

Wegen

$$c(S, K) \approx \frac{n}{n+m \cdot (1-\delta)} \cdot c_{CW}(S, K)$$

gilt somit:

$$\begin{aligned} c_{CW}(S, K_{CW}) &\approx \frac{n}{n+m} \\ &\cdot \left[ c_{CW} \left( S, K_{CW} + \frac{m}{n} \cdot (K_{CW} - K) \right) + \frac{\hat{\delta} \cdot m}{n+m \cdot (1-\delta)} \cdot c_{CW}(S, K) \right] \end{aligned}$$

Der Wert des Covered Warrant läßt sich also mehrstufig berechnen: Zunächst wird der Wert des Covered Warrant für den heutigen Aktienkurs und einen künstlichen Ausübungspreis  $K_{CW} + \frac{m}{n} \cdot (K_{CW} - K)$  errechnet. Hierbei wird zugleich der  $\delta$ -Wert dieser Option errechnet ( $\hat{\delta}$ ). Sodann wird der Wert eines Covered Warrant mit dem aktuellen Aktienkurs und dem Ausübungspreis des direkt emittierten Scheins sowie das



zugehörige  $\delta$  ermittelt. Nun wird der zweite Covered-Warrant-Wert nach Maßgabe der Anzahl alter Aktien  $n$ , potentieller neuer Aktien  $m$  sowie den Werten  $\hat{\delta}$  und  $\delta$  modifiziert und zum ersten Covered-Warrant-Wert addiert. Das  $\frac{n}{n+m}$ -fache der Summe stellt den Näherungswert für den Covered Warrant bei zeitgleichem Auslaufen eines direkt emittierten Scheins dar.

### XIII.

Reicht die Restlaufzeit des Covered Warrant über den Verfallzeitpunkt des direkt emittierten Scheins hinaus, werden die Verhältnisse so kompliziert, daß es sich empfiehlt, auf den Binominalansatz der Optionsbewertung zurückzugreifen.

Für einen Covered Warrant auf Aktien eines Unternehmens ohne direkt emittierte Optionsscheine gilt, wie zuerst von *Cox*, *Ross* und *Rubinstein* gezeigt<sup>13</sup>,

$$c_{CW} = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} \cdot p^j \cdot (1-p)^{k-j} \cdot \max[u^j \cdot d^{k-j} \cdot S - K, 0] / (1+i)^T$$

$k = T \cdot f$   $k$  = Anzahl der Kursänderungen bis zum Verfall

$f$  = Anzahl der Kursänderungen pro Jahr

$u$  = Kursänderungsfaktor für Aufwärtsbewegung =  $e^{\sigma \cdot \sqrt{1/f}}$

$d$  = Kursänderungsfaktor für Abwärtsbewegung =  $1/u$

$$p = [(1+i)^{1/f} - d] / (u - d)$$

Bezeichnen wir das Minimum an Aufwärtsbewegungen, das erforderlich ist, um die Bedingung  $S_T > K$  zu erfüllen, mit  $\bar{j}$ , so kann die Optionsbewertungsformel auch geschrieben werden als

$$c_{CW} = \sum_{j=\bar{j}}^k \left( \frac{k!}{(k-j)!j!} \cdot p^j \cdot (1-p)^{k-j} \cdot u^j \cdot d^{k-j} \cdot S - K \right) / (1+i)^T.$$

<sup>13</sup> Vgl. *John C. Cox*, *Stephen A. Ross* und *Mark Rubinstein*: Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7 (1979), S. 229 - 263.

## XIV.

$T_2$  sei der Zeitpunkt, zu dem ein Covered Warrant fällig werde ( $T_2 > T$ ). Für die Szenarien bis zum Zeitpunkt  $T_2$  muß berücksichtigt werden, daß nur dann, wenn die Anzahl der Aufwärtsbewegungen bis zum Zeitpunkt  $T$ , an dem der direkt emittierte Schein verfällt, geringer als  $\bar{j}$  ist, der Kursbaum sich unverändert weiterentwickelt. Wenn jedoch bis zum Zeitpunkt  $T$  eine Anzahl von Aufwärtsbewegungen  $j \geq \bar{j}$  erreicht ist, wird der Aktienkurs verwässert, und die weitere Entwicklung zwischen den Zeitpunkten  $T$  und  $T_2$  startet gleichsam von einer gestauchten Verteilung aus.

Zur Lösung des Problems, den Wert des Covered Warrant zu bestimmen, kann für jeden der möglichen Endkurse zum Zeitpunkt  $T$  („Zwischenkurs“) eine Verteilung der Kurse zum Zeitpunkt  $T_2$  berechnet werden. Mit anderen Worten: Jeder einzelne mögliche Kurs zum Zeitpunkt  $T$  kann als Startwert für einen neuen binomialen Kursbaum bis zum Zeitpunkt  $T_2$  angesehen werden. Die einzelnen Endwerte der Aktie zum Zeitpunkt  $T_2$  bestimmen den Wert des Covered Warrant am Verfallstage. Diese Werte multipliziert mit ihrer Eintrittswahrscheinlichkeit, ergeben den Erwartungswert des Covered Warrant zum Verfallstag. Die einzelnen Eintrittswahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der Eintrittswahrscheinlichkeit des jeweiligen Aktienkurses bei gegebenem Startkurs zum Zeitpunkt  $T$  (dem Zwischenkurs), zusätzlich gewogen mit der relativen Häufigkeit dieses zugrunde liegenden Zwischenkurses.

Für einen beliebigen Zwischenkurs  $\tilde{S}_T$  zum Zeitpunkt  $T$  ergibt sich der Endwert des Covered Warrant als

$$\sum_{g=0}^l \frac{l!}{(l-g)!g!} \cdot p^g \cdot (l-p)^{l-g} \cdot \max[u^g \cdot d^{l-g} \cdot \tilde{S}_T - K_2, 0]$$

Hierbei ist  $l$  die Anzahl der Kursänderungen zwischen den Zeitpunkten  $T$  und  $T_2$ , also

$$l = (T_2 - T) \cdot f,$$

$K_2$  ist der Ausübungskurs des Covered Warrant.

Der Wert  $\tilde{S}_T$  ist jedoch nicht fest vorgegeben, sondern hängt seinerseits von der Aktienkursentwicklung bis zum Zeitpunkt  $T$  und der gegebenenfalls eintretenden Kapitalverwässerung ab. Die Anzahl der Aufwärtsbewegungen, die maximal eintreten dürfen, damit der direkt emit-

tierte Optionsschein nicht ausgeübt wird und deshalb keine Kapitalverwässerung eintritt, beträgt  $\bar{j} - 1$ . Für alle Kurse  $S_T^*$ , die aus maximal  $\bar{j} - 1$  Aufwärtsbewegungen hervorgehen, kann der Zwischenkurs aus der üblichen Binomialformel für die Kursverteilung zum Zeitpunkt  $T$  übernommen werden, für  $\bar{j}$  oder mehr Aufwärtsbewegungen (d.h. für Kurse  $S_T^* > K$  und damit alle Fälle der Optionsausübung) ist von einem verwässerten Zwischenkurs  $\bar{S}_T$  auszugehen

$$\bar{S}_T = \begin{cases} S_T^* & \text{für } S_T^* \leq K \\ \frac{n \cdot S_T^* + m \cdot K}{n + m} & \text{für } S_T^* > K \end{cases}$$

Somit gilt für den zum Zeitpunkt  $T_2$  verfallenden Covered Warrant mit dem Ausübungskurs  $K_2$  auf eine dividendenlose Aktie mit dem „eigentlichen Kurs“  $S^*$ :

$$\begin{aligned} c_{CW} = & \left\{ \sum_{j=0}^{\bar{j}-1} \frac{k!}{(k-g)!j!} \cdot p^j \cdot (1-p)^{k-j} \cdot \sum_{g=0}^l \frac{l!}{(l-g)!g!} \cdot p^g \cdot (1-p)^{l-g} \right. \\ & \cdot \max [u^{j+g} \cdot d^{l+k-j-g} \cdot S^*, 0] \\ & + \sum_{j=\bar{j}}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} \cdot p^j \cdot (1-p)^{k-j} \cdot \sum_{g=0}^l \frac{l!}{(l-g)!g!} \cdot p^g \cdot (1-p)^{l-g} \\ & \left. \cdot \max \left[ \left( (u^j \cdot d^{k-j} \cdot S^* \cdot n + m \cdot K) / (n + m) \right) \cdot u^g \cdot d^{l-g} - K_2, 0 \right] \right\} \\ & / (1 + i)^{T_2} \end{aligned}$$

$S^*$  kann ermittelt werden aus  $S^* = S + \frac{m}{n} \cdot c$ .

Dabei wäre  $c$

- entweder mit der modifizierten *Black/Scholes*-Formel für direkt emittierte Optionsscheine zu berechnen (Abschnitte V, VIII)
- oder mit Hilfe einer modifizierten Binomialformel im Wege der Iteration zu ermitteln, wobei der Wert  $S^*$  solange zu modifizieren wäre, bis für das Ergebnis  $c$  die Gleichung  $S^* = S + \frac{m}{n} \cdot c$  mit hinreichender Genauigkeit erfüllt ist (Abschnitt XIII mit der Maßgabe, daß  $c(S) = \frac{1}{1+\lambda} \cdot c_{CW}(S^*)$  und der Kursbaum von  $S^*$  seinen Ausgang nimmt)

- oder durch Verwendung des Marktpreises für den direkt emittierten Optionsschein zu ersetzen<sup>14</sup>.

Die Formel sieht sperrig aus, ist aber mit recht wenig Aufwand auf einem Personalcomputer programmierbar. Da für praktische Zwecke jedoch die erwarteten Dividendenzahlungen mit berücksichtigt werden müssen, ist die Formel auf jeden Fall noch einmal zu modifizieren. Relativ einfach wäre es, wenn auf die Zwischenergebnisse für  $S_T^*$  zurückgegriffen werden kann, die von bereits existierenden Computerprogrammen ermittelt werden, die den Binomialansatz verwenden.

## XV.

Häufig liegt auch der Fall vor, daß von einem Unternehmen mehrere Optionsscheine direkt emittiert werden. Die Existenz mehrerer Typen von direkt emittierten Optionsscheinen beeinflusst die jeweils einschlägige Bewertungsformel aller Optionen. So ist der eigentliche Kurs  $S^*$  nunmehr durch Verteilung des Werts aller Optionen auf die Altaktien zu ermitteln.

$$S^* = \frac{n \cdot S + m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2 + \dots + m_i \cdot c_i}{n + m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 + \dots + m_i \cdot v_i}$$

$c_1$  ist der Wert des zuerst fälligen Optionsscheins,  $c_2$  der Wert des danach fälligen usw.,  $c_i$  der Wert des Optionsscheins mit der längsten Restlaufzeit.  $m_1$  ist die Anzahl zuerst, zum Zeitpunkt  $T_1$ , verfallenden Optionsscheine,  $m_2$  die entsprechende Anzahl an danach verfallenden Scheinen usw.,  $v_1$  ist die Anzahl der Bezugsrechte, die ein Schein des ersten Typs verkörpert,  $v_2$  die Anzahl der Bezugsrechte, die die zweite Art von Optionsschein vermittelt usw.

Wegen der Interdependenz von  $S$ ,  $S^*$  und allen Optionswerten  $c$  kommt im Prinzip nur eine simultane Bestimmung aller Werte in Frage. Dies wäre eine hochkomplizierte Sache. Für zwei direkt emittierte Optionsscheine stellt sich die Situation bereits wie folgt dar:

Der relevante Kurs zum Verfallzeitpunkt  $T_1$  des ersten Optionsscheins ist der eigentliche Kurs  $S_{T_1}^*$ , abzüglich dessen, was vom Gesamtvermögen  $V_{T_1}$  auf die Inhaber der zweiten Art von Optionsscheinen entfällt.

<sup>14</sup> Wird insoweit dem Marktpreis des direkt emittierten Optionsscheins „Richtigkeit“ zugebilligt, liegt es nahe, ihm mehr Informationen zu entnehmen. Aus Aktienkurs und Optionsscheinkurs ergibt sich eine implizite Volatilität der Aktie. Diese wäre auch für den Covered Warrant zu verwenden. Damit wären in der obigen Binomialformel die Werte von  $u$ ,  $d$  und  $p$  festgelegt.

$$c_{1T_1} = \max \left[ \frac{n \cdot S_{T_1}^* - m_2 \cdot c_{2T_1} + m_1 \cdot v_1 \cdot K_1}{n + v_1 \cdot m_1} - K_1, 0 \right]$$

$$c_1 = \frac{n}{n + v_1 \cdot m_1} \cdot c_{CW} \left( S^*, K_1 + \frac{m_2}{n} \cdot (n + v_1 \cdot m_1) \cdot c_{2T_1} \right)$$

$S^*$  kann wie oben gezeigt unter Verwendung von  $\delta$  (näherungsweise) durch einen Ausdruck mit  $S$  substituiert werden oder näherungsweise unter Verwendung der aktuellen Kurse der Optionsscheine errechnet werden als  $S^* = (n \cdot S + m_1 \cdot c_{1,emp} + m_2 \cdot c_{2,emp}) / (n + m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)$ . Der modifizierte Ausübungspreis  $K_1 + \frac{m_2}{n} \cdot (n + v_1 \cdot m_1) \cdot c_{2T_1}$  könnte durch Verwendung einer Kennziffer für  $\frac{\partial c}{\partial K}$ , den die einschlägige Lehrbuchliteratur und die Computerprogramme allerdings bislang noch nicht ausweisen, (näherungsweise) in einen Ausdruck überführt werden, der nur  $K_1$  als Basispreis enthielte, wenn nicht das Problem bestünde, daß der Ausdruck  $\cdot c_{2T_1}$ , der jeweilige Wert des zweiten Optionsscheins zum Zeitpunkt des Verfalls des ersten, selbst ein kontingenter Wert ist. Dies ist algebraisch (vorerst) nicht aufzulösen. Praktisch käme nur ein komplexer Binomialansatz in Frage. Im Hinblick auf den Aufwand ist deshalb anzuraten, die Werte der einzelnen Optionsscheintypen unter Ignorierung der übrigen Optionsscheine durch die Näherungsformel (6) aus Abschnitt VIII zu bestimmen.

### Literatur

*Black*, Fischer und *Scholes*, Myron: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol. 81 (1973), S. 637 - 654. – *Cox*, John C. und *Rubinstein*, Mark: Option Markets, Englewood Cliffs, N. J. 1985. – *Cox*, John C., *Ross*, Stephen A. und *Rubinstein*, Mark: Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7 (1979), S. 229 - 263. – *Ferri*, Michael G., *Kremer*, Joseph W. und *Oberhelman*, H. Dennis: An Analysis of the Pricing of Corporate Warrants, in: *Advances in Futures and Options Research*, Vol. 1, Part A (Hrsg.: *Fabozzi*, F. J.), Greenwich, Ct., London 1986, S. 201 - 226. – *Galai*, Dan und *Schneller*, Meir I.: Pricing of Warrants and the Value of the Firm, *The Journal of Finance*, Vol. XXXIII (1978), S. 1333 - 1342. – *Hull*, John: Options, Futures, and Other Derivative Securities, Englewood Cliffs, N. J. 1989. – *Naust*, Hermann: Bewertung langlaufender Aktienoptionen und Ertragsteuern, Manuskript Saarbrücken 1993. – *Watsham*, Terry J.: Options and Futures in International Portfolio Management, London 1992.

## Zusammenfassung

### Zur Optionsscheinbewertung mit Rücksicht auf die Kapitalverwässerung bei der Ausübung

In der Praxis wird zumeist der Unterschied zwischen Aktienoptionen und Covered Warrants einerseits sowie direkt emittierten Optionsscheinen der Aktiengesellschaften andererseits ignoriert, obwohl bei der Bewertung letzterer berücksichtigt werden müßte, daß es bei ihrer Ausübung zur Kapitalverwässerung und damit gleichsam zur Selbstentwertung kommt. Die in der Literatur gefundene Lösung für europäische Kaufoptionsscheine wird noch einmal hergeleitet. Anschließend wird eine Näherungsformel entwickelt, die die Wertbestimmung anhand der üblicherweise verfügbaren Parameter und Kennzahlen der Optionsbewertung in einfacher Weise erlaubt. Für Aktiengesellschaften mit mehreren Serien direkt emittierter Optionsscheine wird die Interdependenz der Bewertung von Aktien und allen Arten von Optionsscheinen demonstriert. Der Verfasser plädiert hier für ein pragmatisches Vorgehen durch Ignorieren der jeweils anderen Arten von Optionsscheinen.

## Summary

### Evaluation of Warrants bearing in Mind the Dilution of Capital when exercised

In practice, the difference between stock options and covered warrants on the one hand and warrants directly issued by public limited companies on the other is ignored in most cases, although it ought to be borne in mind that, when evaluating the latter, exercising warrants results in capital dilution and, thus, in an erosion of their own value. This analysis verifies the solution to be found in the literature for European call warrants. Subsequently, it develops an approximation formula permitting simple evaluation on the basis of the parameters and index figures customarily available. Where several types of directly issued warrants are involved, this analysis demonstrates the interdependencies that exist between evaluations of stock and evaluations of any of the other types of warrants. Here, the author makes the pragmatic proposal to ignore such other types of warrants.

## Résumé

### L'évaluation de titres d'actions, compte tenu de la dilution de capital lors de l'exercice

Dans la pratique, on ignore le plus souvent la différence entre les options d'actions et les Covered Warrants et les titres d'actions directement émis des sociétés par actions, bien qu'il faudrait considérer, en évaluant ces derniers que, lors de leur exercice, il y a dilution de capital et en même temps auto-dévaluation. La solution trouvée dans la littérature pour des titres d'actions européens est reprise.

Finalement, une formule d'approximation est développée, permettant de déterminer facilement la valeur au moyen des paramètres habituellement disponibles et des indicateurs de l'évaluation d'options. Dans les cas où il y a plusieurs sortes de titres d'actions directement émis, l'interdépendance de l'évaluation d'actions et de toutes les sortes de titres d'actions est démontrée. L'auteur plaide ici en faveur d'une démarche pragmatique, en ignorant les autres sortes de titres d'actions.