

# **Die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze: Theoretisches Konstrukt und empirische Evaluierung**

## **Untersuchung mit Daten des Kapitalmarktes der Bundesrepublik Deutschland\***

Von Jochen Wilhelm und Lars Brüning\*\*, Passau

### **I. Einführung und Problemstellung**

Als zentrales Konzept zur theoretischen wie auch empirischen Analyse von Märkten, an denen feste unbedingte Zahlungsverprechen in kleiner Stückelung gehandelt werden (wir wollen im folgenden von „Anleihen“ sprechen), gilt seit langem die „Fristigkeitsstruktur der Zinssätze“ (synonym auch „Zinsstruktur“, angelsächsisch „term structure of interest rates“). Grob gesprochen stellt sie einen Zusammenhang zwischen den am Markt implizit gezahlten (geforderten) Zinssätzen und den zugehörigen Kapitalüberlassungszeiträumen her. Die Implizitheit der Zinssätze verweist auf die besondere Problematik des Konzepts: Da im allgemeinen eine Vielzahl von Anleihen mit ganz unterschiedlichen Konditionen und nominalen Restlaufzeiten an den in Rede stehenden Märkten gehandelt werden, ist zunächst nicht klar, welcher Zinssatz mit welchem Kapitalüberlassungszeitraum in Verbindung zu bringen ist. Es erweist sich, daß das Konzept der Zinsstruktur ein im wissenschaftstheoretischen Sinne „theoretischer Begriff“ ist, der nur Sinn hat, wenn eine bestimmte Theorie richtig ist. Die hierzu geeignete Theorie ist die Arbitrage-Theorie; die Arbitrage-Theorie untersucht Märkte, an denen keine risikofreien Arbitragegewinne erzielt werden können. Eine Zinsstruktur existiert im strengen Sinne nur, wenn die betrachteten Märkte im Einklang mit der Arbitrage-Theorie stehen. Die Analyse dieses Tatbestandes ist Gegenstand des ersten Hauptabschnittes

---

\* Finanzielle Unterstützung der vorliegenden Untersuchung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft wird dankbar zur Kenntnis gebracht.

\*\* Univ. Professor Dr. *Jochen Wilhelm*, Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre mit Schwerpunkt Finanzierung, Universität Passau, und cand. rer. pol. *Lars Brüning*, Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre mit Schwerpunkt Finanzierung, Universität Passau.

der vorliegenden Untersuchung. Charakter und Existenz der Zinsstruktur werden aus der Anwendung der Dualitätstheorie der linearen Programmierung auf sogenannte Arbitrageprogramme begründet, das sind Programme zur optimalen Nutzung eventuell bestehender Arbitragemöglichkeiten.

Unglücklicherweise erweist es sich bei einer Übertragung des theoretischen Konstruktes „Zinsstruktur“ auf empirische Gegebenheiten, daß die Arbitrage-Theorie in Bezug auf reale Märkte falsch ist; sie muß schon aus institutionellen Gründen falsch sein, weil die Kursnotizen von Anleihen (oder überhaupt von Wertpapieren) keine beliebige Genauigkeit im Sinne reeller Zahlen vorsieht – und wie sie von der Arbitrage-Theorie gefordert wird –, sondern in Einheiten („ticks“) von 0,01 DM (mit dem 1. 1. 1990; vorher war eine Notierung in Einheiten von 0,05 DM üblich). Im exakten Sinne falsch, mag die Arbitrage-Theorie gleichwohl „approximativ“ richtig sein. In welchem Sinne die Arbitrage-Theorie für Anleihen-Märkte approximativ richtig sein könnte, ist Gegenstand des zweiten Hauptabschnittes. Das Konzept der Approximation beruht regelmäßig auf der Vorstellung einer formalen „Abstandsminimierung“ zwischen empirischem Material und theoretischem Konstrukt (z.B. Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme). Bei empirischen Untersuchungen der Zinsstruktur bleibt häufig die Wahl der zugrundegelegten Abstandsvorstellung unerörtert; ebensowenig wird der Zusammenhang zwischen Approximationsverfahren und arbitragetheoretischer Deutung der Zinsstruktur behandelt. Im zweiten Hauptabschnitt werden diese Verhältnisse einer Klärung zugeführt: Zu jeder Approximationsmethode gibt es eine (duale) Interpretation als beschränktes Arbitrageprogramm. Für zwei Spezialfälle können lineare Programmierungsmodelle zur Lösung formuliert werden.

Der dritte Hauptabschnitt beschreibt erstmals für den deutschen Markt Methoden und Ergebnisse einiger empirischer Umsetzungen der zuvor theoretisch entwickelten Konzepte. Dabei zeigt sich, daß der deutsche Anleihen-Markt zusätzliche, im spezifisch empirischen Bereich angesiedelte Probleme aufwirft, die auf der einen Seite mit seiner relativ geringen Vielfalt von Papieren, auf der anderen Seite mit der dann doch fehlenden Fokussierung der Zahlungen auf wenige feste Jahrestermine zusammenhängen. Für den Zwei-Jahres-Zeitraum 1989/1990 wurden vergleichende Rechnungen angestellt, deren Ergebnisse diskutiert werden. Neben methodischen Einsichten lassen die Resultate den vorsichtigen Schluß zu, daß die am deutschen Markt erzielbaren Arbitragegewinne sich im Rahmen der mit ihnen verbundenen Transaktionskosten bewegen.

## II. Das Ideal: „Reine“ Arbitrage-Theorie und Zinsstruktur

Der vorliegende Hauptabschnitt stellt die theoretischen Grundlagen für das Konstrukt der idealtypischen Zinsstruktur bereit. Der adäquate Ansatzpunkt ist die Auffassung der Anleihen-Märkte als Märkte, an denen die effiziente Reaktion der Preise auf Angebots- und Nachfrageentwicklungen es verhindert, daß risikofreie Arbitragegewinne durch einzelne Wirtschaftssubjekte gemacht werden können. In einem idealisierten Modell würde ein erkennbarer Arbitragegewinn bei unterstelltem Mengenanpasserverhalten zu unendlich hohen Angebots- bzw. Nachfragemengen jener Wirtschaftssubjekte führen, die diese Möglichkeit erkennen und realisieren können. Das ginge auf individueller Ebene mit einer unbeschränkten Nutzenzunahme, auf Marktebene mit einem Ungleichgewicht einher. Die „reine“ Arbitrage-Theorie geht von dem Postulat aus, daß eine solche Situation nicht vorliegt.

Der folgende Unterabschnitt führt zur genaueren Darstellung einige Bezeichnungen ein. Im Anschluß daran wird der zentrale Zusammenhang zwischen Zinsstruktur und „reiner“ Arbitrage-Theorie hergeleitet.

### 1. Bezeichnungen und Modellaufbau

Anleihen werden durch die zeitgenaue Fixierung der mit ihnen verbundenen Zahlungen beschrieben. Enthält das betrachtete Marktsegment  $n$  Anleihen und ist  $\{1, 2, \dots, T\}$  eine Menge von äquidistanten Zeitpunkten, die jedenfalls alle Zeitpunkte umfaßt, an denen irgendeine zu berücksichtigende Anleihe eine Zahlung zu leisten verspricht<sup>1</sup>, so kann die gesamte Struktur der am Markt umlaufenden Objekte durch die Zahlungsmatrix  $Z$

---

<sup>1</sup> Wir legen also grundsätzlich ein zeitdiskretes Modell der Zinsstruktur zugrunde; in der Realität sind naturgemäß nur endlich viele Anleihen mit endlich vielen Zahlungszeitpunkten beobachtbar. Gleichwohl ist es unter Umständen empirisch gerechtfertigt, ein zeitstetiges Modell zum Ausgangspunkt zu nehmen und es im Rahmen von (nicht-)linearen Regressionen oder Spline-Interpolationen zu schätzen. Beispiele dafür sind *McCulloch, J. H.*, Measuring the Term Structure of Interest Rates, in: *JoB* 44 (1971), S. 19 - 31; *Vasicek, O., Fong, H. G.*, Term Structure Modeling Using Exponential Splines, in: *JoF* 37 (1982), S. 339 - 348; *Chambers, D. R., Carleton, W. T., Waldmann, D. W.*, A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates, in: *JFQA* 19 (1984), S. 233 - 252; *Shea, G. S.*, Pitfalls from Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations, in: *JFQA* 19 (1984), S. 253 - 269.

Beide Ansätze lassen sich im übrigen kombinieren, indem man zunächst eine zeitdiskrete Zinsstruktur schätzt und sie anschließend durch ein zeitstetiges Modell approximiert.

charakterisiert werden, deren  $T$  Zeilen die jeweiligen (bis zu  $n$ ) Zahlungen der Anleihen in den jeweiligen Zeitpunkten enthalten. Im Beobachtungszeitpunkt  $\tau = 0$ , in Bezug auf den die herrschende Zinsstruktur ermittelt bzw. definiert werden soll, haben diese Anleihen ausmachende Preise (Kursnotiz zuzüglich Stückzinsen) in Höhe von  $P = (P_1, \dots, P_n)'$ . Ein Bond-Portfolio<sup>2</sup> (aber auch eine Kauf-/Verkaufposition, d. h. eine Portfolio-Veränderung) ist ebenfalls ein Vektor, z. B.  $x = (x_1, \dots, x_n)'$ . Die mit einem Bond-Portfolio  $x$  verbundenen Zahlungen in den Zeitpunkten  $\tau = 1, \dots, T$  ergeben sich daher im Wege der Matrix-Vektor-Multiplikation zu

$$(1) \quad z = Z \cdot x,$$

wobei  $z$  dementsprechend ein Vektor  $z = (z_1, \dots, z_T)'$  von zeitpunktbezogenen Zahlungen ist; der Wert des Portfolios im Betrachtungszeitpunkt  $\tau = 0$  beträgt  $P' \cdot x$ , zu  $P' \cdot x$  kann das Portfolio  $x$  erworben oder veräußert werden.

Ist ein Wirtschaftssubjekt mit einem Ausgangsportfolio  $x^o$  ausgestattet und erwartet es aus anderen Quellen die konsumierbaren Einkünfte  $(h_o, h)$  mit  $h = (h_1, \dots, h_T)'$ , so stehen ihm jedenfalls die folgenden allokativen Möglichkeiten zur Gestaltung seiner zukünftigen Konsumauszahlungen offen: Seine möglichen Konsumauszahlungen  $(c_o, c)$  mit  $c = (c_1, \dots, c_T)'$  ergeben sich zu (intertemporale Budgetbedingungen)

$$(2) \quad c_o = h_o - P' \cdot x$$

$$(3) \quad c = h + Z \cdot x^o + Z \cdot x$$

mit der Variablen  $x$  (Portfolio-Veränderung!), die die gegenüber dem Ausgangsportfolio  $x^o$  zu realisierenden Positionsveränderungen enthält. Dabei wird von Steuern und Transaktionskosten offenbar abgesehen<sup>3</sup>.

Strebt das betrachtete Wirtschaftssubjekt unter Präferenzgesichtspunkten eine bestimmte realisierbare Struktur der Konsumausgaben in der Form  $(c^*, c^*)$  an, dann muß es offenbar sein Ausgangsportfolio  $x^o$  durch die Portfolio-Veränderung  $x^*$  mit

<sup>2</sup> Wir sprechen zwar von „Anleihen“, in Bezug auf Portfolios aber folgen wir dem üblich gewordenen Sprachgebrauch: „Bond-Portfolios“.

<sup>3</sup> An dieser Stelle könnte man in die wissenschaftstheoretische Kontroverse eintreten, ob eine Theorie mit falschen Annahmen (die Annahme der Steuerfreiheit ist offensichtlich falsch) überhaupt zu wissenschaftlichen Erklärungen oder Prognosen tauglich ist. Davon wurde hier abgesehen; vgl. aber *Musgrave, A. E.*, „Unreal Assumptions“ in *Economic Theory: The F-twist Untwisted*, in: *Kyklos* 34 (1981), S. 377 - 387.



$$(4) \quad c_o^* = h_o - P' \cdot x^*$$

$$(5) \quad c^* = h + Z \cdot x^o + Z \cdot x^*$$

korrigieren.

Unterstellen wir lediglich streng monoton steigende Präferenzen, d. h. daß eine Steigerung in (4) oder (5) die Präferenzposition noch verbessert, so lohnt sich für das betrachtete Wirtschaftssubjekt noch die Lösung der folgenden Optimierungsaufgabe – nachdem grundsätzlich die zeitliche Struktur der angestrebten Konsumauszahlungen in Gestalt von  $(c_o^*, c^*)$  nach (4) und (5) (durch  $x^*$ ) festgelegt worden ist –

$$(6) \quad \max \{ h_o - P' (x^* + x) \mid h + Z \cdot x^o + Z \cdot (x^* + x) \geq c^* \}$$

dann, wenn sich eine Lösung  $x$  finden läßt, bei der der Maximand

$$h_o - P' \cdot (x^* + x) > c_o^*$$

erfüllt. Diese Maximierungsaufgabe prüft nämlich die Möglichkeit, eine physisch von der gewünschten Position  $x^*$  abweichende Portfolio-Struktur zu finden, die die Präferenz gegenüber  $(c_o^*, c^*)$  noch zu steigern im Stande ist; es ist daher gerechtfertigt, (6) als Arbitrageprogramm zu bezeichnen, da es eine risikofreie Möglichkeit der Positionsverbesserung zu identifizieren in der Lage ist.

Unterliegt das Arbitrageprogramm keinen weiteren Nebenbedingungen, so läßt es sich unmittelbar in das folgende äquivalente Programm überführen (man setze nur  $(c_o^*, c^*)$  aus (4) und (5) in (6) ein):

$$(7) \quad \min \{ P' \cdot x \mid Z \cdot x \geq 0 \}.$$

Dieses lineare Programmierungsproblem ist der theoretische Kern der Zinsstruktur.

Eine geringfügige, aber wichtige Erweiterung bezieht die Möglichkeit der Kassenhaltung in jeder Periode ein<sup>4</sup>: Es sei mit  $y_t$  der Betrag bezeichnet, der in der Periode  $[t, t + 1]$  in der Kasse zu halten ist ( $t = 0, \dots, T - 1$ ). Es sei  $y = (y_0, \dots, y_{T-1})'$  und  $S(y) = (y_1, \dots, y_{T-1}, 0)'$ ; dann wird das Arbitrageprogramm verallgemeinert zu<sup>5</sup>:

<sup>4</sup> Die Entscheidung über den in der Kasse zu haltenden Betrag ist im Zeitpunkt  $\tau = 0$  für alle zukünftigen Zeitpunkte zu treffen.

<sup>5</sup> Ein ähnlicher Ansatz findet sich bei *Hodges, S. D., Schaefer, S. M., A Model for Bond Portfolio Improvement*, in: *JFQA* 12 (1977), S. 243 - 260, hier: S. 245; Hodges

$$(8) \quad \min \{ P' \cdot x + y_0 \mid Z \cdot x + y - S(y) \geq 0, y \geq 0 \}$$

Die Nichtnegativitätsbedingung für  $y$  ergibt sich zwingend aus dem Charakter der Kassenhaltung;  $y - S(y)$  beschreibt die periodischen Netto-Entnahmen aus der Kasse.

Das Arbitrageprogramm erweist sich bei Fehlen individueller Nebenbedingungen in (6) als ein rein marktdeterminiertes Optimierungsproblem: Wenn irgendein Wirtschaftssubjekt es präferenzsteigernd realisieren kann, so kann es jedes Wirtschaftssubjekt präferenzsteigernd realisieren.

## 2. Arbitrageprogramm und Zinsstruktur

Es ist bis jetzt unerörtert geblieben, unter welchen Bedingungen das Arbitrageprogramm (6) bzw. (8) eine tatsächlich präferenzsteigernde Lösung besitzt; dagegen wissen wir bereits, daß eine Lösung die Eigenschaft, präferenzsteigernd zu sein, unabhängig davon hat, wer sie realisiert. Eine Inspektion der Gleichungen (4), (5), (6) und (8) zeigt nun unmittelbar, daß eine präferenzsteigernde Lösung  $(x^*, y^*)$  folgende Eigenschaften haben muß

$$(9) \quad Z \cdot x^* + y^* - S(y^*) \geq 0$$

$$(10) \quad x^* \in \mathbb{R}^n$$

$$(11) \quad y^* \in \mathbb{R}^T$$

$$(12) \quad y^* \geq 0$$

$$(13) \quad P' \cdot x^* + y_0^* < 0$$

Die Bedingungen (9) .. (12) beinhalten lediglich die Anforderung an  $(x^*, y^*)$ , eine zulässige Lösung des Arbitrageprogramms (8) zu sein, d.h. die zukünftigen Präferenzbeiträge (Beiträge zu Konsumauszahlungen in  $t = 1, \dots, T$ ) nicht zu mindern. Bedingung (13) fordert, den Präferenzbeitrag im Zeitpunkt  $t = 0$  definitiv zu steigern.

---

und Schaefer fordern in den Nebenbedingungen aber die Duplikation eines gegebenen Stromes, schließen Leerverkäufe aus und erlauben eine verzinsliche Anlage von  $y$ . Ähnlich auch Schaefer, S. M., Measuring a Tax Specific Term Structure of Interest Rates in the Market for British Government Securities, in: Economic Journal 19 (1981), S. 415 - 438. Unserem Vorgehen sehr nahe kommt Ronn, E. I., A New Linear Programming Approach to Bond Portfolio Management, in: Journal of Financial and Quantitative Analysis 22 (1987), S. 439 - 466; dieser Ansatz deckt allerdings nicht die weiter unten ausgeführten approximationstheoretischen Zusammenhänge auf und hebt vornehmlich auf Transaktionskosten und Steuern ab.

Wenn wir also von einer präferenzsteigernden Lösung des Arbitrageprogramms sprechen, so sprechen wir im Sinne der Terminologie der linearen Programmierung von einer zulässigen Lösung<sup>6</sup>, die zusätzlich die präferenzsteigernde Eigenschaft (13) erfüllt. Zunächst ist zu bemerken, daß eine zulässige Lösung stets existiert:  $(x^*, y^*) = (0,0)$  erfüllt (9) .. (12). Allerdings ist diese Lösung nicht präferenzsteigernd, wie Einsetzen in (13) zeigt. Bemerkenswerter ist dagegen die folgende Eigenschaft von wirklich präferenzsteigernden Lösungen: Mit der präferenzsteigernden Lösung  $(x^*, y^*)$  ist für jedes positive Vielfache  $\lambda$  die Lösung  $(\lambda x^*, \lambda y^*)$  präferenzsteigernd; hinzu kommt, daß für die Lösung  $(\lambda x^*, \lambda y^*)$  gilt.

$$P'(\lambda x^*) + \lambda y_o^* = \lambda(P' \cdot x^* + y_o^*) < P' \cdot x^* + y_o^*$$

wegen des Vorzeichens von  $P' \cdot x^* + y_o^*$  nach (13). Mit anderen Worten: Wenn eine präferenzsteigernde Lösung des Arbitrageprogramms existiert, läßt sie sich durch Vervielfachung mit  $\lambda$  beliebig präferenzsteigernd verbessern; da die Bedingung (13) in Verbindung mit (12) den Fall  $x^* = 0$  bei einer präferenzsteigernden Lösung verbietet, kommt folglich im Falle der Existenz einer präferenzsteigernden Lösung des Arbitrageprogramms auf den Markt eine unbegrenzte Nachfrage der Struktur  $x^*$  zu; da aber für alle Wirtschaftssubjekte die Situation grundsätzlich gleich ist, wird diese Nachfrage nicht etwa (auch nur zufällig) durch entsprechendes Angebot „ausgeglichen“: Ein Marktgleichgewicht entsteht.

Diesen Fall einer den Markt sprengenden explodierenden Nachfrage schließt die Arbitrage-Theorie nun in axiomatischer Form aus; sie postuliert:

(AFP) Das Arbitrageprogramm darf keine präferenzsteigernde Lösung besitzen.

Die unmittelbare Konsequenz ist, daß (13) für zulässige Lösungen nicht gelten darf, sondern statt dessen

$$(13a) \quad P' \cdot x + y_o \geq 0$$

gültig ist.

Damit ist (8) ein (nach unten) beschränktes lineares (Minimierungs-)Programm mit wenigstens einer zulässigen Lösung, das infolgedessen eine Opti-

---

<sup>6</sup> Wenn hier und im folgenden ohne Literaturverweis Terminologie und Methoden der linearen Programmierung Eingang finden, so wende sich der Leser bei Bedarf etwa an die folgende Quelle: *Franklin, J., Methods of Mathematical Economics*, Springer Verlag: New York et al. 1980.

mallösung besitzt. Da die zulässige Lösung (0,0) bereits die Untergrenze der Zielfunktion erreicht, steht auch fest, daß das Arbitrageprogramm bei Geltung von (AFP) präferenzneutral ist, da der optimale Zielwert gleich Null sein muß: Die Realisation des Arbitrageprogramms lohnt sich nie.

Der Zusammenhang mit der Zinsstruktur ergibt sich nun aus Dualitätsüberlegungen. Da das Programm (8) im Vorzeichen nicht beschränkte Variable  $x$  enthält, formen wir es zunächst, den vertrauten Wegen von  $LP$ -Problemdarstellungen folgend, um: Wir zerlegen die Portfolioveränderung  $x$  in Käufe  $x^+$  und Verkäufe  $x^-$ , indem wir setzen:

$$(14) \quad x = x^+ - x^- \quad \text{mit } x^+, x^- \geq 0$$

und können daher (8) neu formulieren:

$$\min \{ P' \cdot x^+ - P' \cdot x^- + y_0 \mid Zx^+ - Zx^- + y - S(y) \geq 0; y, x^+, x^- \geq 0 \}$$

Die Transformation  $S(y)$  kann in Matrixform ( $S$  ist eine Art Verschiebungsoperator) als

$$S(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & 0 & 1 & \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{T-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Identifizieren wir  $S$  mit dieser Matrix, so kann (8) weiter umformuliert werden:

$$(8a) \min \{ (P' \mid -P' \mid (1, 0, \dots, 0)) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} \mid (Z \mid -Z \mid E - S) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} \geq 0; y, x^+, x^- \geq 0 \},$$

wobei  $E$  die  $(T \times T)$ -Einheitsmatrix bezeichnet.

Der Dualitätssatz der linearen Programmierung sichert nun nach dem Gesagten unter Annahme von (AFP) die Existenz von Dualvariablen  $Q = (Q_1, \dots, Q_T)'$  mit

$$(15) \quad Q > 0$$

$$(16) \quad Q' \cdot (Z \mid -Z \mid E - S) \leq (P' \mid -P' \mid (1, 0, \dots, 0)),$$

wobei (16) die Nebenbedingungen des zu (8a) dualen Problems sind.

Aus ihnen ergeben sich daher im einzelnen die folgenden Bedingungen für die Dualvariablen  $Q$ :



$$(17) \quad Q' \cdot Z \leq P'$$

$$(18) \quad -Q' \cdot Z \leq -P'$$

und

$$Q' \cdot (E - S) \leq (1, 0, \dots, 0), \text{ d.h. } Q \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + S' \cdot Q, \text{ bzw.}$$

$$(19) \quad Q_1 \leq 1$$

$$(20) \quad -Q_{\tau-1} + Q_{\tau} \leq 0 \quad \text{für } \tau = 2, \dots, T^7$$

(17) und (18) lassen sich unmittelbar zu

$$(21) \quad P = Z' \cdot Q$$

zusammenfassen. Löst man (21) in einzelne Zeilen auf, so zeigt sich, daß mit Hilfe der Dualvariablen nun die Marktpreise der Anleihen als lineare Funktionen der mit ihnen verbundenen Zahlungen erklärt werden, wobei die Koeffizienten dieser Funktionen gleich (den Dualvariablen des optimalen Arbitrageprogramms) sind, wenn sie sich auf Zahlungen in demselben Zeitpunkt beziehen:

$$(22) \quad P_i = \sum_{\tau=1}^T Z_{\tau i} \cdot Q_{\tau}$$

Im üblichen Sprachgebrauch diskontiert  $Q_{\tau}$  die Zahlung  $Z_{\tau i}$  im Zeitpunkt  $\tau$  auf den Zeitpunkt 0. Damit ist der Bezug zur Zinsstruktur hergestellt: Die Dualvariablen des optimal gelösten Arbitrageprogramms spiegeln in der Form von Diskontierungsfaktoren die Zinsstruktur wider, so lange (AFP) gilt. Die Bedingungen (19) und (20) sichern die üblichen Eigenschaften von Diskontierungsfaktoren, daß sie nämlich Eins nicht übersteigen und mit wachsendem zeitlichen Abstand der Zahlungen sinken (genauer: nicht steigen). Aus den Diskontierungsfaktoren ergeben sich die Spotzinssätze durch

$$(23) \quad \rho_0(\tau) = -\frac{\log Q_{\tau}}{\tau}$$

und die (impliziten) Terminzinssätze (für die Periode  $[\tau, \tau + \Delta \tau]$ ) durch<sup>8</sup>

<sup>7</sup> Vgl. *Hodges, S. D., Schaefer, S. M.*, a.a.O., S. 248, wobei sich aber die Verzinsung von  $y$  auf die Bedingungen für die  $Q_{\tau}$  auswirkt; dasselbe gilt für *Ronn*, a.a.O.

<sup>8</sup> Der implizite Terminzinssatz ist jener Satz, der im Arbitrage-Gleichgewicht für ein Termin(kredit-)Geschäft der betreffenden Laufzeit und Periode abgeschlossen würde. Klassische (volkswirtschaftliche) Hypothesen zur Zinsstruktur betreffen

$$(24) \quad {}_0Q_\tau(\Delta\tau) = \frac{1}{\Delta\tau} \left[ \log Q_\tau - \log Q_{\tau+\Delta\tau} \right]$$

(19) in Verbindung mit (20) sichert, daß alle Spotzinssätze nichtnegativ sind, während (20) weiter sichert, daß auch alle Terminzinssätze nichtnegativ sind.

Die Diskontierungsfaktoren sind als Dualvariablen eines LP einer weiteren Interpretation zugänglich: als Schattenpreise des primalen Problems. Als solche geben sie die Konsumauszahlungssteigerung in  $\tau = 0$  wieder, den eine hingenommene Konsumauszahlungsreduktion in einem zukünftigen Zeitpunkt möglich macht. Sie spiegeln daher das vom Markt als fair eingeschätzte Preisverhältnis von Zahlungen in verschiedenen Zeitpunkten.

Mit diesen Ausführungen darf die sozusagen „reine Theorie“ des Zinsstrukturkonzeptes als abgeschlossen betrachtet werden<sup>9</sup>. Wie schon in der Einleitung hervorgehoben, ist diese Theorie empirisch falsch, im allgemeinen gilt (AFP) nicht, da schon die numerische (Un-)Genauigkeit, mit der Preise in der Realität notiert werden, zu theoretischen Arbitragemöglichkeiten führt, mit der Konsequenz, daß das Arbitrageprogramm keine optimale Lösung besitzt und folglich die Dualvariablen nicht existieren. Es wird daher unklar, welches die in einer bestimmten empirischen Situation geltende Zinsstruktur eigentlich sei. Der folgende Hauptabschnitt soll sich mit Überlegungen zu und Konsequenzen aus dieser Tatsache befassen.

### III. Die Realität: Zinsstrukturen außerhalb der „reinen“ Arbitrage-Theorie

Hält man, eingedenk der Tatsache, daß die „reine“ Arbitrage-Theorie empirisch falsch ist, dennoch im Grundsatz an der in (21) zum Ausdruck kommenden Vorstellung fest, die Zinsstruktur müsse in der Gestalt der Diskontierungsfaktoren  $Q$  die Preise der umlaufenden Anleihen aus ihren Zah-

---

meist den Zusammenhang zwischen impliziten Terminzinssätzen und zukünftigen (erwarteten) Spotzinssätzen derselben Periode.

<sup>9</sup> An dieser Stelle soll nur erwähnt werden, daß die auf dem geschilderten Wege gewonnene Zinsstruktur das theoretisch adäquate Instrument zur Lösung des „Kalkulationszinsfußproblems“ der klassischen Investitionstheorie unter Sicherheit darstellt. Zukünftige Netto-Einzahlungen aus Realinvestitionen werden mit den betreffenden Terminzinssätzen behandelt. Diese Vorgehensweise löst die in der Investitionstheorie übliche Aufstellung vollständiger Finanzpläne auf der Grundlage zukünftiger Spotzinssätze für den Fall eines arbitragefreien Marktes ab; vgl. zu solchen Finanzplänen etwa *Kruschwitz, L.*, Investitionsrechnung, 4. Auflage, Berlin - New York 1990, S. 46 ff.

lungsströmen erklären, so kommen anstelle von (21) approximationstheoretische Ansätze in Frage, d.h. eine Berechnung der Zinsstruktur als mathematischer Kompromiß der Gestalt (Approximation von  $P$  durch  $Z' \cdot Q$  im Wege einer „Abstandsminimierung“ zwischen empirischen Preisen  $P$  und theoretischen Preisen  $Z' \cdot Q$ )

$$(25) \quad \min \{ \| P - Z' \cdot Q \| \mid Q \in \mathbb{R}^T \},$$

wobei die Frage der geeigneten Norm  $\| \cdot \|$  (Messung der Approximationsgüte, des Abstandes) noch zu diskutieren wäre. In der Literatur ist empirisch bisher vor allem die euklidische Norm

$$\| x \|_2 = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2}$$

zum Einsatz gekommen<sup>10</sup>, bei der (25) mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate identisch (und formal der linearen Regressionsanalyse ähnlich) ist; mit der Nebenbedingung  $Q \geq 0$  wird (25) mit dieser euklidischen Norm ein Problem der quadratischen Optimierung. Andere Ansätze von Vektor-Normen<sup>11</sup> sind denkbar, vor allem die Klasse der sogenannten  $L_p$ -Normen, die sich aus

$$\| x \|_p = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{1/p}$$

mit dem Grenzfall  $p = \infty$  :

$$\| x \|_\infty = \max \{ |x_i| \mid i = 1, \dots, n \}$$

ergeben.

Allerdings stellt sich bei einem (vielfach unreflektierten) Vorgehen nach (25) die Frage nach dem Zusammenhang mit der Arbitrage-Theorie oder,

<sup>10</sup> Vgl. *Carleton, W. T., Cooper, I. A., Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates*, in: *JoF* 31 (1976), S. 1067 - 1083; *Nuske, M., Die Bestimmung der impliziten Kapitalmarktdiskontierung zur Bewertung von Anleihen und Obligationen*, Diskussionspapier Nr. 49, Institut für Entscheidungstheorie und Unternehmensforschung, Universität Karlsruhe, Karlsruhe 1983; und vor kurzem *Beer, U., Eine Methode zur Schätzung der Zinsstruktur in der Schweiz*, in: *Schweizer Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik* 126 (1990), S. 39 - 50; Beer modifiziert den bereits erwähnten Ansatz von *Schaefer* und erreicht dadurch eine Approximation nach der euklidischen Norm unter Nebenbedingungen.

<sup>11</sup> Zu Vektornormen allgemein und zu den  $L_p$ -Normen im besonderen vgl. z.B. *Coltatz, L., Funktionalanalysis und numerische Mathematik*, Springer-Verlag: Berlin et al. 1964, S. 132 ff.

anders ausgedrückt, nach der ökonomischen Motivation von (25). Zur Klärung dieses Zusammenhangs wird im folgenden ein Beitrag geliefert<sup>12</sup>.

Wir gehen wieder von der Vorstellung eines Arbitrage-Programms nach (7) aus, bei dem aber die Möglichkeiten des einzelnen Arbitrageurs beschränkt sind, indem die ihm zugänglichen Portfolios in gewisser Weise volumenmäßig beschränkt werden. Als Motivation läßt sich denken, daß nur eine „maßvolle“ Börsenorder zum gegebenen Kurs ausführbar sein dürfte. Wir formulieren statt (7) das beschränkte Arbitrage-Programm:

$$(26) \quad \min \{ P' \cdot x \mid Z \cdot x \geq 0, \|x\| \leq \alpha \};$$

mit einer (zunächst) beliebigen Norm  $\|\cdot\|$  und einer exogenen Schranke  $\alpha > 0$  ist  $\|x\| \leq \alpha$  eine Beschränkung des Portfolio-Umfangs. Variablensubstitution zeigt sofort (wegen  $\|\alpha x\| = \alpha \|x\| = \alpha \|x\|$  für  $\alpha > 0$ ), daß

$$(27) \quad \min \{ P' \cdot x \mid Z \cdot x \geq 0, \|x\| \leq \alpha \} = \alpha \cdot \min \{ P' \cdot x \mid Z \cdot x \geq 0, \|x\| \leq 1 \}$$

gilt, so daß wir uns auf den Fall einer Schranke von  $\alpha = 1$  konzentrieren können: Das optimale Bond-Portfolio hängt in seiner Struktur von  $\alpha$  nicht ab, wohl aber der Wert des optimalen Bond-Portfolios, der dem (negativen) Arbitragegewinn entspricht, der angesichts der allerdings beschränkten Portfolio-Bildungsmöglichkeiten erzielbar ist.

Im Anhang I wird nun gezeigt, daß die zu (26) duale Aufgabe genau in

$$(28) \quad \alpha \cdot \min \{ \|P - Q' \cdot Z\|^* \mid Q \in \mathbb{R}^T, Q \geq 0 \}$$

besteht, wobei  $\|\cdot\|^*$  die zu  $\|\cdot\|$  duale Norm ist, d. h. in der Minimierung eines „Abstandes“ zwischen tatsächlichen und durch die Zinsstruktur vorhergesagten Bond-Preisen resultiert. Für die dualen  $L_p$ -Normen gilt<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1^* &= \|\cdot\|_\infty, \quad \|\cdot\|_\infty^* = \|\cdot\|_1 \\ \|\cdot\|_p^* &= \|\cdot\|_q \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

insbesondere ist die euklidische Norm selbstdual:

<sup>12</sup> Einen etwas anderen Zugang als wir hat erst kürzlich Prisman gewählt: *Prisman, E. Z., A Unified Approach to Term Structure Estimation: A Methodology for Estimating the Term Structure in a Market with Frictions*, in: *JofqA* 25 (1990), S. 127 - 142; Prisman arbeitet mit Marktfrikionsfunktionen in der Zielfunktion von (7), während wir die möglichen Arbitrage-Bond-Portfolios beschränken.

<sup>13</sup> Siehe *Collatz, a.a.O., S. 146*.



$$\| \cdot \|_2^* = \| \cdot \|_2.$$

Als Konsequenz hat man die angestrebte ökonomische Interpretation der Approximationsverfahren der Bestimmung der Zinsstruktur: Jede Art der Beschränkung der Arbitrage-Portfolios mit Hilfe einer bestimmten Norm führt zu einer ganz bestimmten approximationstheoretischen Schätzmethode der Zinsstruktur und umgekehrt. Die Normen  $\| \cdot \|_1$  bzw.  $\| \cdot \|_\infty$  haben dabei den Vorzug, in der Gestalt von (28) auf lineare Programmierungsprobleme zu führen; sie sind in ihrer primalen Form den weiter unten diskutierten empirischen Untersuchungen zugrunde gelegt worden, wobei zum Vergleich auch die Regressionsapproximation ( $p = 2$ ) gerechnet wurde. Die Beschränkung  $\| x \|_1 \leq 1$  bedeutet dabei eine Beschränkung der Summe der Umsätze (in Stücken gemessen), während  $\| x \|_\infty \leq 1$  den maximalen Umsatz in einer Anleihe beschränkt. Die entsprechenden LP's werden im folgenden konkretisiert.

Wird die Beschränkung  $\| x \|_1 \leq 1$  („Gesamtvolumensbeschränkung“) gewählt, so resultiert als Approximationsnorm  $\| P - Q' Z \|_\infty = \max \{ | P_i - Q' Z_i | \mid i = 1, \dots, n \}$ ; es wird also im dualen Programm (28) die Minimierung des maximalen Abstandes zwischen ausmachendem Preis und theoretischem Barwert angestrebt.

Die Beschränkung  $\| x \|_\infty \leq 1$  („Einzelvolumensbeschränkung“) führt dagegen zur Approximationsnorm  $\| P - Q' Z \|_1 = \sum_{i=1}^n | P_i - Q' Z_i |$ ; die duale Aufgabe (28) bedeutet in diesem Fall die Minimierung der Summe der absoluten Abweichung von Preis und Barwert.

Die Gesamtvolumensbeschränkung  $\| x \|_1 \leq 1$  führt auf das primale lineare Programmierungsproblem

$$(29) \quad \min \left\{ (P' | - P') \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \mid (Z | - Z) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \geq 0, \underline{1}' \cdot (x^+ + x^-) \leq 1; x^+, x^- \geq 0 \right\}$$

Die Einzelvolumensbeschränkung  $\| x \|_\infty \leq 1$  führt auf das primale lineare Programmierungsproblem<sup>14</sup>

$$(30) \quad \min \left\{ (P' | - P') \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \mid (Z | - Z) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \geq 0, x^+ + x^- \leq \underline{1}, x^+, x^- \geq 0 \right\},$$

wobei in beiden Fällen  $\underline{1}$  für den  $n$ -Vektor steht, der als Komponenten nur Einsen hat.

<sup>14</sup> Ein zu (30) analoges Programm legt *Ronn*, a.a.O., seinen empirischen Untersuchungen zugrunde.

#### IV. Empirische Untersuchung

##### 1. Datenbasis

Für empirische Ermittlungen der Zinsstruktur sind folgende Anforderungen an die einzubeziehenden Anleihen bestmöglich zu berücksichtigen:

1. Die Anleihen sollten<sup>15</sup>
  - keinem Bonitätsrisiko unterliegen,
  - keine Kündigungsrechte beinhalten,
  - möglichst homogen sein in bezug auf
    - Art und Höhe der Besteuerung
    - den Tilgungsmodus,
    - die Kosten des Erwerbs, der Verwahrung und des Verkaufs.
2. Es ist auf ausreichende Marktgängigkeit zu achten, damit zu den beobachteten Preisen tatsächlich Umsätze stattgefunden haben<sup>16</sup>.
3. Die Anleihegruppe sollte groß genug sein, um die resultierende Zinsstruktur als eine dem gesamten Kapitalmarkt zugrunde liegende bonitätsrisikofreie Zinsstruktur ansehen zu können.
4. Ein zu allen Beobachtungszeitpunkten vollständiges Restlaufzeiten-Spektrum ist wünschenswert, um zu gewährleisten, daß für jede Fristigkeit Zahlungen in einer Höhe vorliegen, die die Zinssätze ausreichend bestimmt (möglichst hoher Rang der Matrix  $Z$ ).
5. Für die Schätzung ist es erforderlich, daß die Anzahl der unterschiedlichen Zahlungstermine nicht zu groß ist, weil aus methodischen Gründen folgt, daß an jedem Zahlungstermin ein Papier fällig sein muß. Ist das nicht gewährleistet, so ist nicht sicher, daß alle in  $Z \cdot x \geq 0$  enthaltenen  $T$  Nebenbedingungen mit Gleichheit erfüllt sind. Dualvariablen, die zu nicht mit Gleichheit erfüllten Nebenbedingungen gehören, sind Null und nicht als Diskontierungsfaktoren interpretierbar.

Besonders geeignete Datenbasen finden *Carleton* und *Cooper* sowie *Shea* vor. Während erstere für ihre Anwendung des Regressionsverfahrens die günstige Zahlungsstruktur der Staatspapiere in den USA nutzen, die halbjährliche Coupons an nur vier Terminen im Jahr zahlen<sup>17</sup>, greift letzterer für

<sup>15</sup> Vgl. *Faßbender, H.*, Zur Theorie und Empirie der Fristigkeitsstruktur der Zinssätze, Berlin 1973, hier: S. 130f.; *Rosinski, B.*, Zur Zinsstruktur am deutschen Kapitalmarkt, Diss., Berlin 1984, hier: S. 95f.

<sup>16</sup> Vgl. *Bußmann, J.*, Die Bestimmung der Zinsstruktur am deutschen Kapitalmarkt, in: *KuK* 22 (1989), S. 117 - 137, hier: S. 122.

<sup>17</sup> Vgl. *Carleton, W. T.*, *Cooper, I. A.*, a.a.O., hier: S. 1073ff.

die Anwendung seines Ansatzes auf Diskontpapiere eines japanischen Großkonzerns zurück, die ein vollständiges Restlaufzeiten-Spektrum haben<sup>18</sup>.

Eine ebenso günstige Datenbasis gibt es am deutschen Kapitalmarkt nicht; hier erfüllen die Anleihen der öffentlichen Hand die genannten Anforderungen (1) bis (4) am besten. Insbesondere eignen sich die Anleihen und Obligationen<sup>19</sup> des Bundes, weil sie von In- und Ausländern gleichermaßen als risikofrei angesehen werden, was bei Anleihen von Bahn und Post dem Vernehmen nach nicht der Fall ist. Die derzeit notierten Papiere sind

- unkündbar,
- tarifbesteuert,
- gesamtfällig zu 100 %,
- mit jährlichen Coupons ausgestattet.

1989 und 1990 liefen inklusive der bis Ende Oktober 1990 emittierten Papiere 89 Bundesanleihen<sup>20</sup> und 47 Bundesobligationen um<sup>21</sup>. Die Verteilung der Ursprungslaufzeiten auf die Papiere und die Verteilung der Fälligkeitstermine auf die nächsten Jahre sind in den Tab. 1 und 2 wiedergegeben<sup>22</sup>. Weil nur sehr wenige Anleihen eine größere Restlaufzeit als 10 Jahre haben, wird für eine Schätzung am deutschen Kapitalmarkt das Fristigkeitsintervall auf 0 bis 10 Jahre beschränkt.

Als Vorbereitung der Schätzung<sup>23</sup> muß die Zahlungsmatrix  $Z$  aufgebaut werden, wobei auf eine Einbeziehung der Kassenhaltung aus Gründen der Rechenbarkeit verzichtet wird. Es werden alle Papiere berücksichtigt, bis auf solche,

---

<sup>18</sup> Vgl. *Shea, G. S.*, *The Japanese Term Structure of Interest Rates*, unveröffentlichte Diss., University of Washington 1982, hier: S. 1 und 102.

<sup>19</sup> Die Einschränkung des Erwerberkreises der Daueremission Bundesobligation fällt nicht ins Gewicht, weil sich die Untersuchung auf den Sekundärmarkt bezieht.

<sup>20</sup> Sowie eine hier nicht berücksichtigte Floating Rate Note.

<sup>21</sup> Die Kurse wurden dem Handelsblatt entnommen; die Konditionen wurden entnommen aus: Verlag Hoppenstedt & Co (Hrsg.), *Der Rentenführer. Handbuch der festverzinslichen Werte*, Band 1, Öffentliche Anleihen, Darmstadt.

<sup>22</sup> Alle Tabellen und graphischen Übersichten befinden sich in Anhang II.

<sup>23</sup> Es erscheint nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, daß „Schätzung“ hier nicht im Sinne des statistisch-ökonomischen Bedeutungsinhaltes dieses Begriffs gemeint ist; es handelt sich hierbei auch nicht um den „Test einer Hypothese“; insofern wäre auch eine Trennung des Datenmaterials in eine Schätzstichprobe und eine Prüfstichprobe sinnlos. „Fehlbewertungen“ in der Prüfstichprobe mit der in der Schätzstichprobe ermittelten Zinsstruktur würden nur auf relative Arbitragemöglichkeiten zwischen Anleihen beider Stichproben hindeuten.

- deren Restlaufzeit größer als 10 Jahre ist,
- deren Notiz wegen ihrer nahen Fälligkeit bereits ausgesetzt ist<sup>24</sup> und
- die noch nicht an der Börse eingeführt sind.

Es werden alle Zahlungen nach dem Betrachtungszeitpunkt in  $Z$  aufgenommen, außer bereits getrennten Coupons.

Die Zahlungsmatrix enthält sehr viele verschiedene Zahlungstermine, weil die bis Februar 1984 emittierten Papiere Zinsen an einem Monatsersten, die seitdem emittierten an einem Monatszwanzigsten zahlen. Jedoch gibt es auch Abweichungen, so daß der 18., 21. und 22. ebenfalls als Zinstermin vorkommen. Z.B. verteilen sich die 527 einzelnen Zahlungen, die aus den am 2. 1. 89 einzubeziehenden 110 Papieren fließen, auf 270 Termine. Damit ist Anforderung 5 durch die beschriebene Datenbasis nicht erfüllt.

## 2. Methodische Probleme: Die Zusammenfassung der Zahlungsmatrix

Anforderung 5 kann künstlich erfüllt werden, indem die Zahlungstermine so zusammengefaßt werden, daß an jedem der verbleibenden Termine mindestens ein Papier fällig wird. Sofern man die Zahlungen auf äquidistante Zeitpunkte verschieben will, kommt am deutschen Kapitalmarkt nur ein mindestens quartalsweiser Abstand in Frage.

Die verschobenen Zahlungen müssen prinzipiell um die für den Verschiebungszeitraum anfallenden „richtigen“ Zinsen korrigiert werden, weil sonst mit einer Verzerrung der Ergebnisse zu rechnen ist. Die Verzerrung nimmt mit zunehmender Fristigkeit ab, weil der Verschiebungszeitraum relativ immer kleiner wird. In der Literatur finden sich zwei Hinweise auf das Problem notwendiger Zusammenfassung von Zahlungsterminen und wie im konkreten Fall damit umgegangen wurde:

*Nuske* schlägt vor, die Zahlungen jahresweise zusammenzufassen, um wie *Carleton* und *Cooper* eine Regression gemäß (25) mit der Norm  $\| \cdot \|_2$  durchzuführen<sup>25</sup>. Dabei erwähnt er aber nicht, ob und wie die zu verschiebenden Zahlungen auf- oder abzuzinsen sind.

Auch *Bußmann* führt eine Regressionsschätzung durch<sup>26</sup>. Er verschiebt die Zahlungen auf quartalsweise Abstände vom Schätzzeitpunkt und korrigiert die Marktpreise um pro rata temporis verrechnete Stückzinsen<sup>27</sup>. Auch

<sup>24</sup> Das ist ab dem Coupontrenntag vor dem Rückzahlungstermin der Fall.

<sup>25</sup> Vgl. *Nuske, M.*, a.a.O., hier: S. 6 f.

<sup>26</sup> Vgl. *Bußmann*, a.a.O., hier: S. 123.

<sup>27</sup> *Bußmann*, a.a.O., hier: S. 123.



dieses Vorgehen ist nicht einwandfrei. Stückzinsen sind ein anteiliger Couponbetrag, der für die Frist zwischen Handelstag und letztem (oder nächstem) Zinstermin verrechnet wird. Die Verschiebung der Zahlungen in allen zukünftigen Jahren verändert aber die Fristigkeiten der Zahlungen. Deshalb ist es erforderlich, die Zahlungsmatrix und nicht den Preisvektor zu korrigieren.

Weil der theoretisch richtige Zinssatz für die Auf- oder Abzinsung der implizite Terminzinssatz für den Verschiebungszeitraum ist, wird in unserer Analyse dieser – in der Ausgangssituation unbekannt – Zinssatz durch ein iteratives Verfahren in Verbindung mit Interpolationen auf der Basis der Exponentialfunktion näherungsweise bestimmt<sup>28</sup>.

### 3. Implementierung der entwickelten Methoden

Die Berechnungen wurden auf einem IBM PS/2 Modell 70 mit mathematischem Coprozessor unter Benutzung der IMSL-Bibliothek<sup>29</sup> durchgeführt<sup>30</sup>.

Es wurden die linearen Programme (29) und (30) gerechnet (aus Dimensionsgründen mußte auf die Einbeziehung der Kassenhaltung verzichtet werden) sowie die Regression in der Form

$$(31) \quad P = Z' \cdot Q + \varepsilon$$

Die Ergebnisse der verschiedenen Berechnungen werden in drei Schritten dargestellt: Zunächst wird anhand von (30) der methodische Aspekt verdeutlicht, indem die Ergebnisveränderung im iterativen Verfahren der Zusammenfassung der Zahlungsmatrix erläutert wird. Dann erfolgt ein exemplarischer Vergleich der Ergebnisse aller drei Ansätze am Beispiel<sup>31</sup> des 2. 1. 89 und schließlich eine Betrachtung der Zinsstruktur-Entwicklung in den Jahren 1989 und 1990.

---

<sup>28</sup> Für die technischen Details steht dem interessierten Leser auf Anforderung ein Arbeitspapier zur Verfügung.

<sup>29</sup> Vgl. die Prozeduren DLPRS (IMSL Inc. (Hrsg.), User's Manual: Math/Library – FORTRAN Subroutines for Mathematical Applications, Houston 1989, S. 888 - 891) und RGIVN (IMSL Inc. (Hrsg.), User's Manual: Stat/Library – FORTRAN Subroutines for Statistical Analysis, Houston 1989, S. 109 - 120).

<sup>30</sup> Für die Durchführung der umfangreichen Programmierarbeiten sei an dieser Stelle Herrn stud. rer. pol. Dipl.-Ing. (FH) *Max Jetzlsperger* ganz herzlich gedankt.

<sup>31</sup> Es versteht sich von selbst, daß die genannten Ansätze für alle einbezogenen Betrachtungszeitpunkte gerechnet wurden; das hier näher erläuterte Beispiel ist jedoch repräsentativ.

Tab. 3 stellt für einige Termine, die den Zeitraum der Untersuchung abdecken (Die Auswahl der Termine orientierte sich unter anderem an den empirischen Gegebenheiten; so wurden z.B. keine Termine einbezogen, an denen nur eine halbjahresweise Zusammenfassung der Zahlungstermine möglich gewesen wäre), die absoluten und relativen Arbitragegewinne aus den ersten drei Iterationsschritten je Termin für den Ansatz (30) zusammen. Die absoluten Werte sind gleich  $-(P' | -P') \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}$ , also dem (positiven) optimalen Wert der Zielfunktion des Arbitrageprogramms. Bei der Interpretation der Zielfunktionswerte als Arbitragegewinne ist folgendes zu beachten:

Die Höhe der errechneten Arbitragegewinne wird maßgeblich von der Art der vorgenommenen Arbitragebeschränkung und der Anzahl der einbezogenen Papiere bestimmt. Das wird beim Vergleich der drei Ansätze noch deutlicher werden.

Aufgrund der Vielzahl von Zahlungsterminen am deutschen Markt ist es nicht möglich, Arbitrageportefeuilles so zu strukturieren, daß in allen (tatsächlichen) zukünftigen Zahlungszeitpunkten sich die Zahlungen aus allen Papieren ausgleichen, also die Nebenbedingung  $Z \cdot x \geq 0$  für die nicht zusammengefaßte Zahlungsmatrix erfüllen. Je nach Zusammenfassung der Zahlungsmatrix bedeutet  $Z \cdot x \geq 0$  nur, daß sich die Zahlungen innerhalb eines  $F$ -tel Jahres (unter Berücksichtigung von Auf-/Abzinsung zur Mitte dieses Zeitraumes) ausgleichen müssen<sup>32</sup>.

Geht man nun von der Vorstellung aus, daß der Markt prinzipiell zur Arbitragefreiheit neigt, so bedeutet jenes Ergebnis die beste Anpassung an die Marktdaten, bei dem der mögliche Arbitragegewinn am kleinsten ist. Die in diesem Sinne besten Ergebnisse sind in Tab. 3 durch Unterstreichung gekennzeichnet. Weil ein vierter Rechenschritt in der Regel keine oder nur eine sehr geringe Verbesserung mit sich bringt, enthält Tab. 3 nur die Ergebnisse der ersten drei Schritte.

Verschlechterungen der Ergebnisse (im Sinne von bei weiteren Schritten zunehmenden Arbitragegewinnen) beruhen darauf, daß es entweder durch die Zusammenfassung zu methodisch bedingter Schätzung negativer impliziter Terminzinssätze kommt (Verletzung der Bedingungen (20)) oder am Markt tatsächlich (im Zusammenhang mit der Möglichkeit der Kassenhaltung) die Arbitragefreiheit verletzende negative implizite Terminzinssätze vorkommen. Diese werden in den Folgeschritten der Iteration durch die

---

<sup>32</sup>  $F$  ist die datenmaterialbedingte Anzahl der zu berücksichtigenden Zahlungstermine pro Jahr. Für die technischen Einzelheiten muß wieder auf das schon erwähnte Arbeitspapier verwiesen werden.

Interpolation noch verstärkt, so daß weitere Berechnungen dann nicht mehr sinnvoll sind.

Um die Höhe der Arbitragegewinne vergleichen zu können, wurden die relativen Arbitragegewinne errechnet. Bei ihnen handelt es sich um den Quotienten aus absolutem Arbitragegewinn und dem Wert des zu seiner Erzielung erforderlichen Gesamtumsatzes  $(P' | P') \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}$ , wobei die Angaben Prozentwerte sind. Die besten Werte liegen in der Regel unter 0,5 %.

Selbst in einem effizienten Markt muß der relative Arbitragegewinn nicht unter die Höhe der Transaktionskosten sinken. Die Frage ist also, ob ein Nettoarbitragegewinn nach Transaktionskosten erzielt werden kann. Zumindest für den privaten Bankkunden dürfte dies zu verneinen sein, da er in der Regel 0,5 % Provision zuzüglich 0,08 % Makler-Courtage zahlen muß. Insofern kommen nur institutionelle Anleger für die Ausnutzung der Arbitragemöglichkeiten in Betracht. Die Höhe des Transaktionskosten-Satzes, mit dem diese kalkulieren, ist nicht einheitlich und auch nicht der Öffentlichkeit zugänglich. Darüber hinaus ist nicht sicher, daß institutionelle Anleger die bestehenden Arbitragemöglichkeiten erkennen, weil sie häufig die irreführende Rendite als Auswahlkriterium verwenden. Aus diesen Überlegungen folgt, daß die Höhe der in der Untersuchung errechneten Arbitragegewinne nicht im Widerspruch zur Annahme eines im wesentlichen effizienten Marktes steht.

Aufgrund der oben gemachten Anmerkung über die Bedeutung der Nebenbedingungen  $Z \cdot x \geq 0$  ist es verständlich, daß der erzielbare Arbitragegewinn um so größer ist, je länger der Zusammenfassungszeitraum ist: Wenn der Ausgleich der Zahlungen nicht innerhalb eines Quartals, sondern nur innerhalb von vier Monaten verlangt wird<sup>33</sup>, so ist die Zusammenstellung von Arbitrageportefeuilles weniger stark restringiert, weil die Nebenbedingungen im LP weniger streng sind. Allerdings erfordert der höhere Arbitragegewinn die Inkaufnahme von zwischenzeitlichen (Aus-)Zahlungsströmen, deren in der Methode unterstellte Eindeckung zu impliziten Terminzinssätzen am Markt sicher nicht realisiert werden kann. Die Exaktheit der Rechnung leidet hier natürlich auch unter der durch Zusammenfassung noch stärkeren Abweichung von der wahren Zahlungsstruktur.

Die minimalen absoluten Arbitragegewinne, die mit den drei Ansätzen für den beispielhaft herausgegriffenen Termin 2. 1. 89 errechnet wurden, betragen:

<sup>33</sup> Wenn also  $F = 3$  statt  $F = 4$  gilt.

Ansatz (29): 0,9438 (Gesamtvolumensbeschränkung)

Ansatz (30): 25,9689 (Einzelvolumensbeschränkung)

Ansatz (31): 4,0336 (Regressionsansatz)

Der große Unterschied zwischen den Werten läßt vermuten, daß die absoluten Zahlen als Kriterium für den Gütevergleich zwischen den Ansätzen unbrauchbar sind. Die folgende Zusammenstellung der Arbitragebeschränkungen und der daraus resultierenden (und dazu dualen) Approximationsnormen verdeutlicht den Grund:

Ansatz	Arbitragebeschränkung	Approximationsnorm
(29)	$\ x\ _1 \leq 1$ oder $\sum_{i=1}^n  x_i  \leq 1$	$\ P-Q'Z\ _\infty = \max\{ P_i-Q'Z_i  \mid i=1, \dots, n\}$
(30)	$\ x\ _\infty \leq 1$ oder $ x_i  \leq 1$ für alle $i=1, \dots, n$	$\ P-Q'Z\ _1 = \sum_{i=1}^n  P_i-Q'Z_i $
(31)	$\ x\ _2 \leq 1$ oder $(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$	$\ P-Q'Z\ _2 = \left[ \sum_{i=1}^n (P_i-Q'Z_i)^2 \right]^{1/2}$

Da der optimale Zielfunktionswert des Arbitrageprogramms und der optimale Wert der Approximationszielgröße aus Dualitätsgründen gleich sind, kann die unterschiedliche Höhe des Arbitragegewinns auch anhand der Approximationsnorm erklärt werden. Bei Ansatz (29) ist diese die größte absolute Abweichung von Preis und Barwert für die einzelnen Papiere. Der Arbitragegewinn wird also durch ein einziges Papier bestimmt. Dagegen gehen bei (30) und (31) die Abweichungen aller Papiere – wenn auch mit unterschiedlicher Gewichtung – in die Summe ein, die die Zielfunktion darstellt. Insofern ist bei diesen Ansätzen der Arbitragegewinn auch von der Anzahl der einbezogenen Papiere abhängig.



Die Beurteilung der Ansätze kann also nur über eine Interpretation der Arbitragebeschränkungen selbst erfolgen (die ja ihrerseits wieder die Approximationsnormen bestimmen). Hierbei gilt folgendes:

Beim Ansatz (29) wird der Arbitrageur bestrebt sein, genau das Papier umzusetzen, bei dem die Abweichung von Preis und Barwert (also die Fehlbewertung) am größten ist. Die Beachtung der Nebenbedingung  $Z \cdot x \geq 0$  führt dann zu folgenden Umsätzen (vgl. Tab. 4, Spalten 1 und 2):

- (a) Kauf (Verkauf) des am stärksten unter(über)bewerteten Papiers,
- (b) Verkauf (Kauf) des Papiers, das von denen, die in demselben Zusammenfassungszeitraum fällig werden, am stärksten über(unter)bewertet ist, sowie
- (c) kleinere Ausgleichsumsätze, die für die Couponzahlungstermine vor der Fälligkeit der beiden Papiere für einen Ausgleich der Couponhöhe sorgen.

Die Summe der Umsätze bedarf dabei natürlich 1 (bzw. 100 in Tab. 4, vgl. die dortige Anmerkung) nicht übersteigen. Es wird an dieser Stelle anschaulich verständlich, warum diese Arbitragebeschränkung die genannte Approximationsnorm bedingt. Wenn der Markt nämlich in dieser Weise funktioniert, dann werden alle Arbitrageure sich immer (im Rahmen der Beschränkung) auf das (eine) Papier, das den höchsten Arbitragegewinn verspricht, konzentrieren (Ein-Papier-Arbitragestrategie). Dadurch wird aber der Preis dieses Papiers reagieren, wodurch über kurz oder lang ein anderes Papier die Rolle übernimmt, den maximalen Arbitragegewinn zu versprechen. Also schalten die Arbitrageure um, woraufhin wieder eine Preisreaktion ausgelöst wird usw. Dieses Verhalten führt dann genau dazu, daß der maximal mit einem Papier mögliche Arbitragegewinn minimiert wird, was der Approximationsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  entspricht. Im Ergebnis würde der Markt also über Umsätze – und somit Preisänderungen – schwerpunktmäßig in jeweils einem einzelnen Papier reguliert. Ein solcher Marktmechanismus dürfte zu schwerfällig sein, weshalb nicht anzunehmen ist, daß die Arbitragebeschränkung des Ansatzes (29) den Markt zutreffend abbildet.

Die Beschränkungen der Ansätze (30) und (31) führen zur Verwirklichung von komplexeren Portfolio-Arbitragestrategien, was eher der Realität entsprechen dürfte. Während bei (30) jedes fehlerbewertete Papier umgesetzt werden kann (vorausgesetzt  $Z \cdot x \geq 0$  bleibt gewährleistet) (vgl. Tab. 4, Spalten 3 und 4), belastet bei (31) der zusätzliche Umsatz in einem Papier die Beschränkung überproportional. Die Strategien von (29) und (30) sind hier beide prinzipiell möglich: Der Arbitrageur kann sich auf ein Papier konzentrieren und dies bis zur Kapazitätsgrenze umsetzen, die dann aber

durch die Quadrierung sehr schnell erreicht ist, d. h. er kann nur sehr wenig Stücke umsetzen. Verteilt er seinen Umsatz gleichmäßig auf mehrere Papiere, kann er zwar am meisten Stücke umsetzen, läßt aber die Chance aus, durch Umsatzerhöhung bei besonders fehlbewerteten Papieren und (entsprechend stärkere) Umsatzverringerung bei weniger fehlbewerteten Papieren zusätzlichen Arbitragegewinn zu realisieren. Dadurch bedeutet also (31) nicht nur approximationstheoretisch, sondern auch anschaulich eine „Mischung“ der Ansätze (29) und (30). Tab. 4 enthält kein Beispielporfeuille des Ansatzes (31), weil dieser Ansatz mit Hilfe einer Regressionsprozedur, d. h. durch direkte Lösung des dualen Problems realisiert wurde. Die Portefeuilles können aber nur als primale Lösung der betreffenden Probleme gefunden werden; das zum Regressionsansatz gehörende primale Problem ist aber ein quadratisches Optimierungsproblem.

Die Überlegung zu der Realitätsferne der Beschränkung des Ansatzes (29) erklärt, warum die Schätzergebnisse mit diesem Ansatz die am wenigsten Überzeugenden waren. Dies ist beispielhaft an der Graphik der Zinsstrukturkurve am 2. 1. 89 zu erkennen. Während die Zinssätze aus den Schätzungen nach (30) und (31) nur wenig voneinander abweichen, fällt (29) aus dem Rahmen, weshalb in den anderen Graphiken auf eine Darstellung der (natürlich auch für diese Fälle berechneten) Schätzung nach (29) verzichtet wurde. Die schlechte Qualität dieser Schätzung zeigt sich auch darin, daß schon beim ersten Rechenschritt für zwei zukünftige Dreimonatszeiträume negative implizite Terminzinssätze resultieren (am 2. 1. 89, die Situation ist an anderen Terminen vergleichbar), die dann natürlich zu einer deutlichen Ergebnisverschlechterung durch das iterative Verfahren führen.

Die auf Basis der Ergebnisse der Schätzung nach (30) erstellte Graphik „Zinsdifferenzen 1989/1990“ verdeutlicht, daß während des gesamten Untersuchungszeitraumes keine ausgeprägt normalen oder inversen Zinsstrukturen vorkamen, die Zinsstruktur also überwiegend flach war. Die Zinssatzdifferenz zwischen ein- und zehnjähriger Fristigkeit lag an keinem Zeitpunkt über einem Prozentpunkt (absolut).

Die Graphik „Zinsentwicklung 1989/1990“ verdeutlicht, daß die entscheidende Veränderung des Zinsgefüges eine rapide Zinsniveausteigerung zwischen November 1989 und März 1990 war. Dieser Sprung des Zinsniveaus von ca. 7 % p. a. auf ca. 9 % p. a. erfolgte aufgrund der politischen Ereignisse, als deutlich wurde, daß der deutsche Kapitalmarkt für Investitionen in den heutigen neuen Bundesländern erheblich in Anspruch genommen werden würde. Die übrigen Graphiken zeigen diesen Prozeß in weiterer Detaillierung hinsichtlich der Zeitstruktur.

**Anhang I: Die dualitätstheoretische Hauptaussage**

## Die Aufgabe

$$(*) \quad \min \{ P' \cdot x \mid Z \cdot x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \alpha \}$$

mit einer beliebigen Vektornorm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^n$ , der Menge der Bond-Portfolios, ist als primale Aufgabe wie folgt zu verstehen:

$$p(x) := P' \cdot x \quad \text{ist lineares Funktional auf } X = \mathbb{R}^n$$

$$Z(x) := Z \cdot x \quad \text{ist lineare Transformation } Z : X \rightarrow Y = \mathbb{R}^T$$

und daher ist die Aufgabe auch als

$$\min \{ p(x) \mid Z(x) \geq 0, x \in X, \|x\| \leq \alpha \}$$

zu formulieren.

Sei  $\lambda$  ein lineares Funktional auf  $Y$ , dann wird definiert

$$g(\lambda) := \inf \{ p(x) - \lambda(Z(x)) \mid x \in X, \|x\| \leq \alpha \}$$

$g$  ist eine Abbildung  $g: Y^* \rightarrow \mathbb{R}$  des Dualraumes von  $Y$  in die reellen Zahlen.

Die duale Aufgabe lautet nun<sup>1</sup>:

$$(**) \quad \max \{ g(\lambda) \mid \lambda \in Y^*, \lambda \geq 0 \}.$$

Wir betrachten die Zielfunktion der dualen Aufgabe näher:

$$g(\lambda) = \inf \{ p(x) - \lambda(Z(x)) \mid x \in X, \|x\| \leq \alpha \}$$

Wegen  $\|x\| \leq \alpha \Rightarrow \|-x\| \leq \alpha$  und  $p(-x) - \lambda(Z(-x)) = -\{p(x) - \lambda(Z(x))\}$  gilt

$$\begin{aligned} \inf \{ p(x) - \lambda(Z(x)) \mid x \in X, \|x\| \leq \alpha \} &= \\ &= - \sup \{ |p(x) - \lambda(Z(x))| \mid x \in X, \|x\| \leq \alpha \} \\ &= -\alpha \sup \{ |p(x) - \lambda(Z(x))| \mid x \in X, \|x\| \leq 1 \} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Vgl. Rockafellar, R. T., Generalized Subgradients in Mathematical Programming, in: A. Bachem, M. Grötschel, B. Korte (Hrsg.), Mathematical Programming – The State of the Art, Bonn 1982, Springer Verlag: Berlin et al. 1983, S. 368 - 390, hier: S. 370.

Nun ist aber  $p - \lambda \circ Z$  ein lineares Funktional auf  $X$  und daher gilt nach Definition für dessen Norm<sup>2</sup>

$$\|p - \lambda \circ Z\| = \sup \{ |p(x) - \lambda(Z(x))| \mid x \in X, \|x\| \leq 1 \}$$

mit anderen Worten es gilt

$$g(\lambda) = -\alpha \|p - \lambda \circ Z\|,$$

wobei hier  $\|\cdot\|$  die Norm des Dualraumes  $X^*$  ist, d.h. die zur Ausgangsnorm duale Norm. Daher gilt nun für die zu (\*) duale Aufgabe

$$\begin{aligned} & \sup \{ -\alpha \|p - \lambda \circ Z\| \mid \lambda \in Y^*, \lambda \geq 0 \} \\ &= -\alpha \inf \{ \|p - \lambda \circ Z\| \mid \lambda \in Y^*, \lambda \geq 0 \} \end{aligned}$$

d.h. Inhalt der zu (\*) dualen Aufgabe ist es, jenes lineare Funktional  $\lambda$  auf  $Y$  zu suchen, das den Abstand zwischen  $p$  und dem durch  $\lambda$  dargestellten Barwert von  $Z$  möglichst klein macht. Dieses lineare Funktional ist identisch mit dem gesuchten Vektor von Diskontierungsfaktoren. In den Fällen, in denen (\*) ein lineares Programm ist (für die  $L_p$ -Normen mit  $p = 1$  und  $p = \infty$ ), kann man daher durch Lösen der primalen Aufgabe (\*) die gleichzeitig mit berechneten Dualvariablen als Lösung der dualen Aufgabe (\*\*) und daher als approximative Diskontierungsfaktoren auffassen.

## Anhang II: Tabellen und graphische Übersichten

Tabelle 1

Ursprungslaufzeiten

Ursprungslaufzeit	Anzahl Anleihen	Anzahl Obligationen
5 Jahre	–	47
8 Jahre	3	–
10 Jahre	81	–
12 Jahre	3	–
15 Jahre	1	–
30 Jahre	2	–
	90	47

<sup>2</sup> Bachman, G., Narici, L., Functional Analysis, Academic Press: New York – London 1966, S. 184.

Tabelle 2

## Verteilung der Fälligkeiten auf Kalenderquartale

Quartal	Anzahl Papiere	Quartal	Anzahl Papiere
I 1989	2	I 1996	2
II 89	3	II 96	1
III 89	5	III 96	2
IV 89	4	IV 96	1
I 1990	2	I 1997	3
II 90	4	II 97	1
III 90	3	III 97	3
IV 90	4	IV 97	1
I 1991	2	I 1998	3
II 91	4	II 98	2
III 91	4	III 98	2
IV 91	3	IV 98	3
I 1992	3	I 1999	3
II 92	4	II 99	2
III 92	5	III 99	1
IV 92	3	IV 99	2
I 1993	5	I 2000	2
II 93	3	II 00	1
III 93	3	III 00	1
IV 93	5	IV 00	–
I 1994	5	II 2016	1
II 94	2	III 2016	1
III 94	4		
IV 94	3		
I 1995	6		
II 95	4		
III 95	2		
IV 95	1		



Tabelle 3

## Arbitragegewinne bei LP (30)

Datum	F	absolut			relativ (in %)		
		Rechenschritte			Rechenschritte		
		1	2	3	1	2	3
02.01.89	4	33,7037	26,7115	<u>25,9689</u>	0,3567	0,2772	<u>0,2639</u>
07.02.89	4	34,7868	33,5600	<u>32,8729</u>	0,3750	0,3458	<u>0,3395</u>
15.03.89	4	35,8349	35,2201	<u>33,9589</u>	0,3960	0,3727	<u>0,3674</u>
20.04.89	3	49,1357	<u>31,5648</u>	33,6718	0,4897	<u>0,3155</u>	<u>0,3297</u>
26.05.89	4	49,3116	<u>44,4945</u>	44,9640	0,5389	<u>0,4761</u>	<u>0,4810</u>
03.07.89	4	43,3061	<u>32,8077</u>	<u>32,3457</u>	0,4703	<u>0,3476</u>	<u>0,3497</u>
10.08.89	4	44,6904	43,7505	<u>42,1138</u>	0,5033	<u>0,4716</u>	<u>0,4440</u>
15.09.89	4	44,4025	41,2062	<u>38,7547</u>	0,5060	0,4592	<u>0,4402</u>
19.10.89	3	60,5063	<u>34,6285</u>	<u>34,7763</u>	0,6327	<u>0,3629</u>	<u>0,3655</u>
14.12.89	4	45,9813	<u>45,3945</u>	<u>43,8952</u>	0,5349	<u>0,5283</u>	<u>0,4987</u>
09.01.90	3	64,2048	<u>51,6653</u>	<u>52,0855</u>	0,6776	<u>0,5341</u>	<u>0,5507</u>
06.02.90	4	46,8410	<u>43,9151</u>	44,2703	0,5214	<u>0,4787</u>	<u>0,4922</u>
15.03.90	4	49,3792	<u>47,1779</u>	<u>45,9518</u>	0,5706	<u>0,5349</u>	<u>0,5323</u>
20.04.90	3	65,1394	<u>40,2873</u>	40,4139	0,6803	<u>0,4056</u>	<u>0,4223</u>
28.05.90	4	48,6457	<u>41,7706</u>	<u>40,6730</u>	0,5392	<u>0,4617</u>	<u>0,4685</u>
06.07.90	3	73,7399	<u>68,2042</u>	<u>68,8184</u>	0,8290	<u>0,7224</u>	<u>0,7254</u>
05.09.90	4	50,3482	<u>29,7718</u>	<u>27,6589</u>	0,5669	<u>0,3300</u>	<u>0,2999</u>
23.10.90	3	66,6338	62,2733	<u>62,2425</u>	0,7696	0,7216	<u>0,7064</u>
Mittelwert:		50,3662	41,9113	41,4131	0,5532	0,4526	0,4487
Stand.abw.:		11,4041	10,8304	11,1087	0,1269	0,1260	0,1267
					absolut	relativ	
Mittelwert der besten Ergebnisse:					41,1776	0,4443	
Stand.abw. der besten Ergebnisse:					11,0854	0,1264	
Mittelwert der (F=4)-Berechnungen:					37,7170	0,4125	
Stand.abw. der (F=4)-Berechnungen:					6,9092	0,0857	
Mittelwert der (F=3)-Berechnungen:					48,0988	0,5078	
Stand.abw. der (F=3)-Berechnungen:					15,0521	0,1758	

Tabelle 4

**Arbitrageportefeuilles bei LP (29) und LP (30) am 2.1.89**  
 (Der Anschaulichkeit halber wurden die Umsätze mit 100 multipliziert.  
 Das entspricht  $\alpha = 100$  in (26))

Wertpapier- kennnummer	(29)		(30)	
	Käufe	Verkäufe	Käufe	Verkäufe
114046	.00	.00	91.09	.00
114047	.00	.00	100.00	.00
110092	.00	.00	.00	100.00
113404	.00	.00	.00	100.00
110094	.00	.00	.00	100.00
110096	.00	.00	.00	100.00
114048	.00	.00	92.51	.00
110097	.00	.00	100.00	.00
110098	.00	0.80	100.00	.00
114049	.00	.00	.00	10.66
114050	.00	.00	100.00	.00
114051	.00	.00	.00	100.00
110099	.00	.00	.00	100.00
114052	.00	.00	.00	100.00
110100	.00	.00	91.08	.00
114053	.00	.00	.00	100.00
113400	.00	.00	100.00	.00
114054	.00	.00	.00	100.00
110083	.00	.00	89.46	.00
114055	.00	.00	.00	100.00
113401	.00	.00	.00	8.49
114056	.00	.00	100.00	.00
114057	.00	0.86	.00	100.00
113402	.00	.00	.00	9.86
113415	.00	.00	100.00	.00
114058	.00	.00	.00	100.00
114059	.00	.00	.00	100.00
114060	.00	.00	100.00	.00
113403	.00	.00	93.09	.00
114061	.00	.00	89.99	.00
114062	.00	.00	.00	100.00
114063	.00	.00	.00	100.00
113419	.00	.00	.00	9.46
113405	.00	.00	100.00	.00
114064	.00	0.91	88.88	.00
113406	.00	.00	100.00	.00
114065	.00	.00	.00	100.00
114066	.00	.00	.00	100.00
113407	.00	.00	100.00	.00

Tabelle 4 (Fortsetzung)

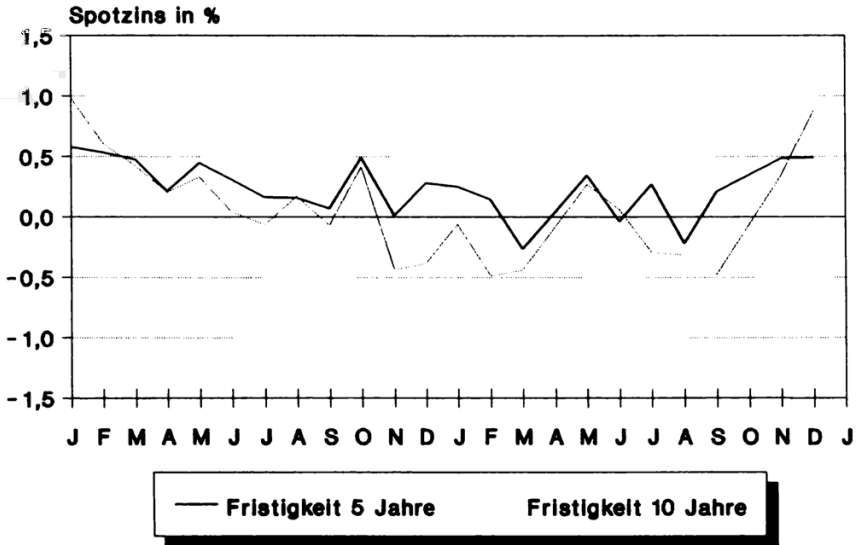
Wertpapier- kennnummer	(29)		(30)	
	Käufe	Verkäufe	Käufe	Verkäufe
114067	.00	.00	.00	100.00
113408	.00	.00	.00	7.87
114068	.00	.00	.00	100.00
113409	.00	.00	100.00	.00
113410	.00	.00	.00	9.88
114069	.00	.00	.00	100.00
113411	.00	.00	100.00	.00
113412	.00	.00	93.06	100.00
114070	.00	.00	.00	100.00
113413	.00	.00	100.00	.00
114071	.00	0.96	.00	100.00
113414	.00	.00	100.00	.00
114072	.00	.00	94.27	.00
114073	.00	.00	.00	100.00
114074	.00	.00	.00	100.00
113416	.00	.00	.00	3.21
113417	.00	.00	100.00	.00
114075	.00	.00	.00	100.00
110080	.00	.00	97.01	.00
113418	.00	.00	100.00	.00
114076	.00	.00	.00	100.00
114077	.00	.00	.00	3.95
114078	.00	.00	.00	100.00
113420	.00	.00	100.00	.00
113421	.00	.00	.00	100.00
113422	.00	.00	100.00	.00
114079	.00	48.74	.00	100.00
113423	.00	.00	96.96	.00
114080	.00	.00	.00	100.00
113424	47.73	.00	100.00	.00
114081	.00	.00	.00	100.00
113425	.00	.00	96.76	.00
113426	.00	.00	.00	100.00
113427	.00	.00	100.00	.00
113428	.00	.00	.37	.00
113429	.00	.00	.00	99.97
113430	.00	.00	100.00	.00
113431	.00	.00	.00	100.00
113432	.00	.00	99.70	.00
113433	.00	.00	.00	99.72
113434	.00	.00	100.00	.00
113435	.00	.00	.00	100.00
113436	.00	.00	.00	.60

Tabelle 4 (Fortsetzung)

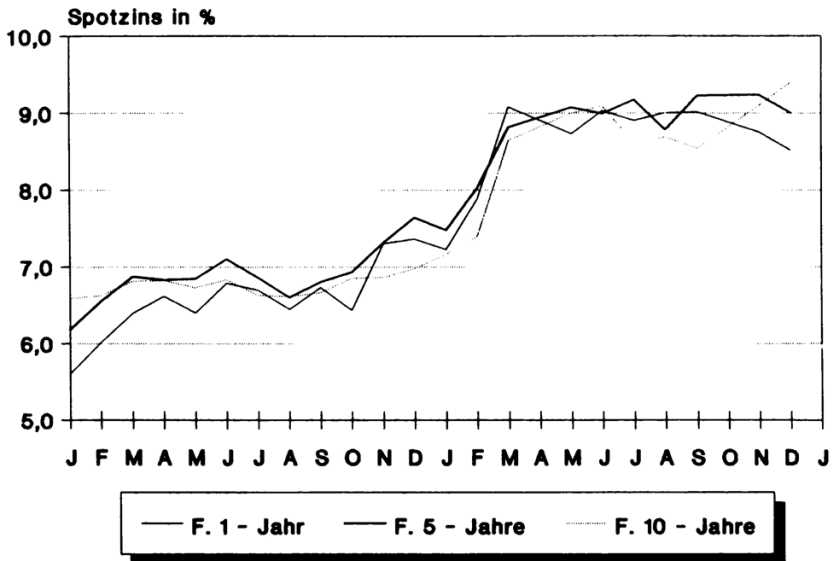
Wertpapier- kennnummer	(29)		(30)	
	Käufe	Verkäufe	Käufe	Verkäufe
113437	.00	.00	100.00	.00
113438	.00	.00	.00	2.98
113439	.00	.00	.00	100.00
113440	.00	.00	100.00	.00
113441	.00	.00	1.04	.00
113442	.00	.00	.33	.00
113443	.00	.00	.30	.00
113445	.00	.00	.00	100.00
113447	.00	.00	99.29	.00
113448	.00	.00	.89	.00
113451	.00	.00	.00	99.57
113452	.00	.00	100.00	.00
113453	.00	.00	99.50	.00
113454	.00	.00	.00	100.00
113455	.00	.00	.00	100.00
113456	.00	.00	99.18	.00
113457	.00	.00	.00	1.58
113458	.00	.00	.00	100.00
113459	.00	.00	100.00	.00
113460	.00	.00	.03	.00
113461	.00	.00	98.29	100.00
113462	.00	.00	.00	100.00
113444	.00	.00	100.00	.00
113463	.00	.00	.00	100.00
113464	.00	.00	99.70	.00
113465	.00	.00	.00	99.67
113450	.00	.00	100.00	.00
113466	.00	.00	99.45	.00
113467	.00	.00	.00	100.00

## Zinsdifferenzen 1989/1990

0.0 = Fristigkeit 1 Jahr



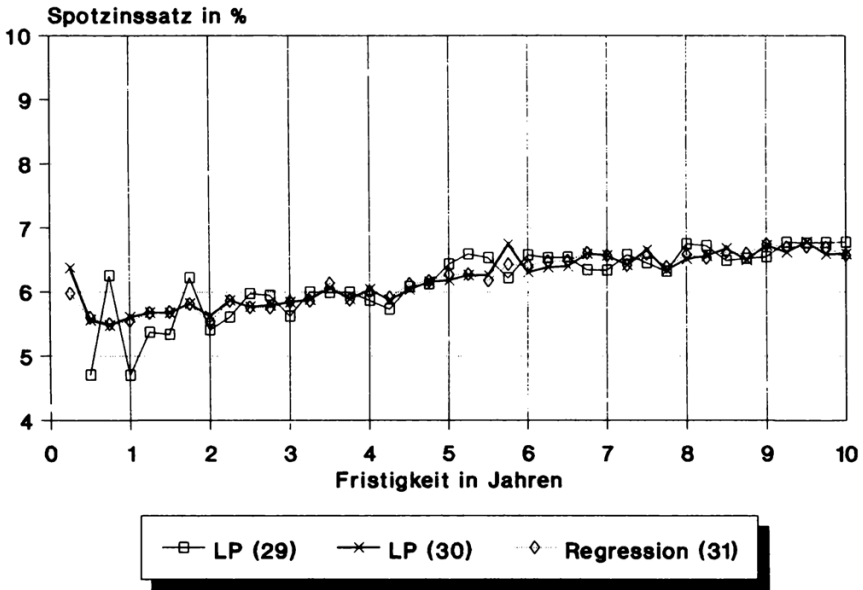
## Zinsentwicklung 1989/1990



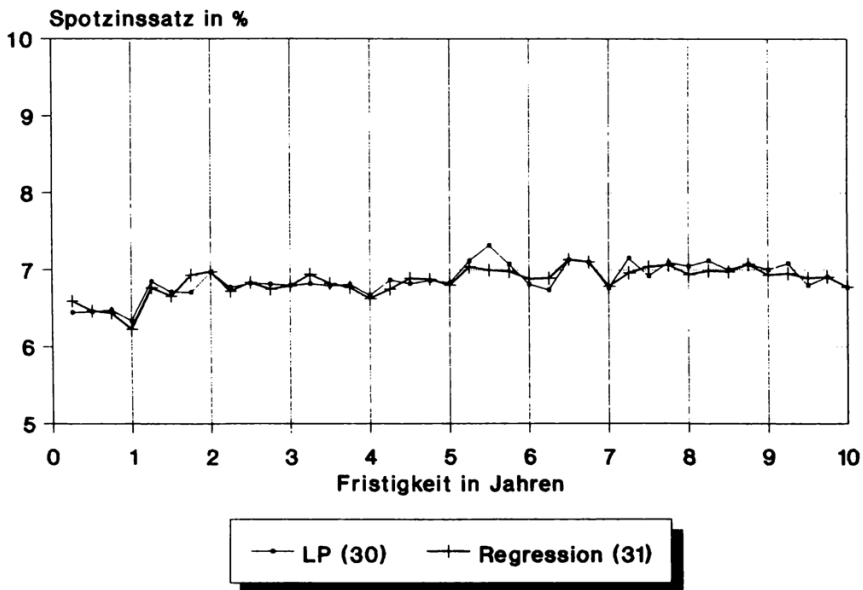
F. : Fristigkeit



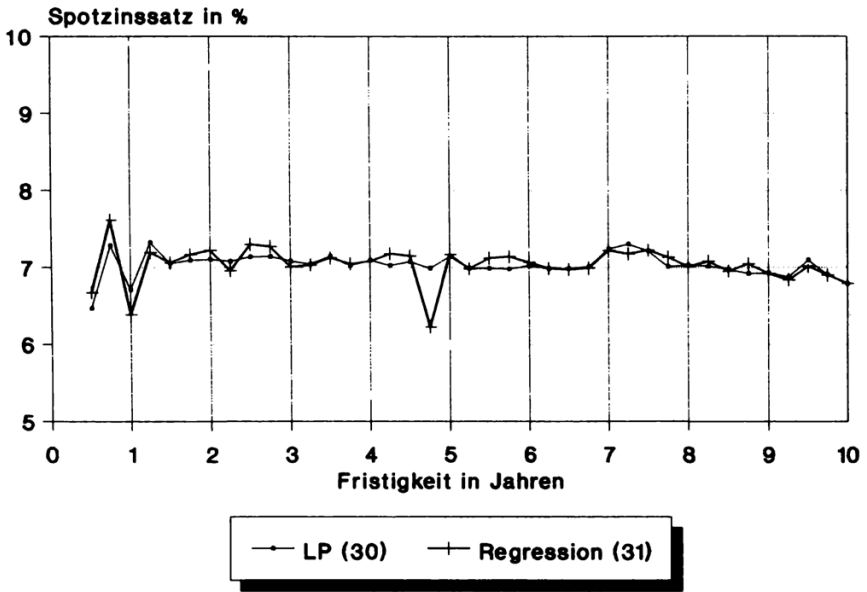
### Zinsstrukturkurve 02.01.1989



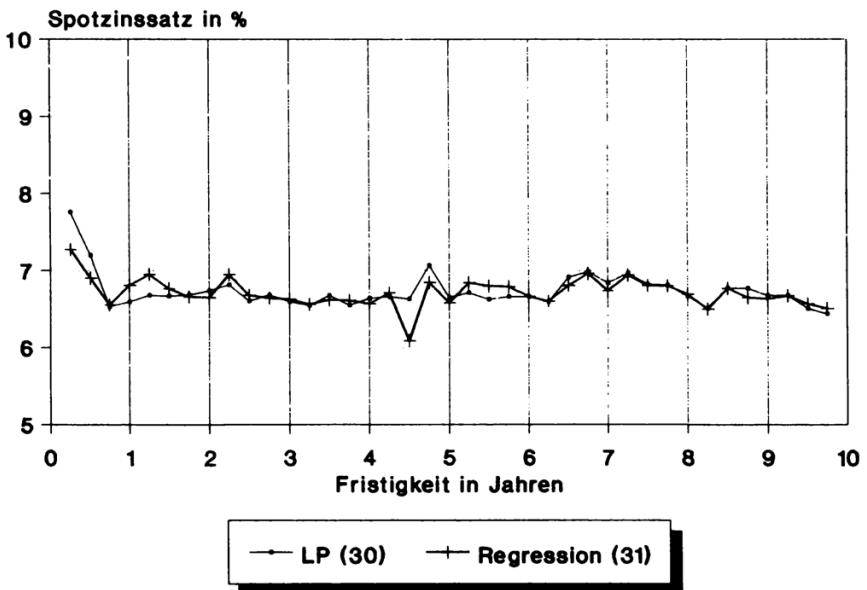
### Zinsstrukturkurve 15.03.1989



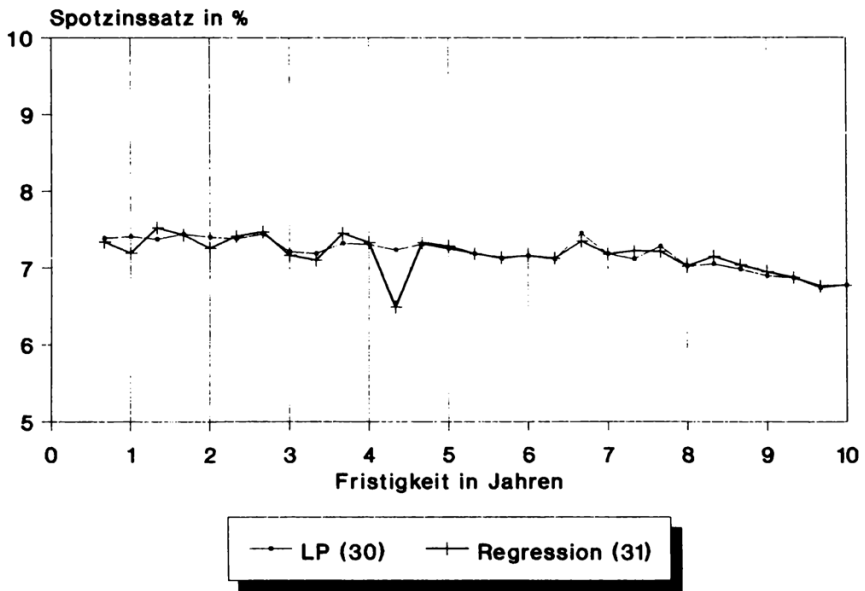
### Zinsstrukturkurve 26.05.1989



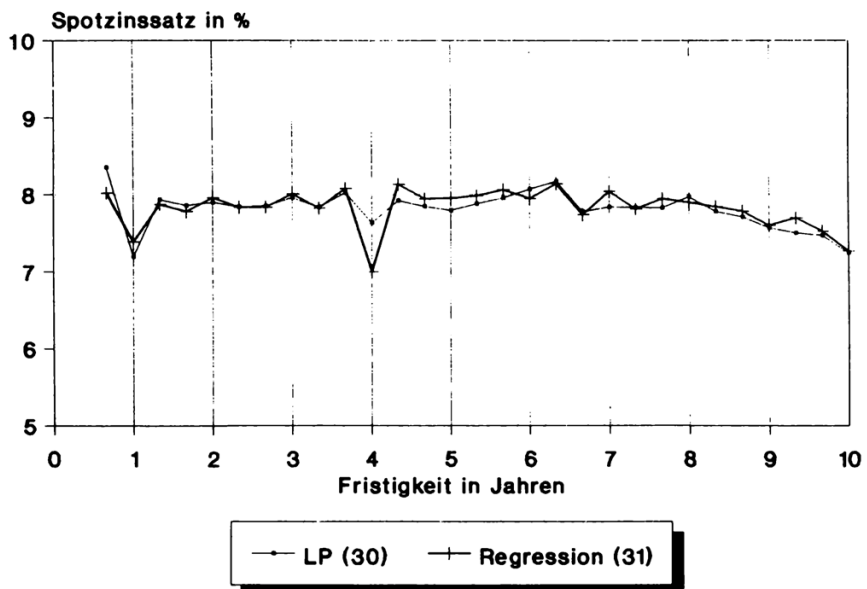
### Zinsstrukturkurve 10.08.1989



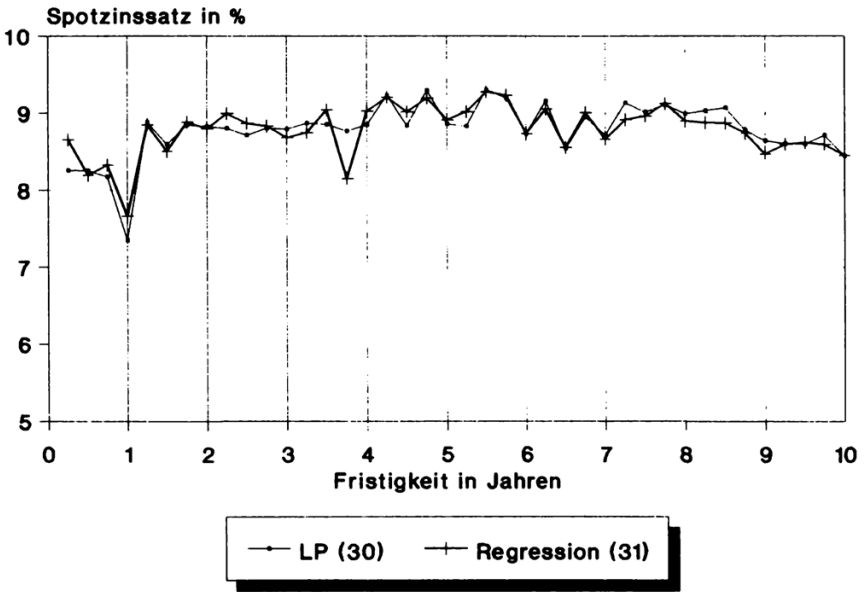
### Zinsstrukturkurve 19.10.1989



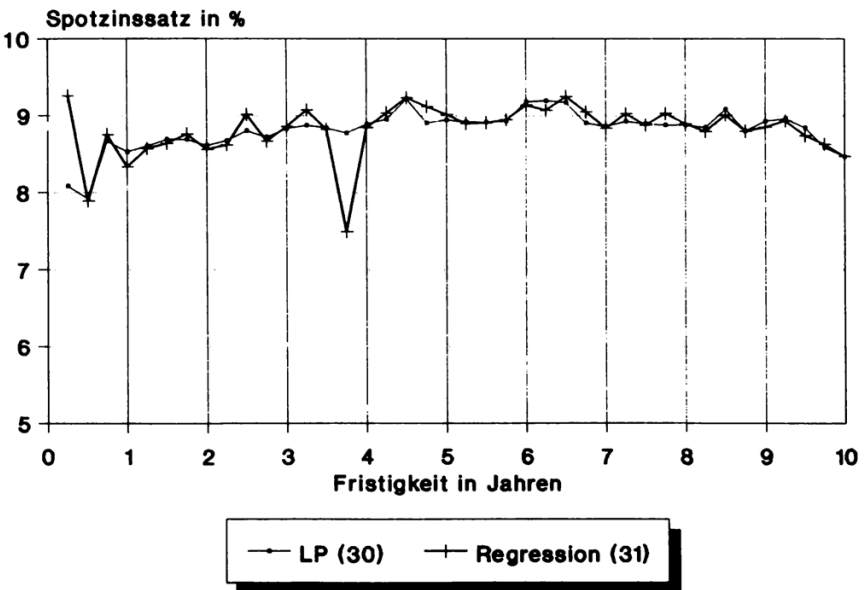
### Zinsstrukturkurve 09.01.1990

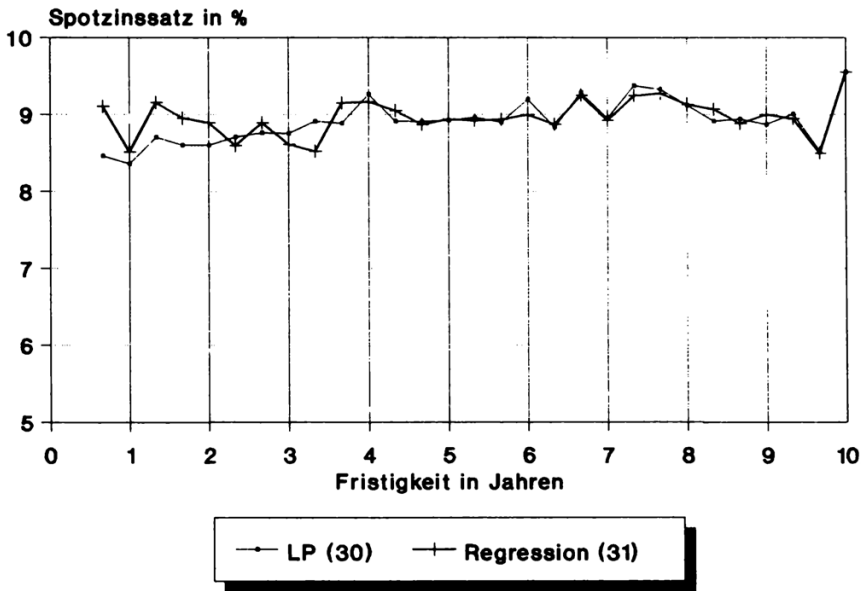


### Zinsstrukturkurve 15.03.1990



### Zinsstrukturkurve 28.05.1990



**Zinsstrukturkurve 23.10.1990****Zusammenfassung**

**Die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze:  
Theoretisches Konstrukt und empirische Evaluierung**

Die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze gilt seit langem als zentrales Konzept zur theoretischen und empirischen Analyse der Anleihen- und Kreditmärkte. Als theoretische Fundierung für dieses Konzept wird heute gewöhnlich die Vorstellung arbitragefreier (genauer: von risikolosen Arbitragegewinnmöglichkeiten freier) Märkte herangezogen, eine Vorstellung, die nur unter idealisierten Marktbedingungen gerechtfertigt ist. Die vorliegende Arbeit entwickelt diesen Ansatz unter Berücksichtigung institutioneller Beschränkungen der Arbitragemöglichkeiten weiter: Es wird das Konzept von „approximativ“ arbitragefreien Märkten in präziser Form in einer ganzen Klasse von Varianten entwickelt; diese Präzisierung ist zur empirischen Umsetzung erforderlich. In zwei Spezialfällen resultiert ein lineares Programmierungsproblem als Schätzverfahren für die empirische Zinsstruktur. Erstmals werden für den deutschen Markt diese Methoden an empirischen Daten erprobt; die vorliegende Arbeit berichtet daher auch über einige marktspezifische methodische Details und ausgewählte Ergebnisse.



## Summary

### **The Term Structure of Interest Rates: Theoretical Construct and Empirical Evaluation**

For a long time, the term structure of interest rates has been regarded as the central concept for analyzing the lending and the credit markets theoretically and empirically. The assumption of arbitrage-free markets (more precisely: markets with no risks and arbitrage-free gain possibilities) is usually applied at present as the theoretical foundation of this concept – an assumption that is justified only under idealized market conditions. This paper develops this assumption taking account of institutional constraints on arbitrage gain possibilities. The concept of markets approximately arbitrage-free is developed in a precise form for a whole class of variants; such precision is necessary for empirical evaluation. In two special cases, the result is a linear programming problem as estimation procedure for the empirically ascertained interest rate structure. The plausibility of these methods is verified for the German market for the first time on the basis of empirical data; for this reason, this paper reports on a number of market-specific methodical details and selected results.

## Résumé

### **La structure des échéances des taux d'intérêt: construction théorique et évaluation empirique**

Depuis longtemps, la structure de échéances des taux d'intérêt est considérée comme un concept central de l'analyse théorique et empirique des marchés des titres d'emprunts et des marchés financiers. A l'heure actuelle, ce concept est d'habitude fondé théoriquement sur l'idée de marchés affranchis d'arbitrage (plus précisément: de marchés affranchis de possibilités de bénéfices d'arbitrage sans risques), une idée qui n'est justifiée que sous des conditions de marché idéalisées. L'article approfondit ici cet concept, en tenant compte de restrictions institutionnelles des possibilités d'arbitrage: le concept de marché «approximativement» affranchis d'arbitrage sous forme précise pour toute une classe de variantes y est développé. Cette précision est nécessaire pour l'analyse empirique. Dans deux cas spéciaux, il y a un problème de programmation linéaire en tant que processus d'estimation pour la structure empirique des intérêts. Pour la première fois, cette méthode est testée pour le marché allemand à des données empiriques. Le présent travail rend donc compte aussi de détails méthodiques spécifiques au marché et de résultats sélectionnés.