

# **Eine Einführung in die arbitragefreie Bewertung von Derivaten in stetiger Zeit am Beispiel europäischer Devisenoptionen**

Von Frank B. Lehrbass, Dortmund\*

## **I. Einleitung**

Das Anliegen dieses Artikels besteht darin, einen Teil der auf *Black/Scholes* (1973) zurückgehenden Literatur in leicht zugänglicher Weise vorzustellen. Wie bei „Einführungen“ üblich, wird aus didaktischen Gründen weniger Gewicht auf mathematische Exaktheit als auf Verständlichkeit gelegt. An mathematischen Vorkenntnissen ist lediglich „Das Abitur-Wissen Mathematik“ (*Brauner/Geiß*, 1990) erforderlich.

Daß die vorliegende Einführung am Beispiel konkreter Devisenderivate aufgezogen wird, ist ebenfalls didaktisch motiviert. Obwohl der Artikel von *Black/Scholes* (1973) europäische Optionen auf Aktien ohne Dividendenzahlungen während der Optionslaufzeit betrachtet, ist es dennoch nutzbringend, Devisenoptionen als Beispiel zu wählen. Dies liegt daran, daß Devisen „Dividenden“ in Form der ausländischen Festverzinsung zahlen. Aktien, wie sie von *Black/Scholes* betrachtet werden, sind somit als Spezialfall im Beispiel enthalten, indem man die ausländische Festverzinsung gleich Null setzt.

Konkret bietet der vorliegende Artikel zunächst eine Darstellung der zentralen Erkenntnis der Optionspreistheorie anhand eines auf *Cox/Ross/Rubinstein* (1979) zurückgehenden Binomialmodells. Danach wird ein Modell der Kursentwicklung in stetiger Zeit aus ökonomischen Überlegungen hergeleitet, das unter dem Namen Geometrische Brownsche Bewegung bekannt ist.

Dieses Modell wurde von *Black/Scholes* (1973) für die Aktienkursdynamik und von *Garman/Kohlhagen* (1983) für die Kursdynamik einer

---

\* Dank für nützliche Hinweise gebührt einem anonymen Referee und Herrn *Heinz Holländer*, Universität Dortmund, sowie der Friedrich Ebert-Stiftung für ihre finanzielle Unterstützung.

Devisen unterstellt. In diesem Zusammenhang wird das sogenannte Ito-Lemma eingeführt. Darauf aufbauend wird eine Differentialgleichung hergeleitet, der die Wertentwicklung eines jeden Derivats bei Arbitragefreiheit genügen muß. Cox/Ross (1976) folgend, wird sodann festgestellt, daß diese Differentialgleichung nur Parameter enthält, die von den Risikoneigungen der Marktteilnehmer unabhängig sind. Es ist daher möglich, arbitragefreie Derivatprämien als diskontierte Erwartungswerte ihrer Ausübungserlöse in einer risikoneutralen Welt zu ermitteln. Anhand dieses Verfahrens wird die Prämie eines europäischen Devisenputs bestimmt. Schritt für Schritt ergibt sich die *Garman/Kohlhagen*-Formel (1983), die als Spezialfall die *Black/Scholes*-Formel enthält.

## II. Die zentrale Erkenntnis der Optionspreistheorie

Devisenoptionen stellen für den Optionskäufer das Recht – nicht aber die Pflicht – dar, eine Deviseneinheit zu einem zuvor vereinbarten Basis kurs vom Stillhalter zu kaufen (Kaufoption, Call) oder zu verkaufen (Verkaufsoption, Put). Institutionelle Details finden sich in den einschlägigen Lehrbüchern von *Solnik* (1988) und *Shapiro* (1989) oder bei *Liepach* (1993).

Unter Praktikern ist allgemein bekannt, daß Optionen hochriskante Finanztitel sind, unabhängig davon, ob sie sich auf Devisen oder Aktien beziehen. Deshalb vermutet man, daß die Risikoneigungen der Marktteilnehmer eine fundamentale Rolle bei der Ermittlung des Optionswertes vor Fälligkeit spielen. Im Gegensatz dazu lautet die zentrale Erkenntnis der Optionspreistheorie wie folgt:

Wenn es möglich ist, ohne Mittelaufwand ein risikoloses Portfolio, bestehend aus der Option, der Devisen und dem inländischen Zerobond zu konstruieren, dann impliziert Arbitragefreiheit, daß der Wert der Option unabhängig von Risikopräferenzen bestimmt werden kann.

Diese Erkenntnis stammt zwar aus der Optionspreistheorie, sie bezieht sich jedoch nicht nur auf Optionen, sondern auf beliebige Derivate, die dadurch definiert sind, daß ihre Wertentwicklung eindeutig von der Wertentwicklung eines anderen Instruments bestimmt wird. Deshalb wird die zentrale Erkenntnis zunächst für ein unspezifiziertes Devisenderivat in einem einperiodigen Binomialmodell bewiesen, dessen Konstruktionsidee auf Cox/Ross/Rubinstein (1979) zurückgeht und in dem es nur zwei Zeitpunkte gibt. Der Periodenanfang wird durch 0 und das Periodenende mit  $T$  indiziert. Zusätzlich wird eine Zeitvariable  $t$  eingeführt, die den

Betrachtungszeitpunkt bezeichnet und hier (zunächst) nur zwei mögliche Werte ( $t = 0, t = T$ ) annehmen kann.

Im Anschluß wird das Devisenderivat beispielhaft als Devisenput spezifiziert und anhand eines Zahlenbeispiels durchgerechnet. Der Verständlichkeit halber wird die Devise durchweg als US-Dollar konkretisiert. Eine Einheit US-Dollar wird mit dem Symbol „\$“ bezeichnet.

Es wird unterstellt, daß sich zum Zeitpunkt Null folgende vier Instrumente auf friktionslosen Märkten erwerben bzw. leerverkaufen lassen:

Ein inländischer Zerobond, der am Periodenende genau eine DM wert ist und in  $t = 0 1/(1 + pr)$  DM kostet, wobei  $pr$  den hier relevanten inländischen Periodenzinssatz bezeichnet.

Ein ausländischer Zerobond, der am Periodenende genau einen Dollar wert ist und zum Zeitpunkt Null  $1/(1 + pr^*)$  \$ kostet.  $pr^*$  bezeichnet den ausländischen Periodenzinssatz.

Die Devise, deren Kassakurs zum Zeitpunkt Null  $S^\circ$  DM/\$ beträgt und die zum Zeitpunkt  $T$  zwei mögliche Kassakursausprägungen hat, die wie folgt definiert sind:

$$S^{up} \equiv uS^\circ, S^{down} \equiv dS^\circ \\ \text{mit } d < \frac{1 + pr}{1 + pr^*} < u$$

Die Ungleichungen für die Parameter  $u$  und  $d$  sind nötig, um eine arbitragefreie Devisenkursentwicklung zu gewährleisten. Eine ausführliche Begründung findet sich bei *Cox/Ross/Rubinstein* (1979).

Das vierte und letzte Instrument ist ein unspezifiziertes Devisenderivat, das bei Periodenbeginn  $Z^\circ$  DM wert ist und dessen Wert am Periodenende zwei mögliche Ausprägungen in Abhängigkeit der Devisenkassakursentwicklung annehmen kann:

$$Z^{up} \equiv \text{Wert des Derivats, falls } S^{up} \text{ eintritt} \\ Z^{down} \equiv \text{Wert des Derivats, falls } S^{down} \text{ eintritt}$$

Die Anzahl der für ein Portfolio erworbenen (leerverkauften) inländischen Zerobonds wird mit  $a > (<) 0$  bezeichnet, die Anzahl der gekauften (geschriebenen) Derivate wird durch  $b > (<) 0$  angegeben und die Anzahl gekaufter (leerverkaufter) Devisen durch  $c > (<) 0$ .

Für den ausländischen Zerobond wird keine eigene Variable eingeführt, da seine Funktion ausschließlich darin besteht, daß Devisenpositionen in ihm gehalten werden. Beispielsweise wird eine gekaufte Devise

sofort zum ausländischen Periodenfestzins angelegt, da sonst Zinsein-künfte verlorengingen.

Die Existenz eines risikolosen Portfolios, das sich ohne Mittelaufwand errichten läßt und aus allen vier Instrumenten besteht, wird nunfolgend angenommen. Der Wert dieses Portfolios wird zu den jeweiligen Zeit-punkten und Zuständen mit dem Buchstaben  $Y$  wie folgt bezeichnet:

$$\begin{aligned} Y^0 &\equiv \text{Wert des Portfolios zum Zeitpunkt Null} \\ Y^{up} &\equiv \text{Wert des Portfolios, falls } S^{up} \text{ eintritt} \\ Y^{down} &\equiv \text{Wert des Portfolios, falls } S^{down} \text{ eintritt} \end{aligned}$$

Konkret gilt:

$$\begin{aligned} Y^0 &= a \frac{1}{1 + pr} + bZ^0 + cS^0 \\ Y^{up} &= a + bZ^{up} + cS^{up} (1 + pr^*) \\ Y^{down} &= a + bZ^{down} + cS^{down} (1 + pr^*) \end{aligned}$$

Die Annahme, daß sich das Portfolio *ohne Mittelaufwand* konstruieren läßt, bedeutet, daß es Variablenwerte von  $a, b, c$  gibt, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

$$(1^*) \quad Y^0 = 0, \quad Y^{up} \geq 0, \quad Y^{down} \geq 0$$

Die erste Bedingung sagt, daß der Einstieg in das Portfolio zum Zeit-punkt Null nichts kostet. Die nächsten beiden Ungleichungen besagen, daß in der Zukunft keine Nachschußpflicht besteht.

Die Annahme, daß das Portfolio *risikolos* ist, läßt sich wie folgt forma-lisieren:

$$(2^*) \quad Y^{down} = Y^{up}$$

Diese Gleichung besagt, daß es für den zukünftigen Wert des Portfolios ohne Bedeutung ist, ob eine Aufwertung oder eine Abwertung der Devise eintritt.

Jetzt erst wird die Annahme der *Arbitragefreiheit* mit Blick auf das Portfolio eingeführt. Konkret wird die Abwesenheit von Arbitragemöglichkeiten *des Typs I* gefordert, was folgendes bedeutet: Es existiert kein Portfolio mit der Eigenschaft, daß zum Zeitpunkt Null kein Mitteleinsatz erforderlich ist und gleichzeitig der zukünftige Wert des Portfolios *mit Sicherheit größer gleich Null* ist und *mit positiver Wahrscheinlichkeit* größer als Null ist (Ingersoll, 1987, 53).

In anderen Worten lautet diese Annahme der Arbitragefreiheit: Lotterielose werden nicht verschenkt!

Wegen fehlender Nachschußpflicht ist der Wert des Portfolios mit Sicherheit größer gleich Null. Um die Existenz eines „geschenkten Lotterieloses“ (in Form des Portfolios) zu verhindern, darf es keine positive Wahrscheinlichkeit eines Wertzuwachses geben. Arbitragefreiheit läßt sich somit formalisieren, indem ein Wertzuwachs des Portfolios in Höhe von Null gefordert wird:

$$(3^*) \quad Y^{up} - Y^\circ = 0, \quad Y^{down} - Y^\circ = 0$$

Insgesamt betrachtet muß ein *risikoloses* Portfolio, das sich *ohne Mittelaufwand* errichten läßt, bei *Arbitragefreiheit* das folgende lineare und homogene Gleichungssystem erfüllen:

$$(1) \quad a \frac{1}{1 + pr} + bZ^\circ + cS^\circ = 0$$

$$(2) \quad b(Z^{down} - Z^{up}) + c(d - u)S^\circ(1 + pr^*) = 0$$

$$(3) \quad a + bZ^{down} + cS^{down}(1 + pr^*) = 0$$

Man beachte bei Gleichung (3), daß es wegen der Risikolosigkeit des Portfolios (dafür steht Gleichung (2)) ausreicht, die Arbitragefreiheitsbedingung (3\*) für nur einen der beiden Zustände (Aufwertung/Abwertung) – unter Ausnutzung von  $Y^\circ = 0$  – auszuschreiben.

*Behauptung 1:* Gegeben ein einperiodiges Binomialmodell und die Existenz eines risikolosen Portfolios, das sich ohne Mittelaufwand errichten läßt und aus allen vier Instrumenten besteht, so läßt sich der arbitragefreie Wert eines Devisenderivats zum Zeitpunkt Null unabhängig von den Risikopräferenzen der Marktteilnehmer bestimmen.

Beweis (in Anlehnung an *Merton* (1973)): Per Annahme der Existenz eines risikolosen Portfolios, das sich ohne Mittelaufwand errichten läßt, gibt es neben der trivialen Lösung des homogenen Gleichungssystems mindestens eine nicht-triviale, die die Zusammensetzung des Portfolios konkretisiert. Aus der Mathematik ist bekannt, daß deshalb eine der Gleichungen (1), (2), (3) überflüssig ist (*Brauner/Geiß*, 1990, 292).

Formal bedeutet dies, daß die Koeffizienten einer Gleichung linear abhängig von den Koeffizienten der anderen beiden sein müssen. Aus diesem Grund lassen sich die Koeffizienten der ersten Gleichung durch

eine Linearkombination der Koeffizienten der Gleichungen (2) und (3) erzeugen (Brauner/Geiß, 1990, 282):

$$(4) \quad \frac{1}{1 + pr} = \lambda_{(3)} 1$$

$$(5) \quad Z^\circ = \lambda_{(2)} (Z^d - Z^u) + \lambda_{(3)} Z^d$$

$$(6) \quad S^\circ = \lambda_{(2)} (d - u) S^\circ (1 + pr^*) + (\lambda_{(3)} d S^\circ (1 + pr^*)$$

Aus Gleichung (4) ergibt sich:

$$(7) \quad \lambda_{(3)} = \frac{1}{1 + pr}$$

Aus Gleichung (6) folgt:

$$(8) \quad \lambda_{(2)} = \frac{1 - \frac{d(1 + pr^*)}{1 + pr}}{(d - u)(1 + pr^*)}$$

Setzt man (7) und (8) in Gleichung (5) ein, so ergibt sich für das Devisen-derivat zum Zeitpunkt Null folgender arbitragefreier Wert:

$$(9) \quad Z^\circ = \frac{1}{1 + pr} \left[ \frac{1 + pr - d(1 + pr^*)}{(u - d)(1 + pr^*)} Z^{up} + \frac{u(1 + pr^*) - (1 + pr)}{(u - d)(1 + pr^*)} Z^{down} \right]$$

Für die Ermittlung des arbitragefreien Wertes des Devisenderivats zum Periodenbeginn reicht es somit zu wissen, welche Ausprägungen die Devise (vermöge der Parameter  $u$  und  $d$ ) sowie das diesbezügliche Derivat zukünftig annehmen können. Mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Ereignisse gewichtet werden, ist für die Bestimmung von  $Z^\circ$  völlig irrelevant.

Da Gleichung (9) nur Parameter enthält, die unabhängig von den Risikoneigenschaften der Marktteilnehmer sind, ist die Behauptung bewiesen. q.e.d.

*Ein Beispiel:* Da die Literatur für gewöhnlich den Call in aller Ausführlichkeit betrachtet und den Put vernachlässigt, scheint es sinnvoll als Beispiel einen europäischen Devisenput zu wählen. Dieser kann nur am Periodenende ausgeübt werden und habe zum Zeitpunkt Null einen Basis- bzw. Ausübungskurs  $A$  in Höhe von 1,6000 DM/\$. Die Laufzeit betrage ein Jahr (formalisiert durch  $T = 1$ ). Es werden Periodenzinssätze in Höhe von  $pr = 0,2$  (20%) und  $pr^* = 0,1$  (10%) gewählt, so daß die ein-

gangs genannten Ungleichungen für die Faktoren  $u$  und  $d$  wie folgt lauten:

$$(10) \quad d < \frac{1,2}{1,1} = 1,0909 < u$$

Obwohl Behauptung 1 für beliebige, die Ungleichungen unter (10) erfüllende,  $u$  und  $d$  bewiesen wurde, ist es sinnvoll, die Faktoren  $u$  und  $d$  nach folgender Formel zu bestimmen:

$$(11) \quad \begin{aligned} u &\equiv e^{\sigma\sqrt{\theta}} \\ \theta &\equiv \frac{T}{\text{Periodenanzahl}} \\ d &\equiv \frac{1}{u} \end{aligned}$$

Der Parameter  $\sigma$  wird beispielhaft auf 0,2 (20 %) gesetzt und entspricht im weiter unten folgenden Modell der Volatilität der Jahresrendite einer Deviseninvestition. Die Befolgung der unter (11) aufgelisteten Vorschriften sichert, daß das vorliegende Binomialmodell bei Periodenanzahlerhöhung gegen die Geometrische Brownsche Bewegung konvergiert. Diese Bemerkung wird weiter unten verständlich. Detaillierte Ausführungen hierzu finden sich bei *Cox/Ross/Rubinstein* (1979) und *Hull* (1989).

Im vorliegenden Beispiel beträgt die Periodenanzahl eins und es gilt  $T = 1$ , so daß die Periode im Beispiel einem Jahr entspricht. Eingesetzt in (11) ergibt sich:

$$(12) \quad u = 1,2214, \quad d = 0,8187$$

$u$  und  $d$  erfüllen somit Ungleichung (10), womit die Kursentwicklung der Devise arbitragefrei ist. Alle Größen sind und werden auf die vierte Stelle hinter dem Komma gerundet.

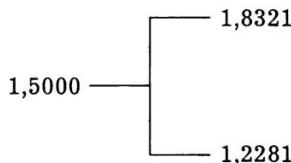
Beispielhaft wird der Kassakurs des US-Dollar am Periodenanfang auf  $S^0 = 1,5000$  DM/\$ festgelegt. Mit den soeben konkretisierten Parametern  $u$  und  $d$  bedeutet dies die Möglichkeit einer Aufwertung des Dollar auf 1,8321 DM/\$ sowie die Möglichkeit einer Abwertung auf 1,2281 DM/\$ am Periodenende.

Von seinem Recht, einen Dollar zu 1,6000 DM/\$ verkaufen zu können, wird der Putinhaber nur bei einem Kurs von 1,2281 DM/\$ Gebrauch machen, da er sich andernfalls einen Verlust beibrächte.

Bezeichnet man den Wert des Puts durch den Großbuchstaben  $P$  so ergibt sich folgende Datenkonstellation:

$$(13) \quad \begin{aligned} T &= 1, \quad A = 1,6000 \\ S^0 &= 1,5000, \quad S^{up} = 1,8321, \quad S^{down} = 1,2281 \\ P^{up} &= 0, \quad P^{down} = 0,3719 = 1,6000 - 1,2281 \end{aligned}$$

Alle Größen lauten auf DM. Graphisch ergibt sich folgender Binomialbaum für die Devisenkursentwicklung:



Nach Einsetzen der Beispiel-Daten in Gleichung (9) ergibt sich ein arbitragefreier Wert des Devisenput zum Zeitpunkt Null in Höhe von  $P^0 = 0,1004$  DM. Dazu mußten lediglich die in (9) stehenden  $Z$ -werte durch die jeweiligen  $P$ -werte ersetzt werden.

An diesem Beispiel läßt sich eine weitere Erkenntnis der Optionspreistheorie zeigen, die sich im Zusammenhang mit Behauptung 1 ergibt (Cox/Ross, 1976). Wenn der arbitragefreie Wert eines Derivats unabhängig von den Risikopräferenzen der Marktteilnehmer bestimmt werden kann, so darf man  $Z^0$  als *Gleichgewichtswert in beliebigen Welten* bestimmen, für die die Risikopräferenzen gegeben und *mit den Parametern konsistent sind*.

Konkret dürfte man sich in eine Welt hineinversetzen, die nur aus risikofreudigen oder nur aus risikoaversen oder nur aus risikoneutralen Individuen besteht, und dort  $Z^0$  als Gleichgewichtswert ermitteln. Da die analytisch einfachste Welt eine risikoneutrale ist, versetze man sich von nun an in diese.

In einer risikoneutralen Welt spielt die bislang irrelevante Wahrscheinlichkeitsverteilung der zukünftigen Kassakurse eine zentrale Rolle, da dort der heutige Gleichgewichtswert eines jeden Finanztitels gleich dem mit dem Zinssatz für risikolose Anlagen diskontierten Erwartungswert des zukünftigen Finanztitelwertes ist.

Auf den Put angewandt, bedeutet dies, daß der heutige Gleichgewichtswert  $P^0$  in einer risikoneutralen Welt wie folgt lauten muß:

$$(14) \quad P^0 = \frac{1}{1 + pr} E^* (\max (0, A - S))$$

$S$  bezeichnet den zukünftigen Kassakurs, der bislang nur zwei Ausprägungen hat und  $E^*(.)$  steht für den Erwartungswertoperator, der von risikoneutralen Individuen zum Zeitpunkt Null eingesetzt wird.

Um mit  $E^*(.)$  arbeiten zu können, muß zunächst die bislang irrelevante Wahrscheinlichkeitsverteilung des zukünftigen Kassakurses bestimmt werden. In Anlehnung an Cox/Ross/Rubinstein (1979) bezeichne man die Wahrscheinlichkeit eines Kursanstiegs von  $S^\circ = 1,5000$  DM/\$ auf  $uS^\circ = 1,8321$  mit  $q$ .

Auch der heutige Kassakurs  $S^\circ$  muß in einer risikoneutralen Welt dem risikolosen diskontierten Erwartungswert seines zukünftigen Wertes entsprechen. Deshalb gilt analog zu (14) und unter Berücksichtigung der ausländischen Festverzinsung:

$$(15) \quad S^\circ = \frac{1}{1 + pr} (1 + pr^*) E^*(S) \Leftrightarrow$$

$$(16) \quad S^\circ = \frac{1 + pr^*}{1 + pr} [q 1,8321 + (1 - q) 1,2281]$$

Aus (16) ergibt sich, daß die Wahrscheinlichkeit eines Kursanstiegs in einer risikoneutralen Welt den Wert  $q = 0,6759$  haben muß. Demzufolge beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Kursverfalls  $1 - q = 0,3241$  in einer risikoneutralen Welt. Damit ist man im Besitz der zu einer risikoneutralen Welt *konsistenten Parameter*.

Die Kenntnis dieser Wahrscheinlichkeiten ermöglicht die Ausführung von (14), und es ergibt sich:

$$(17) \quad P^\circ = \frac{1}{1,2} [0,6759 P^{up} + 0,3241 P^{down}] = 0,1004$$

Es stellt sich natürlich sofort folgende Frage: Warum benutzt man diesen Kunstgriff zur Ermittlung von  $Z^\circ$ , wo doch bereits die explizite Lösung durch Gleichung (9) zur Verfügung steht? Die Antwort ist didaktischer Natur. Im zeitstetigen Fall wird sich nur unter größtem Rechenaufwand eine explizite Lösung analog zu (9) herleiten lassen. Statt dessen wird sich dort der Weg über die risikoneutrale Erwartungsbildung als ökonomisch einsichtiger und leichter ausführbar erweisen.

### III. Ein Modell der Kursdynamik in stetiger Zeit

#### 1. Allgemeine Vorbemerkungen

Wie bereits in der Einleitung bemerkt, wurde das Beispiel der Devisendervative seiner größeren Allgemeinheit wegen gewählt. Darum spricht die Überschrift dieses Abschnitts ganz allgemein von „Kursdynamik“. Das hier zu entwickelnde Modell ist die Geometrische Brownsche Bewegung und wurde von *Black/Scholes* (1973) für die Aktienkursentwicklung und von *Garman/Kohlhagen* (1983) für die Devisenkursdynamik unterstellt. Ein Blick in die einschlägige Literatur enthüllt, daß sich die Geometrische Brownsche Bewegung immer noch höchster Beliebtheit in der Anwendung erfreut und zudem einen nicht unbedeutlichen Realitätsgehalt besitzt (*Gaab*, 1983, 61). Nach diesen Bemerkungen zur Allgemeinheit des folgenden Modells wenden wir uns wieder den Devisendervativen zu.

Bislang hat es gereicht, den heutigen und den zukünftigen Kassakurs mit  $S^\circ$  beziehungsweise  $S$  (in seinen bislang zwei Ausprägungen) zu benennen. An diese Stelle tritt in stetiger Zeit eine noch zu spezifizierende Funktion  $S'$ , die allen Zeitpunkten zwischen „heute und Fälligkeit“ (synonym zwischen  $t = 0$  und  $t = T$ ) den jeweils geltenden Kassakurs zuordnen soll.

Da es bei einer Investition in Devisen keine Nachschußpflicht gibt und der Devisenkurs realiter bis auf die vierte Stelle hinter dem Komma notiert, wird  $S'$  als stetige Zufallsvariable mit nicht-negativen Ausgängen modelliert.

Das mathematische Konzept „Zufallsvariable“ wird wie folgt interpretiert:  $S'$  ordnet den wechselkursbedeutsamen zufälligen Ereignissen dieser Welt (z.B. Putsch in Moskau) zu jedem Zeitpunkt  $t$  auf der kontinuierlichen Zeitachse eine reelle Zahl (den Dollar-Devisenkurs) zu.

$S'$  hat somit zwei Argumente: Das stetige Zeitargument  $t$  und ein Zufallsereignis. Eine solche durch  $t$  indizierte Menge von Zufallsvariablen  $S'$  nennt man einen stetigen stochastischen Prozeß (*Fahrmeir* et al., 1981, 5).

Bis hierhin wurde die Kursdynamik mit Blick auf die Realität lediglich auf einen zeitstetigen stochastischen Prozeß festgelegt, der die nicht-negativen reellen Zahlen als mögliche Ausprägungen besitzt. Wie dieser stochastische Prozeß konkret aussieht, wird weiter unten Schritt für Schritt aus ökonomischen Überlegungen entwickelt.

Vorausgeschickt seien noch einige Bemerkungen zur Notation: Die beiden Zeitintervallendpunkte 0 und  $T$  werden stets festgehalten. Die zeitliche Entwicklung des Wechselkurses wird sichtbar, wenn  $t$  zwischen 0 und  $T$  „läuft“.  $T$  und  $t$  werden dabei in Jahreseinheiten gemessen. Beispielsweise bedeutet  $T = 1$  und  $t = 0,25$ , daß zum Zeitpunkt  $t$  nur noch ein dreiviertel Jahr bis zum Periodenende verbleibt ( $T - t = 0,75$ ).

Um den Schreibaufwand zu begrenzen, wird regelmäßig nur das Zeitargument  $t$  ausgeschrieben:  $S'$  wird somit zu  $S'(t)$ . Das Zufallsereignisargument wird nicht ausgeschrieben.

## 2. Ökonomisch begründete Eigenschaften der Wechselkursdynamik

Es ist plausibel, den an Devisenmärkten tätigen Personen zu unterstellen, daß sie für das Halten einer offenen Position in Devisen eine bestimmte Renditeerwartung pro Zeitintervall verlangen, die unabhängig davon ist, wo der Kassakurs bei Devisenerwerb (der Einstiegskurs) stand.

Um diese erste Eigenschaft ökonomisch zu illustrieren, wird ein Kassaspekulant betrachtet, der für die Dauer eines Handelstages Dollar erwirbt in der Hoffnung, daß der Kurs im Tagesverlauf steigt. Sein „Zittern pro Tag“ wird er sich für gewöhnlich mit einer entsprechenden Renditeerwartung versüßen lassen, die unabhängig davon ist, ob er den Dollar zu 3,- DM oder 1,50 DM erworben hat, da das Ausmaß seines Zitterns eher von der Riskantheit des Engagements und nicht vom Liquiditätsaufwand abhängt (Hull, 1989, 69).

Zwecks Formalisierung dieser ersten Eigenschaft betrachte man ein kleines Zeitintervall der Länge:

$$(18) \quad \Delta t > 0$$

Die in diesem Zeitintervall stattfindende Veränderung des Kassakurses beträgt:

$$(19) \quad \Delta S' = S'(t + \Delta t) - S'(t)$$

Die Rendite pro Zeitintervall wird mit  $\mu$  bezeichnet und soll unabhängig vom Einstiegskurs sein. Diese Eigenschaft lautet formal:

$$(20) \quad \frac{\Delta S'}{S'(t) \Delta t} = \mu$$

Links steht die Rendite pro Zeitintervall, die stets einem bestimmten  $\mu$  entspricht, das *unabhängig* vom Einstiegskurs  $S'(t)$  ist.

Läßt man das kleine Zeitintervall gegen Null gehen und bringt  $S'(t)$  auf die rechte Seite, so wird aus Gleichung (20) eine Differentialgleichung in üblicher Darstellung:

$$(21) \quad \frac{dS'}{dt} = \mu S'(t)$$

In differentieller Schreibweise lautet diese Gleichung äquivalent:

$$(22) \quad \frac{dS'}{S'} = \mu dt$$

Die gesuchte Funktion für die zeitliche Wechselkursentwicklung  $S'(t)$  lautet unter Vernachlässigung der unbestimmten Konstanten (Brauner/Geiß, 1990, 170):

$$(23) \quad S'(t) = e^{\mu t}$$

Würde sich der Kassakurs gemäß dieser deterministischen Funktion entwickeln, so wären zwar die Renditen unabhängig von der Höhe des Einstiegskurses, aber die Kursdynamik wäre nicht zufällig, was der Realität widerspräche. Darum addiere man zur rechten Seite der Differenzengleichung (20) einen Term hinzu, der die standardnormalverteilte Zufallsvariable  $\varepsilon$  enthält (Brauner/Geiß, 1990, 418).

$$(24) \quad \frac{\Delta S'}{S'(t) \Delta t} = \mu + \sigma \varepsilon \frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$(25) \quad \frac{\Delta S'}{S'} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$\mu$  darf jetzt als erwartete (!) Rendite pro Zeitintervall bezeichnet werden, welche, wie gewünscht, unabhängig von der Höhe des Einstiegskurses ist. Um dies zu sehen, bilde man den Erwartungswert von Gleichung (24) zum Zeitpunkt  $t$  und nutze aus, daß der Erwartungswert von  $\varepsilon$  annahmegemäß zu jedem Zeitpunkt Null ist.

$$(26) \quad \frac{E_t \left( \frac{\Delta S'}{S'} \right)}{\Delta t} = \mu$$

Eine zweite ökonomisch plausible Eigenschaft der Kursdynamik ist, daß die Renditevarianz pro Zeitintervall kurshöhenunabhängig ist. Öko-

nomisch steckt dahinter, daß die mit einem Devisenengagement verbundene Renditeunsicherheit in ihrem Ausmaß unabhängig von der Höhe des Einstiegskurses ist. Bezeichnet man jene mit  $\sigma^2$  und führt den Varianzoperator  $Var(\cdot)$  zum Zeitpunkt  $t$  ein, so ergibt seine Anwendung auf Gleichung (25) das Folgende:

$$(27) \quad Var_t \left( \frac{\Delta S'}{S'} \right) = \sigma^2 \Delta t \ Var_t (\varepsilon)$$

Um zur Varianz der Rendite pro Zeitintervall zu kommen, nutze man, daß die Varianz von  $\varepsilon$  annahmegemäß gleich eins ist und teile durch das Zeitintervall.

Dies führt zu einem kurshöhenunabhängigen  $\sigma^2$ :

$$(28) \quad \frac{Var_t \left( \frac{\Delta S'}{S'} \right)}{\Delta t} = \sigma^2$$

Da zwei ökonomisch plausible Eigenschaften durch die bisherige Modellierung der Wechselkursdynamik (gemeint sind Gleichung (24) bzw. (25)) erfüllt sind, lohnt sich der Übergang vom anschaulichen Fall diskreter Zeit zum realistischen Fall stetiger Zeit. Abermals geht das kleine Zeitintervall gegen Null. Diesmal ergibt sich jedoch keine deterministische, sondern eine stochastische Differentialgleichung, die den Ausgangspunkt der weiteren Ausführungen bildet:

$$(29) \quad \frac{dS'}{S'} = \mu dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt}$$

Da ab jetzt nur noch der Fall stetiger Zeit betrachtet wird, ändert sich die Sprechweise. Der Ausdruck  $dS'/S'$  wird *Momentanrendite* einer Deviseninvestition zum Zeitpunkt  $t$  genannt. *Ökonomisch* begründet ist diese Namensgebung dadurch, daß ein unendlich kleines Zeitintervall der Länge  $dt$  umgangssprachlich *Moment* genannt wird. Die Wertänderung der Devise in einem *Moment* beträgt  $dS'$ . Setzt man diese *momentane* Wertänderung in das Verhältnis zum eingesetzten Kapital  $S'$ , so ergibt sich eine Rendite von  $dS'/S'$ .

Dementsprechend wird  $\mu$  ab jetzt als *Momentanrenditeerwartung* und  $\sigma^2$  als *Momentanvarianz* der Rendite pro Zeitintervall bezeichnet.

Die durch Gleichung (29) generierte Kursdynamik besitzt nicht nur die beiden oben ökonomisch begründeten Eigenschaften, sondern erfüllt noch weitere ökonomisch plausible Forderungen: Gemäß Gleichung (29)

ist der Übergang von einer Kassakursausprägung zur nächsten zufällig, was *einem* Wesenszug neuer Informationen über wechselkursbedeutsame Ereignisse entspricht. „Neue Informationen können nur zufällig und unerwartet den Markt treffen, da antizipierbare Informationen weder neu noch zufällig sind. Da jedoch Informationen zufällig und unabhängig von früheren Informationen sind, sind demnach auch die Preisveränderungen zufällig und unabhängig von früheren Preisveränderungen“ (Gaab, 1983, 52).

Überträgt man diese Argumentationskette auf die hier betrachteten Devisenkursveränderungen, so ergibt sich aus der Zufälligkeit und Unabhängigkeit von Informationen, daß sich auch die Momentanrenditen unabhängig voneinander und zufällig entwickeln.

*Ökonomisch* impliziert die bisherige Modellierung der Kursdynamik, daß die sogenannte „technische Analyse“ der „Chartisten“ erfolglos ist, da es keine systematischen Zusammenhänge zwischen verschiedenen zufälligen Renditeausprägungen gibt. Konkret: Aus einer fünfmaligen dreiprozentigen Aufwertung des Dollar folgt genausowenig eine sechste Aufwertung, wie aus einem fünfmaligen Würfelwurf mit oben liegender Drei eine sechste Drei folgt.

Daß Gleichung (29) nicht nur eine – wie gesehen – zufällige Entwicklung der Momentanrenditen generiert, sondern zudem die ökonomisch plausible Eigenschaft sich (stochastisch) unabhängig entwickelnder Momentanrenditen besitzt, wird weiter unten geklärt. Beiden Wesenszügen (Zufälligkeit, Unabhängigkeit) neuer Informationen wird somit durch Gleichung (29) Genüge getan.

Daß die sich aus (29) ergebende Wechselkursentwicklung nur nicht-negative Kassakurse generiert, wird ebenfalls weiter unten geklärt.

Die letzte ökonomisch begründete Eigenschaft der Kursdynamik besteht darin, daß Null eine absorbierende Schranke der Wechselkursentwicklung sein muß. Das heißt, daß, sobald  $S'$  Null wird,  $S'$  dort verbleibt.

Nehmen wir einmal an, Null wäre nicht absorbierend. Dann gäbe es „geschenkte Lotterielose“ in Form zu Null erstandener Dollar, da eine Nachschußpflicht ausgeschlossen ist.

Daß Null absorbiert, sieht man, wenn man (29) beidseitig mit  $S'$  multipliziert (Ingersoll, 1987, 351):

$$dS' = \mu S' dt + \sigma S' \varepsilon \sqrt{dt} = 0, \text{ für } S' = 0$$

Einmal bei Null angelangt, ruht der Kurs dort (formal  $dS' = 0$ ).

*Zusammenfassend* läßt sich feststellen, daß die durch die stochastische Differentialgleichung (29) generierte Kursdynamik ökonomisch wünschenswerte Eigenschaften besitzt. Es ist deshalb höchste Zeit zu fragen, ob diese stochastische Differentialgleichung überhaupt eine Lösung hat. Dies wird in den nächsten Abschnitten thematisiert.

Neben dem Hinweis auf die Lösbarkeit der stochastischen Differentialgleichung (29) verfolgen die nächsten Abschnitte zwei weitere Ziele: Zum einen zeigen sie, welche Dichte der Kassakurs zum Zeitpunkt  $T$  besitzt, wenn er sich gemäß Gleichung (29) entwickelt. Damit ist dann der im Binomialmodell vorgeführte Kunstgriff ausführbar, ein am Periodende ( $t = T$ ) fälliges Derivat in einer risikoneutralen Welt zu bewerten, was zu einer verallgemeinerten *Black/Scholes*-Formel führen wird.

Zum anderen führen die nächsten Abschnitte grundlegende Konzepte der „Optionspreismathematik“ sowie die zentrale Rechenregel – das Ito-Lemma – ein, ohne deren Hilfe die verallgemeinerte *Black/Scholes*-Formel von *Garman/Kohlhagen* nicht ermittelbar ist.

### 3. Der Wiener-Prozeß und die Geometrische Brownsche Bewegung

Fraglich ist zunächst, ob der folgende Baustein der stochastischen Differentialgleichung (29) eine Lösung besitzt:

$$(30) \quad dw = \varepsilon \sqrt{dt}, \quad w(0) = 0$$

Ein Blick in die Literatur ergibt, daß die Lösung dieser Gleichung der *normierte „Wiener-Prozeß“* (Fahrmeir et al., 1981, 185) ist, welcher wie folgt definiert ist:

Ein stetiger stochastischer Prozeß  $w = (w(t), t)$  mit den reellen Zahlen als Zustandsraum heißt normierter Wiener-Prozeß genau dann und nur dann, wenn

- $w(0) = 0$
- $w$  hat unabhängige Zuwächse. Das heißt für die Zeitpunkte  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  sind die Zufallsvariablen  $w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_n) - w(t_n - 1)$  unabhängig
- die Zuwächse  $w(t) - w(s)$  sind stationär und normal verteilt mit Erwartungswert Null und Varianz in Höhe von  $t - s$
- die Pfade (Realisationen des Prozesses) sind mit Wahrscheinlichkeit eins stetig.

Der zufällige Teil der Wechselkursentwicklung in der stochastischen Differentialgleichung (29) lautet jedoch:

$$\sigma \varepsilon \sqrt{dt}$$

Deshalb ist zu fragen, ob auch die folgende stochastische Differentialgleichung lösbar ist.

$$(31) \quad dw^* = \sigma \varepsilon \sqrt{dt}, \quad w^*(0) = 0$$

Abermals lautet die Antwort: Ja! Die Lösung ist ein Wiener-Prozeß mit den zuvor angegebenen Eigenschaften a), b) und d). Einzig und allein die Verteilung der Zuwächse in einem Zeitintervall der Länge  $t - s$  hat sich geändert. Selbige sind zwar immer noch normalverteilt mit Erwartungswert Null, haben aber eine Varianz in Höhe von  $\sigma^2(t - s)$  (Ingersoll, 1987, 355). Dies wird als Eigenschaft c\*) bezeichnet.

Addiert man zu Gleichung (31) den deterministischen Term  $\mu dt$  hinzu, so ist man wieder bei der stochastischen Differentialgleichung (29). Deren Lösung (welche die Kassakursentwicklung modelliert) trägt den Namen Geometrische Brownsche Bewegung.

Die Unabhängigkeit der Zuwächse von  $w^*(t)$  überträgt sich auf die Entwicklung der Momentanrenditen  $dS'/S'$ , so daß einem Wesensmerkmal neuer Informationen durch das Modell Rechnung getragen wird.

Auch die Stetigkeit von  $w^*$  überträgt sich auf die Realisationen des Wechselkursprozesses, so daß eine Wechselkursentwicklung ohne Sprünge durch (29) generiert wird.

Wie die Verteilung der Zuwächse des Kassakurses aussieht, wenn er Geometrischer Brownscher Bewegung folgt (also Gleichung (29) gehorcht), wird weiter unten thematisiert. Das dazu nötige Instrumentarium wird im nächsten Abschnitt eingeführt.

Weitere Details über die genannten stochastischen Prozesse finden sich bei Bauer (1991), Oskendal (1985), Chung (1974) und Weizsäcker/Winkler (1990).

#### 4. Itos Lemma für die Geometrische Brownsche Bewegung

Man betrachte eine Funktion  $z(S', t)$ , die jedem Zeitpunkt  $t$  mitsamt des dann geltenden Kassakurses  $S'(t)$  einen Wert zuordnet und deren folgende Ableitungen existieren und stetig sind:

$$z_t, z_{S'}, z_{S'S'}$$

Statt – wie eigentlich möglich – das Lemma für allgemeine Ito-Prozesse zu formulieren, wird es nur für den hier verwandten speziellen Ito-Prozeß – die Geometrische Brownsche Bewegung – angegeben. Eine allgemeine Behandlung bieten *Brock* und *Malliaris* (1982, 81).

*Ito's Lemma* (nach *Hull*, 1989, 82). Folgt  $S'$  Geometrischer Brownscher Bewegung und ist  $z(S', t)$  eine deterministische Funktion mit den zuvor angegebenen Eigenschaften, so ist  $z(\cdot)$  ein stochastischer Prozeß, der die folgende stochastische Differentialgleichung löst:

$$dz = (z_{S'} \mu S' + z_t + 0,5 z_{S'S'} \sigma^2 S'^2) dt + z_{S'} \sigma S' dw$$

Einen Beweis findet man bei *Brock* und *Malliaris* (1982) oder *Smith* (1974). Eine Intuition findet sich im Anhang I.

#### 5. Die Dichte für den zukünftigen Wechselkurs

Gefragt wird, welche Dichte für den Kassakurs  $S (= S'(T))$  zum Zeitpunkt  $T$  gilt, wenn die Kursdynamik Gleichung (29) gehorcht und der Betrachtungszeitpunkt in  $t = 0$  liegt. Die Antwort lässt sich leichter finden, wenn man sich zunächst der zeitlichen Entwicklung des natürlichen Logarithmus des Wechselkurses  $S'$  zuwendet. Statt  $S'(t)$  wird deshalb  $\ln S'(t)$  betrachtet und zunächst die Dichte für den logarithmierten Kassakurs  $\ln S'(T) = \ln S$  ermittelt. Ausgangspunkt ist eine äquivalente Formulierung von Gleichung (29):

$$(32) \quad dS' = \mu S' dt + \sigma \varepsilon S' \sqrt{dt} \\ \text{mit } S'(0, \cdot) = S^\circ$$

Dieser Vorschrift folgt der Kassakurs  $S'(t)$ . Welcher Vorschrift folgt sein natürlicher Logarithmus  $\ln S'$ ?

Die Antwort gibt Itos Lemma, indem man die Funktion  $z(S', t)$  zu  $\ln S'$  konkretisiert. Ableiten ergibt konkret:

$$z_t = 0, \quad z_{S'} = \frac{1}{S'}, \quad z_{S'S'} = -\frac{1}{S'^2}, \quad \text{für } z(S'; t) = \ln S'$$

Einsetzen in Itos Lemma führt zu:

$$(33) \quad d \ln S' = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + dw^*$$

Damit ist man fast am Ziel, denn über den durch das stochastische Differential  $dw^*$  definierten Wienerprozess weiß man, daß laut Eigenschaft  $c^*$ ) der Zuwachs  $w^*(T) - w^*(0)$  normalverteilt ist mit Erwartungswert Null und Varianz von  $(T - 0)\sigma^2 = \sigma^2 T$ . Bezeichnet man wie gewöhnlich die Normalverteilungsdichte durch  $n(., .)$ , mit den Parametern Erwartungswert und Varianz, so gilt wegen Eigenschaft  $c^*$ ):

$$\text{Dichte von } w^*(T) - w^*(0) = n(0, \sigma^2 T)$$

Deshalb interessiert nur noch der deterministische Wachstumsterm (vor dem Pluszeichen in (33)), der lediglich den Erwartungswert der soeben benannten Dichte des Zufallsterms verschiebt.

Ignoriert man den zufälligen Teil der Kassakursdynamik und betrachtet  $\ln S(t) - \ln S(0)$  ohne den Wiener-Prozeß, so ergibt sich nach Aufsummieren der vielen kleinen Veränderungen (formal *Riemann*-Integration über  $d \ln S'$ ):

$$(34) \quad \begin{aligned} \int_0^T d \ln S' &= \ln S'|_0^T = \int_0^T \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt \Leftrightarrow \\ \ln S'(T) - \ln S'(0) &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t|_0^T \\ &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \end{aligned}$$

Nimmt man nun wieder den zufälligen Teil der Wechselkursentwicklung hinzu, so ergibt sich für die Verteilung von  $\ln S'(T) - \ln S'(0)$ , daß sie durch die folgende – verschobene – Normalverteilungsdichte beschrieben wird:

$$(35) \quad \text{Dichte von } \ln \left( \frac{S}{S^*} \right) = n \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 t \right)$$

Für die Dichte von  $\ln S$  gilt nach einer einfachen Umformung:

$$(36) \quad \text{Dichte von } \ln S = n \left( \ln S^\circ + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right)$$

Der logarithmierte Kassakurs  $\ln S$  zum Zeitpunkt  $T$  ist normalverteilt mit der Dichte aus (36). Aus diesem Grunde nennt man den absoluten Kassakurs  $S$  zum Zeitpunkt  $T$  eine lognormalverteilte Zufallsvariable.

In Anlehnung an *Mood et al.* (1974, 117) ergibt sich die Dichte für den absoluten Kassakurs  $S$  durch bloßes Umrechnen als:

$$(37) \quad \begin{aligned} \text{Dichte von } S = f(S) &= \xi e^{-\chi} \\ \text{mit } \chi &= \frac{[\ln S - (\ln S^\circ - (\mu - \sigma^2/2)T)]^2}{2\sigma^2 T} \\ \text{und } \xi &= \frac{1}{S\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber seien Varianz und Erwartungswert des Kassakurses  $S$  aus Sicht des Zeitpunkts Null erwähnt. Der Erwartungswert aus Sicht des Zeitpunkts Null lautet:

$$(38) \quad E^\circ(S) = S^\circ e^{\mu T}$$

Die dazugehörige Varianz ist:

$$(39) \quad \text{Var}^\circ(S) = S^{\circ 2} e^{2\mu T} [e^{\sigma^2 T} - 1]$$

Nach diesem Überblick über einige wichtige Zusammenhänge versteht man *Black/Scholes* (1973, 640), wenn sie folgern: „The stock price follows ... (geometric brownian motion, F.B.L.). Thus the distribution of possible stock prices at the end of any finite interval is lognormal“.

Schließlich wird verständlich, warum  $\sigma^2$  als Varianz der Jahresrendite aus einer Deviseninvestition bezeichnet wird. Dazu fixiere man  $T$  auf eins, so daß  $S$  zum Kurs in einem Jahr wird. Die *stetige* Jahresrendite  $\eta$  ist implizit definiert via:

$$(40) \quad S = S^\circ e^\eta$$

Elementare Umformungen ergeben:

$$(41) \quad \ln S - \ln S^\circ = \eta$$

Die stetige Jahresrendite ist somit normalverteilt mit der Dichte aus (35). Bankpraktiker bevorzugen die Standardabweichung  $\sigma$  und nennen sie „die Volatilität“ der Jahresrendite einer Dollarinvestition. Man sieht,

daß die Varianz der Momentanrendite und die Varianz der Jahresrendite identisch sind.

Dies gilt jedoch nicht für die erwarteten Renditen. Die erwartete stetige Jahresrendite lautet nämlich nicht  $\mu$ , sondern  $(\mu - \sigma^2/2)$  und fällt deshalb geringer aus als jene. Dies wird im Anhang I thematisiert.

#### IV. Die Garman/Kohlhagen-Differentialgleichung

Mit der Geometrischen Brownschen Bewegung steht ein ökonomisch plausibles Modell der Kursdynamik in stetiger Zeit zur Verfügung. Im Abschnitt II. gab es über die Derivatlaufzeit hinweg konstante Periodenzinssätze, denen im zeitstetigen Fall die stetigen Zinssätze  $r$  (Inland) und  $r^*$  (Ausland bzw. U.S.A.) entsprechen.

Nahezu analog zum zweiten Abschnitt wird eine Differentialgleichung ermittelt, der jedes Derivat bei Arbitragefreiheit unter der Annahme der Existenz eines risikolosen und selbstfinanzierenden Portfolios genügen muß. Anders als im zweiten Abschnitt ergibt sich unmittelbar keine explizite Lösung für den arbitragefreien Wert des Derivats, sondern nur eine Bedingung, der der Derivatwert zu jedem Zeitpunkt  $t$  genügen muß.

Weiterhin besteht die Modellwelt aus den vier eingangs eingeführten Instrumenten. Die beiden Zerobonds haben zum Zeitpunkt  $T$  den Wert einer DM bzw. eines US-Dollars.

Der Wert des inländischen Zerobonds zum Zeitpunkt  $t$  wird mit  $B(t)$  bezeichnet:

$$(42) \quad B(t) = e^{-(T-t)r} = e^{(t-T)r}$$

Seine momentane (Kurs-) Wertänderung  $dB(t)$  erhält man, indem man nach  $t$  ableitet.

$$(43) \quad \frac{dB(t)}{dt} = B(t)r$$

Als Kurzschrift für  $B(t)$  wird analog zum Kassakurs der Devise  $B'$  eingeführt. Gleichung (43) lautet in differentieller Schreibweise äquivalent:

$$(44) \quad dB' = rB'dt$$

Es wird unterstellt, daß sich der Kassakurs so verhält, als ob er Geometrischer Brownscher Bewegung folgt:

$$(45) \quad dS' = \mu S' dt + \sigma S' dw$$

Wie schon im Abschnitt II. wird ein unspezifiziertes Devisenderivat betrachtet, dessen Wert  $Z$  definitionsgemäß eine zeitpunktbezogene Funktion des Kassakurses  $S'$  ist. Formal wird unterstellt, daß  $Z = Z(S', t)$  ist. Um Itos Lemma anwenden zu können, wird zudem gefordert, daß die dort aufgeführten Ableitungseigenschaften bezüglich  $Z$  gegeben sind. Nach Anwendung des Lemmas ist die momentane Wertentwicklung des Derivats bekannt und lautet:

$$(46) \quad \begin{aligned} dZ &= \mu^* dt + Z_{S'} \sigma S' dw \\ \mu^* &\equiv Z_{S'} \mu S' + Z_t + 0,5 Z_{S'S'} \sigma^2 S'^2 \end{aligned}$$

Anders als im einperiodigen Binomialmodell wird die *Zusammensetzung eines Portfolios zum Zeitpunkt t* durch drei zeitabhängige Funktionen  $a(t)$ ,  $b(t)$  und  $c(t)$  angegeben, wobei analog zum Kassakurs der Devise die Kurzschrift  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  eingeführt wird.  $a'$  bezeichnet wie zuvor die Anzahl der Einheiten des inländischen Zerobond,  $b'$  die Anzahl der Derivateinheiten und  $c'$  die Anzahl der Einheiten Devise.

Vorausgesetzt wird im folgenden, daß es ein Portfolio aus allen vier Instrumenten gibt, das sich zu jedem Zeitpunkt selbst finanziert und *momentan risikolos* ist.

*Selbstfinanzierung* bedeutet, daß die folgende Gleichung zu jedem Zeitpunkt  $t$  erfüllt ist:

$$(47) \quad a' B' + b' Z + c' S' = 0$$

Im Gegensatz zu Gleichung (1) gilt Gleichung (47) nicht nur zum Zeitpunkt Null. Weil sich  $S'$  wie in der Realität so auch im Modell ständig ändert, ändert sich auch die Zusammensetzung des selbstfinanzierenden Portfolios zu jedem Zeitpunkt, da laufend Umschichtungen zwischen den Positionen stattfinden müssen, die jedoch per saldo aufwendungsneutral geschehen. Diese Bemerkung wird weiter unten nochmals aufgegriffen.

Die Formalisierung der *momentanen Risikolosigkeit* erfordert diesmal etwas Vorarbeit. Bezeichnet man die momentane Wertänderung des selbstfinanzierenden und risikolosen Portfolios mit  $dY$ , so gilt:

$$(48) \quad dY = a' dB' + b' dZ + c' dS'$$

Einsetzen von (44), (46) und (45) sowie Berücksichtigung der momentanen ausländischen Festverzinsung der Devisenposition ergibt:

$$(49) \quad dY = a' r B' dt + b' [\mu^* dt + \sigma Z_{S'} S' dw] + c' [(\mu + r^*) S' dt + \sigma S' dw]$$

Die einzige Zufallsvariable in der stochastischen Differentialgleichung (49) ist das stochastische Differential  $dw$ . Risikolosigkeit zu generieren, bedeutet somit – formal betrachtet – nichts anderes, als die  $dw$  enthaltenden Terme per Saldo gleich Null zu setzen:

$$(50) \quad b' \sigma Z_{S'} S' dw + c' \sigma S' dw = 0$$

Gleichung (50) korrespondiert zwar zur Gleichung (2), muß jedoch angesichts eines Kontinuums möglicher Wechselkursausprägungen anders vorgehen, um der Risikolosigkeit Ausdruck zu verleihen.

Da dem Portfolio unterstellt wird, momentan risikolos zu sein, gleicht die erwartete der tatsächlichen momentanen Wertänderung. *Arbitragefreiheit* impliziert, daß die momentane Wertänderung des zu jedem Zeitpunkt  $t$  „kostenlosen“ Portfolios Null sein muß, da sonst ein geschenktes Lotterielos vorläge. Damit gilt, daß die zu einem Zeitpunkt  $t$  erwartete Wertänderung des Portfolios Null sein muß.

Da zu allen Zeitpunkten der Erwartungswert von  $\epsilon$  annahmegemäß Null ist, ist auch der Erwartungswert von  $dw$  gleich Null (siehe Abschnitt III.). Die  $dw$  enthaltenden Terme sind deshalb uninteressant für das Zu-Null-setzen der Renditeerwartung.

Relevant sind die verbleibenden Terme aus (49). Die erwartete momentane Wertänderung des Portfolios ist genau dann Null, wenn die folgende Gleichung gilt:

$$(51) \quad a' r B' + b' \mu^* + c' (\mu + r^*) S' = 0$$

*Behauptung 2:* Gegeben die Existenz eines momentan risikolosen und selbstfinanzierenden Portfolios aus allen vier Instrumenten, so läßt sich der arbitragefreie Wert  $Z$  eines Devisenderivats zu jedem Zeitpunkt  $t$  unabhängig von den Risikopräferenzen der Marktteilnehmer bestimmen.

*Beweis.* Die Gleichungen (47), (50) und (51) bilden ein Drei-Gleichungssystem in den Unbekannten  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , von dem vorausgesetzt wird, daß es eine nicht-triviale Lösung  $a^*(t)$ ,  $b^*(t)$  und  $c^*(t)$  hat. Analog zum Abschnitt II. und in Anlehnung an Merton (1973) wird argumentiert, daß deshalb eine der drei Gleichungen überflüssig ist. Abermals erzeuge man die Koeffizienten der ersten Gleichung des Systems (das ist diesmal (47)) durch die Koeffizienten der beiden anderen. Die „Lambda“-Faktoren sind nun ebenfalls Funktionen in stetiger Zeit und erhalten deshalb einen Strich.

$$(52) \quad B' = \lambda'_{(50)} 0 + \lambda'_{(51)} r B'$$

$$(53) \quad Z = \lambda'_{(50)} \sigma Z_{S'} S' d w + \lambda'_{(51)} \mu^*$$

$$(54) \quad S' = \lambda'_{(50)} \sigma S' d w + \lambda'_{(51)} (\mu + r^*) S'$$

Aus Gleichung (52) ergibt sich:

$$(55) \quad \lambda'_{(51)} = \frac{1}{r}$$

Dies in Gleichung (54) eingesetzt ergibt:

$$(56) \quad \lambda'_{(50)} = \frac{1 - \frac{\mu + r^*}{r}}{\sigma d w}$$

Einsetzen von (55) und (56) in (53) ergibt zunächst:

$$(57) \quad Z = \left(1 - \frac{\mu + r^*}{r}\right) Z_{S'} S' + \frac{\mu^*}{r}$$

Beidseitige Multiplikation mit  $r$  führt nach elementaren Vereinfachungen auf die *Garman/Kohlhagen*-Differentialgleichung, die wie folgt lautet:

$$(58) \quad \frac{1}{2} Z_{S' S'} \sigma^2 S'^2 + (r - r^*) S' Z_{S'} + Z_t - r Z = 0$$

Diese Differentialgleichung muß bei Arbitragefreiheit und unter der Voraussetzung der Existenz eines momentan risikolosen und selbstfinanzierenden Portfolios vom Derivatwert  $Z(S', t)$  erfüllt werden. Sie enthält nur Parameter, die unabhängig von den Risikoneigungen der Marktteilnehmer sind. q.e.d.

Ein Vergleich mit der expliziten Lösung (9) aus dem einperiodigen Binomialmodell lohnt sich. In beiden Fällen sind alle Parameter unabhängig von den Risikoneigungen der Marktteilnehmer. Die Zinssätze für risikolose Anlagen ( $pr, pr^*$  bzw.  $r, r^*$ ) weisen diese Eigenschaft qua Definition auf. Die Streuung der zukünftigen Dollar-Kurse ist ebenfalls unabhängig von der Risikoneigung der Marktteilnehmer. Damit sind die Parameter  $u$  und  $d$  (aus dem Binomialmodell) beziehungsweise  $\sigma$  angesprochen, die jeweils die Streuungsbreite zukünftiger Kurse formalisieren. Genauso wie im einperiodigen Binomialmodell spielen Renditeerwartungen keine Rolle, da die Parameter  $\mu$  und  $\mu^*$  (das ist die Renditeerwartung

aus einem Derivatengagement) in der Differentialgleichung nicht mehr auftauchen.

Bislang wurde lediglich vorausgesetzt, daß das Drei-Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung  $a^*(t)$ ,  $b^*(t)$ ,  $c^*(t)$  hat, ohne explizit die Zusammensetzung des Portfolios anzugeben. Da das Portfolio durch die zwei konstituierenden Eigenschaften Selbstfinanzierung (Gleichung (47)) und momentane Risikolosigkeit (Gleichung (50)) vollständig charakterisiert ist, benötigt man für die Bestimmung seiner Zusammensetzung nur die zwei genannten Gleichungen.  $a^*(t)$ ,  $b^*(t)$  und  $c^*(t)$  ergeben sich somit aus nur zwei Gleichungen, womit ein unterbestimmtes Gleichungssystem vorliegt. Die Unterbestimmtheit des Portfoliogleichungssystems nutzend, wird  $b^*(t)$  willkürlich auf  $-1$  fixiert. *Ökonomisch* wird somit eine Situation betrachtet, in der zum Zeitpunkt Null eine Einheit Derivat emittiert wird und diese Verbindlichkeit nicht vorzeitig glattgestellt wird, so daß man  $b^*(t) = -1$  in die Portfoliogleichungen einsetzen darf. Für Gleichung (50) (Risikolosigkeit) bedeutet dies:

$$(59) \quad -\sigma Z_{S'}(S', t) S' \mathrm{d}w + c^*(t) \sigma S' \mathrm{d}w = 0$$

wobei diesmal die Argumente der Ableitung von  $Z$  nach  $S'$  ausgeschrieben wurden. Konkret ergibt sich  $c^*(t)$  nach einer einfachen Umformung als:

$$(60) \quad c^*(t) = Z_{S'}(S', t)$$

Will man das Portfolio mit dem geschriebenen Derivat *momentan risikolos* halten, so muß eine Devisenposition von  $c^*(t)$  eingenommen werden. Dadurch wird die zufällige Wertänderung „ $\mathrm{d}w$ “ aus der Derivatemission durch eine gegenläufige zufällige Wertänderung in gleicher Höhe bei der Devisenposition neutralisiert.  $c^*(t)$  wird das *Delta des Derivats* genannt.

Die Position im inländischen Zerobond zum Zeitpunkt  $t$  wurde mit  $a^*(t)$  bezeichnet und ergibt sich nach Einsetzen von (60) in (47) – *Stichwort: Selbstfinanzierung* – als:

$$(61) \quad a^*(t) = [Z(S', t) - Z_{S'} S'] \frac{1}{B'(t)}$$

*Ökonomische Interpretation:* Baut man das Portfolio zu jedem Zeitpunkt  $t$  gemäß  $a^*(t)$ ,  $b^*(t) = -1$ ,  $c^*(t)$ , so hedget man die Derivatemission durch den „Kauf eines synthetischen Derivats“.  $a^*(t)$  und  $c^*(t)$  schreiben die Strategie vor, vermöge derer die Wertentwicklung eines in

$t = 0$  gekauften Derivats exakt nachgebildet wird. Damit die Duplikation eines Derivats in stetiger Zeit erfolgreich vollzogen werden kann, ist es nötig, daß die Handelsmöglichkeiten erlauben,  $a^*(t)$  und  $c^*(t)$  zu jedem Zeitpunkt an ihren vorgeschriebenen Wert anzupassen (die Vorschriften stehen in (61) und (60), gegeben ein willkürliches  $b^* = -1$ ).

Anders als im einperiodigen Binomialmodell gilt nicht „hedge and forget“ („buy (sale) and hold“), sondern eine dynamische Hedgestrategie ist erforderlich, um Selbstfinanzierung und momentane Risikolosigkeit zu erhalten.

Formal sieht man dies daran, daß  $a^*(t)$  und  $c^*(t)$  Funktionen von  $S'(t)$  sind. Da sich der Devisenkurs  $S'(t)$  im Zeitablauf ständig ändert, ändern sich auch von  $S'(t)$  abhängige Funktionen.

Bevor analog zum Binomialmodell der arbitragefreie Putwert  $P^*$  bestimmt wird, sei auf den Zusammenhang zum *Black/Scholes*-Modell (1973) hingewiesen. Setzt man in der *Garman/Kohlhagen*-Differentialgleichung (58) den Auslandszinssatz  $r^*$  gleich Null und interpretiert  $S'$  als den Kassakurs einer während der Optionslaufzeit dividendenlosen Aktie und  $Z$  als den Wert eines europäischen Call (Put) auf diese Aktie, so sieht man sich dem Modell von *Black/Scholes* (1973, 643) gegenüber. Ergänzt man nun noch die Randbedingung für den Aktiencall (Put) zum Zeitpunkt  $T$ , welche lautet: Callwert zum Zeitpunkt  $T = \max(0, S - A)$  (Putwert =  $\max(0, A - S)$ ), und macht eine „geschickte“ Variablensubstitution in der *Black/Scholes*-Differentialgleichung (58), so ergibt sich die sogenannte Wärmeleitungsgleichung der Physik. Für selbige existiert bereits eine analytische Lösung, welche sofort zur legendären *Black/Scholes*-Formel führt.

Details zu diesem Lösungsansatz finden sich bei *Black* und *Scholes* (1973) sowie *Meinhold/Wagner* (1983). Damit ist ein möglicher Weg der Bestimmung arbitragefreier Devisenoptionswerte vorgezeichnet. Für Ökonomen allemal einsichtiger ist ein anderer Ansatz zur Bestimmung des arbitragefreien Devisenputwertes, der nun folgt.

## V. Die Garman/Kohlhagen-Formel

Mit Behauptung 2 wurde festgestellt, daß sich der arbitragefreie Wert  $Z$  eines Devisenderivats zu jedem Zeitpunkt  $t$  unabhängig von den Risikopräferenzen der Marktteilnehmer bestimmen läßt. Wenn somit die Lösung  $Z$  der *Garman/Kohlhagen*-Differentialgleichung (58) unabhängig von Risikoneigungen ist, so ist diese Lösung gleichermaßen gültig für

41\*

risikoaverse, risikofreudige und risikoneutrale Welten. In diesem Fall darf man abermals den auf Cox/Ross (1976) zurückgehenden Kunstgriff anwenden und sich in die analytisch einfachste Welt hineinversetzen, um  $Z$  dort als Gleichgewichtswert zu bestimmen.

In einer risikoneutralen Welt gilt im Gleichgewicht für  $P^\circ$  in Analogie zum einperiodigen Binomialmodell (siehe Gleichung (14)):

$$(62) \quad P^\circ = e^{-rT} E^* (\max (0, A - S))$$

wobei  $S$  den zufälligen Kassakurs zum Ausübungszeitpunkt  $T$  und  $A$  den Ausübungskurs des Put bezeichnet.  $E^* (.)$  steht weiterhin für den Erwartungswertoperator, der von risikoneutralen Individuen zum Zeitpunkt Null eingesetzt wird. Wie schon im Binomialmodell benötigt man zur Ausführung von  $E^* (.)$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung für  $S$ , die in einer imaginären risikoneutralen Welt herrscht. Es wird sich zeigen, daß die Berechnung von (62) zur Garman/Kohlhagen-Formel für Devisenoptionen führt, die die Black/Scholes-Formel für Aktienoptionen als Spezialfall (mit  $r^* = 0$ ) enthält. Nach diesem Ausblick auf den „Lösungsweg“ werden die der Formel zugrundeliegenden Annahmen aufgelistet und kommentiert:

*Annahme 1:* Der Kassakurs  $S'$  entwickelt sich so, als ob er Geometrischer Brownscher Bewegung folgt.

Die Devisen-, Options- und Zerobondmärkte sind friktionslos und gestatten zu jedem Zeitpunkt  $t$  Käufe und Leerverkäufe.

Diese Annahme gewährleistet die Existenz eines risikolosen und selbstfinanzierenden Portfolios. Anders ausgedrückt: Es ist möglich, das unspezifizierte Derivat aus den anderen Instrumenten zu synthetisieren (Details bei Müller, 1985).

*Annahme 2:* Die stetigen Zinssätze  $r, r^*$  sind während der Laufzeit des Derivats konstant.

*Annahme 3:* Alle Marktteilnehmer sind sich über  $\sigma$  einig.

Die Momentanrenditeerwartung  $\mu$  aus einem Devisenengagement darf von Investor zu Investor unterschiedlich sein. Diese „Individualität“ überträgt sich auf die Renditeerwartung  $\mu^*$  aus einem Engagement am Derivatmarkt. Dies bedeutet, daß beide Märkte im Ungleichgewicht sein dürfen. Natürlich gilt die folgende Behauptung auch für Situationen, in denen die Marktkräfte für einheitliche  $\mu$  und  $\mu^*$  gesorgt haben. Deshalb läßt sich die Garman/Kohlhagen (Black/Scholes-)Formel auch alternativ aus Gleichgewichtsmodellen wie dem Capital Asset Pricing Model herleiten.

ten. Die Annahme eines Gleichgewichts ist jedoch nur *hinreichend und nicht notwendig* und wird hier nicht benötigt.

*Behauptung 3:* Gegeben die Annahmen 1 bis 3, so lautet der arbitragefreie Wert eines europäischen Devisenput zum Zeitpunkt Null wie folgt:

$$P^{\circ} = e^{-r^* T} S^{\circ} [N(x + \sigma\sqrt{T}) - 1] - e^{-rT} A [N(x) - 1]$$

$$\text{mit } x = [\ln(S^{\circ}/A) + (r - r^* - 0,5\sigma^2)T] \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}$$

wobei  $N(x)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

*Beweis.* Ausführen von Gleichung (62) ergibt die Behauptung. Die aufwendigen Umformungen finden sich im Anhang II. q.e.d.

*Ein Beispiel:* Wie seit Behauptung 2 und dank der Vorübungen im Binomialmodell zu erwarten war, enthält die Formel für  $P^{\circ}$  keine risikoneigungsabhängigen Parameter. Einigkeit unter den Marktteilnehmern muß lediglich bezüglich der Streuung der zukünftigen Kurse bestehen. Um die Nähe zum Binomialmodell zu vertiefen, wird das Eingangsbeispiel konkret durchgerechnet. Es galt folgende Parameterkonstellation:

$$A = 1,6 \text{ DM/\$}; S^{\circ} = 1,5 \text{ DM/\$}; T = 1; \sigma = 0,2 \text{ p.a.}; pr = 0,2 \text{ p.a.}; pr^* = 0,1 \text{ p.a.}$$

Die diskreten Zinssätze  $pr$  und  $pr^*$  müssen in stetige Zinssätze umgewandelt werden. Bei stetiger Verzinsung wird häufiger als „jede Sekunde“ verzinst. Deshalb gibt es hier einen Zinseszinseffekt dahingehend, daß die stetigen Jahreszinssätze unterhalb der diskreten bei einmaliger Verzinsung p.a. liegen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} r &= \ln(1,2) = 0,1823 \\ r^* &= \ln(1,1) = 0,0953 \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt ein  $P^{\circ}$  von 0,0929475 DM. Der Unterschied zum einperiodigen Binomialmodell beträgt weniger als einen Pfennig und verschwindet mit zunehmender Periodenzahl im Binomialmodell (hierzu Cox/Ross/Rubinstein, 1979).

*Behauptung 4:* Unter den Annahmen 1 bis 3 gilt für den arbitragefreien Wert eines Devisencall zum Zeitpunkt Null:

$$C^{\circ} = e^{-r^* T} S^{\circ} N(x + \sigma\sqrt{T}) - e^{-rT} A N(x)$$

mit  $x$  wie zuvor und  $C^{\circ}$  als Bezeichnung für den Callwert.

Beweis. Durch Einsetzen von  $P^\circ$  (laut Behauptung 3) in die allgemein bekannte Put-Call-Parität (Hull, 1989):

$$P^\circ = C^\circ - e^{-r^* T} S^\circ + e^{-r T} A$$

q.e.d.

Selbstverständlich gelten die beiden Formeln (Behauptungen 3 und 4) nicht nur für den Beginn der Laufzeit, das heißt zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Sollte die Laufzeit des Derivats bereits etwas verstrichen sein ( $t > 0$ ), so definiere man den Betrachtungszeitpunkt als Null und  $T$  als die dann vorhandene Restlaufzeit der Option. Formal erhält man den arbitragefreien Put (Call-)Wert zum Zeitpunkt  $t > 0$ , indem man  $S^\circ$  durch den dann bekannten Kassakurs und  $T$  durch die verbleibende Restlaufzeit  $T - t$  ersetzt.

Schließlich seien noch die Deltawerte für die europäischen Devisenoptionen zum Zeitpunkt Null angegeben. Zunächst das Calldelta:

$$C^\circ_{S^\circ}(S^\circ, 0) = e^{-r^* T} N(x + \sigma \sqrt{T})$$

Um an das Delta des Put zu kommen, leite man die Put-Call-Parität nach  $S^\circ$  ab:

$$P^\circ_{S^\circ} = C^\circ_{S^\circ} - e^{r^* T}$$

Einsetzen des Calldelta ergibt das Putdelta:

$$P^\circ_{S^\circ} = e^{-r^* T} [N(x + \sigma \sqrt{T}) - 1]$$

Mit Hilfe der obigen „Neudefinition“ des Betrachtungszeitpunktes kommt man zu jedem Zeitpunkt in den Besitz des Derivatdeltas  $c^*(t)$  für den Fall der Devisenoptionen. Daraus wiederum ergibt sich durch Einsetzen  $a^*(t)$ , so daß das selbstfinanzierende und momentan risikolose Portfolio keine Unbekannte mehr ist. Anders ausgedrückt: Den Emittenten von europäischen Devisenoptionen kann konkret gesagt werden, wie sie ihre Verbindlichkeit perfekt hedgen können.

Die beim Übergang vom Modell zur Realität auftretenden Probleme werden etwa bei Hull (1989) diskutiert.

## VI. Schlußbemerkung

Sinn und Zweck der vorliegenden Arbeit war eine Einführung in die klassische Vorgehensweise der Optionspreistheorie. Ein Blick auf neuere Entwicklungen enthüllt, daß sich die Geometrische Brownsche Bewegung als Kursdynamik immer noch höchster Beliebtheit erfreut, und daß der Kunstgriff risikoneutraler Bewertung geradezu zum Standardlösungsweg geworden ist.

### Anhang I: Itos Lemma

Die aufmerksame Leserschaft wird sich fragen, warum sich die Suche nach der Differentialgleichung für  $d \ln S'$  nicht mit dem Verweis auf folgende Beziehung aus der deterministischen Analysis beenden läßt:

$$(A1) \quad \frac{d \ln S'}{dt} = \frac{1}{S'} \frac{dS'}{dt} \Leftrightarrow$$

$$(A2) \quad d \ln S' = \frac{dS'}{S'}$$

Damit würde sich nämlich sofort ergeben:

$$(A3) \quad d \ln S' = \mu dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt}$$

Leider ist dies falsch. Richtig ist vielmehr:

$$(A4) \quad d \ln S' = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt}$$

Offensichtlich ist die Momentanrenditeerwartung in (A4) geringer als in (A3), was dazu führt, daß die erwartete Momentanrendite einer Dollarinvestition höher als die erwartete *stetige* Jahresrendite ausfällt (siehe Ende von Abschnitt III.).

Hinter all dem steht Itos Lemma, das nun mit einer Intuition versehen wird. Zunächst werden zwei Resultate aus der Mathematik vorweggeschickt:

*Lemma (Smith, 1979):*  $d w^2$  und  $d w dt$  haben eine Varianz von Null.

Deshalb kann man  $d w^2$  und  $d w dt$  exakt ausrechnen, indem man den Erwartungswertoperator  $E(.)$  anwendet. Man erinnere, daß der Erwar-

tungswert einer deterministischen Größe gleich der Größe selbst ist. Konkret gilt also:

$$(A5) \quad dw^2 = E(dw^2) = E(\varepsilon^2)dt = Var(\varepsilon)dt = dt$$

$$(A6) \quad dwdt = E(dw)dt = 0 dt = 0$$

wobei lediglich die Standardnormalverteilungseigenschaften von  $\varepsilon$  und das Lemma ausgenutzt wurden.

Nun betrachte man in Anlehnung an *Hull* (1989) eine Taylorentwicklung von  $Z(S', t)$

$$(A7) \quad Z(S'(t + \Delta t), t + \Delta t) = Z(S'(t), t) + Z_{S'} \Delta S' + Z_t \Delta t + 0,5 Z_{S'S'} (\Delta S')^2 + Z_{S't} \Delta S' \Delta t + 0,5 Z_{tt} (\Delta t)^2$$

die bis zur zweiten Ableitung reicht und deshalb nur approximativ ist (hierzu und für das Weitere: *Chiang*, 1984; *Bronstein/Semendjajew*, 1987).

Man gehe zum totalen Differential über, indem aus sämtliche Differenzen Differentiale werden und nur noch Terme der Größenordnung  $dS'$  und  $dt$  Berücksichtigung finden. Sehr, sehr kleine Ausdrücke mit der Potenz 1,5 oder höher werden also ignoriert.

Offensichtlich enthält der letzte Ausdruck von (A7) keine „großen Terme“, da die quadratische Zeitdifferenz im Grenzübergang zu  $dt^2$  wird.

Ebenso offensichtlich sind die ersten beiden Differenzen in (A7) groß genug, um Berücksichtigung im totalen Differential zu finden. Sie gehen gegen  $dS'$  und  $dt$ .

Wie es sich mit den übrigen Termen verhält, ist nicht evident. Deshalb schreibe man selige aus:

$$(A8) \quad (\Delta S')^2 = (\mu S' \Delta t)^2 + 2\mu S'^2 \sigma \varepsilon (\Delta t)^{1.5} + (\sigma S')^2 \varepsilon^2 \Delta t$$

und erkenne, daß in der zweiten Zeile von (A8) im Grenzübergang eine Veränderung der Größe  $dt$  auftaucht. Ignorieren „kleinerer“ Terme führt zu:

$$(\Delta S')^2 \approx (\sigma S')^2 \varepsilon^2 \Delta t = (\sigma S')^2 \Delta w^2$$

Durch Ausnutzen von (A5) ergibt sich, daß der Grenzübergang zu  $dS'^2$  konkret zu  $(\sigma S')^2 dt$  führt. Damit muß dieser Ausdruck im totalen Diffe-

rential berücksichtigt werden. Er macht den Unterschied zum deterministischen totalen Differential aus und verschwindet folglich für  $\sigma = 0$ . Ein weiterer Term der Größe  $dt$  im Grenzübergang könnte in

$$(A9) \quad Z_{S't} \Delta S' \Delta t$$

stecken. Ausschreiben ergibt:

$$(A10) \quad \Delta S' \Delta t = \mu S' (\Delta t)^2 + \sigma S' \Delta w \Delta t$$

Nur der letzte Term könnte ein  $dt$  enthalten. Dank (A6) weiß man, daß er im Grenzübergang zu Null wird. Damit ist man in der Lage, den Übergang von der Taylorentwicklung zum totalen Differential zu vollführen:

$$(A11) \quad dZ = Z_{S'} dS' + Z_t dt + 0,5 Z_{S'S'} \sigma^2 S'^2 dt$$

Einsetzen für  $dS'$  gemäß Gleichung (29) ergibt Itos Lemma.

## Anhang II: Berechnung der Garman/Kohlhagen-Formel

Hinweis: Die Rechentechnik orientiert sich an *Loistl* (1991, 185).

Technischer Teil des Beweises: Die Erwartungswertbestimmung in Gleichung (62) geschieht nicht über die Dichte einer risikoaversen Welt, sondern über die einer risikoneutralen Welt. Wie seit Gleichung (37) bekannt, ist die Dichte des absoluten Kassakurses bei Fälligkeit  $f(S)$  eine Funktion von  $\mu$ . Die geforderte Momentanrenditeerwartung bezüglich eines Dollarkaufs beträgt in einer risikoneutralen Welt  $\mu = r - r^*$ . Diese mit einer risikoneutralen Welt konsistente Parameterwahl verwendet man weiter unten.

Zunächst definiere man:

$$(A12) \quad m =: E(\ln S) = \ln S^\circ + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$$

$$(A13) \quad \gamma^2 =: \text{Var}(\ln S) = \sigma^2 T$$

Die durch Gleichung (37) angegebene Dichte für den absoluten Wechselkurs bei Fälligkeit sieht somit wie folgt aus:

$$(A14) \quad f(S) = \frac{1}{S \sqrt{\gamma^2 2\pi}} e^{-0,5 \frac{(\ln S - m)^2}{\gamma^2}}$$

Der Wert des Put bei Fälligkeit ist  $\max(0, A - S)$ . Der Erwartungswert bezüglich dieser Zufallsvariablen lautet allgemein:

$$(A15) \quad E(\max(0, A - S)) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(0, A - S) f(S) dS$$

Da wir uns in eine risikoneutrale Welt hineinversetzen, wird die Dichte  $f(S)$  mit  $\mu = r - r^*$  benutzt, und wir erhalten den Erwartungswertoperator einer risikoneutralen Welt, den man zwecks Unterscheidung  $E^*(.)$  nenne. Man vereinfache (A15) zu:

$$(A16) \quad E^*(\max(0, A - S)) = \int_{-\infty}^A (A - S) f(S) dS = A \int_{-\infty}^A f(S) dS - \int_{-\infty}^A S f(S) dS$$

Ab jetzt wird nur noch die Formulierung des Erwartungswertes  $E^*(\max(0, A - S))$  in der zweiten Zeile von (A16) betrachtet. Das erste Integral in der zweiten Zeile von (A16) wird mit I1 bezeichnet, das zweite mit I2.

In der zu beweisenden Behauptung taucht die Standardnormalverteilung auf. Dies nehme man zum Anlaß, die Zufallsvariable  $\ln S$ , welche in (A12 - 14) auftaucht, zweifach zu transformieren. Zum einen zentriere man ihren Erwartungswert auf Null und zum anderen normiere man ihre Varianz auf eins vermöge:

$$(A17) \quad y = \frac{\ln S - m}{\gamma}$$

Daraus ergeben sich folgende Variablensubstitutionsvorschriften:

$$(A18) \quad S = e^{y\gamma + m}$$

sowie:

$$(A19) \quad dS = e^{y\gamma + m} \gamma dy$$

Befolgen dieser Vorschriften für das erste Integral ergibt:

$$(A20) \quad I1 =: A \int_{-\infty}^A f(S) dS = A \int_{-\infty}^{\frac{\ln A - m}{\gamma}} \frac{1}{e^{y\gamma + m} \sqrt{\gamma^2 2\pi}} e^{-0.5y^2} e^{y\gamma + m} \gamma dy$$

Elementare Vereinfachungen ergeben:

$$(A21) \quad I1 = A \int_{-\infty}^{\frac{\ln A - m}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5y^2} dy$$

Die nun zu integrierende Funktion entpuppt sich als Standardnormalverteilungsdichte. Deren Verteilungsfunktion  $N(\cdot)$  hat folgende Symmetrieeigenschaft:

$$N(\cdot) = 1 - N(-\cdot) \Leftrightarrow N(\cdot) - 1 = -N(-\cdot)$$

Deshalb lässt sich das Integral I1 wie folgt schreiben

$$(A22) \quad I1 = -A \left[ N\left(-\frac{\ln A - m}{\gamma}\right) - 1 \right] = \\ -A \left[ N\left(\frac{\ln S^* + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \ln A}{\sigma\sqrt{T}}\right) - 1 \right]$$

Jetzt erst benutze man die Risikoneutralität, indem  $\mu$  gleich  $r - r^*$  gesetzt wird. Ferner verwende man, daß  $\ln S^* - \ln A = \ln(S^*/A)$ . Mit der Definition von  $x$  aus der Behauptung ergibt sich:

$$(A23) \quad I1 = A \int_{-\infty}^A f(S) dS = -A [N(x) - 1]$$

Das zweite Integral I2 des Erwartungswertausdrucks in (A16) lautet vor und nach der Variablensubstitution:

$$(A24) \quad I2 =: - \int_{-\infty}^A S f(S) dS = - \int_{-\infty}^{\frac{\ln A - m}{\gamma}} e^{y\gamma + m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5y^2} dy$$

Dies ist äquivalent zu:

$$(A25) \quad I2 = - \int_{-\infty}^{\frac{\ln A - m}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5(y^2 - 2y\gamma)} e^m dy$$

Man ergänze den ersten Exponentialausdruck quadratisch und faktorisiere:

$$(A26) \quad I2 = -e^{m+\frac{\gamma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln A - m}{\gamma}} e^{-0,5(y-\gamma)^2} dy$$

Um zur Standardnormalverteilung zu gelangen, ist erneutes Zentrieren vonnöten. Man benutze die Substitution:

$$z = y - \gamma, \text{ mit } dz = dy$$

Das Integral wird zu:

$$(A27) \quad I2 = -e^{m+\frac{\gamma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln A - m}{\gamma} - \gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5z^2} dz$$

Man erkennt abermals die Verteilungsfunktion  $N(\cdot)$ . Damit gilt:

$$(A28) \quad I2 = -e^{m+\frac{\gamma^2}{2}} N\left(\frac{\ln A - m}{\gamma} - \gamma\right)$$

Nochmalige Ausnutzung der Symmetrie von  $N(\cdot)$  ergibt:

$$(A29) \quad I2 = e^{m+\frac{\gamma^2}{2}} \left[ N\left(-\frac{\ln A - m}{\gamma} + \gamma\right) - 1 \right]$$

Jetzt erst wird  $\mu$  gleich  $r - r^*$  gesetzt.

$$(A30) \quad I2 = S^* e^{(r-r^*)T} [N(x + \sigma\sqrt{T}) - 1]$$

Zusammengefaßt gilt für den risikoneutralen Erwartungswert des Putausübungserlöses am Fälligkeitstag:

$$(A31) \quad \begin{aligned} E^*(\max(0, A - S)) &= I1 + I2 \\ &= -A [N(x) - 1] + S^* e^{(r-r^*)T} [N(x + \sigma\sqrt{T}) - 1] \end{aligned}$$

Da dies eine zukünftige Größe ist, die Putprämie aber heute zu zahlen ist, muß der Barwert des Erwartungswertes gebildet werden. In einer risikoneutralen Welt ist der richtige Diskontfaktor die stetige Abzinsung mit  $r$ . Der Barwert des risikoneutralen Erwartungswertes des Putaus-

übungserlöses in einer risikoneutralen Welt ist gleich dem Putwert  $P^o$  und lautet:

$$(A32) \quad P^o = e^{-rT} E^* (\max(0, A - S))$$

Einsetzen von (A31) ergibt die in der Behauptung angegebene Putprämienformel. q.e.d.

## Literatur

J = Journal

- Bauer, H.*, 1991: Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin: de Gruyter. – *Black, F., Scholes, M.*, 1973: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *J of Political Economy* 81, 637 – 654. – *Brauner, R., Geiß, F.*, 1990: Das Abitur-Wissen Mathematik. Frankfurt am Main: Fischer. – *Brock, W. A., Malliaris, A. G.*, 1982: Stochastic Methods in Economics and Finance. New York: Elsevier. – *Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A.*, 1987: Taschenbuch der Mathematik. Thun: Harri Deutsch. – *Chiang, A. C.*, 1984: Fundamental Methods of Mathematical Economics. London: McGraw Hill. – *Chung, K. L.*, 1974: Elementary Probability Theory with Stochastic Processes. Berlin: Springer. – *Cox, J. C., Ross, S. A.*, 1976: The valuation of options for alternative stochastic processes. *J of Financial Economics* 3, 145 – 166. – *Cox, J. C., Ross, S. A., Rubinstein, M.*, 1979: Option Pricing: A Simplified Approach. *J of Financial Economics* 7, 229 – 263. – *Fahrmeir, L., Kaufmann, H. L., Ost, F.*, 1981: Stochastische Prozesse. München: Carl Hanser. – *Gaab, W.*, 1983: Devisenmärkte und Wechselkurse. Berlin: Springer. – *Garman, M. B., Kohlhagen, S. W.*, 1983: Foreign Currency Option Values, *J of International Money and Finance* 2, 231 – 237. – *Hull, J. C.*, 1989: Options, futures and other derivative securities. Englewood Cliffs: Prentice-Hall. – *Ingersoll, J. E.*, 1987: Theory of financial decision making. Totowa: Rowman and Littlefield. – *Liepach, W. E.*, 1993: Effizientes Devisenmanagement durch Kombination von Kurssicherungsinstrumenten. Frankfurt am Main: Lang. – *Loistl, O.*, 1991: Kapitalmarkttheorie. Wien: Oldenbourg. – *Meinhold, P., Wagner, E.*, 1983: Partielle Differentialgleichungen. Leipzig: Teubner. – *Merton, R. C.*, 1973: Theory of Rational Option Pricing, *Bell J of Economics and Management Science*, Vol. 4, 141 – 183. – *Mood, A. M., Graybill, F. A., Boes, D. C.*, 1974: Introduction to the Theory of Statistics. New York: McGraw-Hill. – *Müller, S.*, 1985: Arbitrage pricing of contingent claims. Berlin: Springer. – *Oskendal, B.*, 1985: Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer. – *Shapiro, A. C.*, 1989: Multinational Financial Management. Boston: Allyn and Bacon. – *Smith, C.*, 1979: Applications of Option Pricing Analysis, in: *Handbook of Financial Economics*. Oxford: North-Holland. – *Solnik, B.*, 1988: International Investments. Mass.: Addison-Wesley. – *Weizsäcker, H. v., Winkler, G.*, 1991: Stochastic Integrals. Braunschweig: Vieweg.

## Zusammenfassung

### Eine Einführung in die arbitragefreie Bewertung von Derivaten in stetiger Zeit am Beispiel europäischer Devisenoptionen

Die legendären Bewertungsformeln von *Black/Scholes* (1973) und *Garman/Kohlhagen* (1983) werden in aller Ausführlichkeit auf didaktisch motiviertem Wege hergeleitet. Zuerst werden zwei grundlegende Erkenntnisse der Optionspreistheorie in einem einfachen Binomialmodell vorgeführt: Die Unabhängigkeit der Bewertung von Optionsrechten von den Risikoneigungen der Marktteilnehmer und die damit verbundene Möglichkeit, diese in einer *imaginären* risikoneutralen Welt zu bewerten. Danach wird ein Modell der Kursdynamik – die Geometrische Brownsche Bewegung – eingeführt. Darauf aufbauend, wird die *Garman/Kohlhagen*-Differentialgleichung hergeleitet, welche als Begründung für die genannten beiden grundlegenden Erkenntnisse im Fall stetiger Zeit dient. Vermöge „risiko-neutraler“ Bewertung ergibt sich schließlich die *Garman/Kohlhagen*-Formel, welche die *Black/Scholes*-Formel als Spezialfall enthält. Die Lektüre dieser Einführung setzt lediglich „Das Abitur-Wissen Mathematik“ (*Brauner/Geiß*, 1990) voraus.

## Summary

### An Introductory to Continuous-Scale Derivatives Evaluation in a Non-Arbitrage Environment on the Basis of the Example of European Foreign-Exchange Options

The legendary evaluation formulae of *Black/Scholes* (1973) and *Garman/Kohlhagen* (1983) are explained in great detail in a didactically attractive manner. To begin with, two fundamental discoveries concerning the option price theory are explained with the help of a simple binomial model: independence of option-rights evaluations from market participants' risk-acceptance propensity and the resultant possibility of evaluating option rights in an *imaginary* risk-free environment. This is followed by a model reflecting the dynamism of prices – *Brown's* geometric progression. This is the basis of the *Garman/Kohlhagen* differential equation, which provides the justification of the two aforementioned fundamental discoveries pertaining to the continuous-scale evaluations. With the help of evaluations in a risk-free environment, the *Garman/Kohlhagen* formula is subsequently developed, which includes the *Black/Scholes* formula describing a special case. Reading this introductory presupposes nothing more than “A-level knowledge of mathematics”.

## Résumé

### **Une introduction à l'évaluation sans arbitrage des dérivés en période constante d'après l'exemple des options européennes en devises**

Les formules d'évaluation légendaires de *Black/Scholes* (1973) et de *Garman/Kohlhagen* (1983) sont déduites dans tous leurs détails à des fins didactiques. Tout d'abord, deux résultats fondamentaux de la théorie des prix d'option sont présentés dans un simple modèle binomial: l'indépendance de l'évaluation des droits d'option des propensions aux risques des usagers du marché et la possibilité associée de leur évaluation dans un monde imaginaire neutre sur le plan des risques. Un modèle de la dynamique des cours – le mouvement géométrique de *Brown* – est ensuite introduit. L'équation différentielle de *Garman/Kohlhagen* en est déduite; elle sert d'explication aux deux résultats fondamentaux décrits dans le cas de période constante. En vertu de l'évaluation «neutre sur le plan des risques», on obtient finalement la formule de *Garman/Kohlhagen* qui contient celle de *Black/Scholes* comme cas spécial. La lecture de cette introduction suppose uniquement la connaissance de l'ouvrage «Das Abitur-Wissen Mathematik» (*Brauner/Geiß*, 1990).