Staatsverschuldung als Quelle der Nicht-Neutralität

Ein Beitrag zum Ricardianischen Äquivalenztheorem: Eine Verallgemeinerung

Von Franz Xaver Hof, Wien

I. Einleitung

Barro (1974) hat gezeigt, daß ein wirksames Vererbungsmotiv („operative bequest motive") die Gültigkeit des Ricardianischen Äquivalenztheorems impliziert. Dieses besagt, daß die Wahl der Finanzierungsform gegebener Staatsausgaben keine Auswirkungen auf die Allokation der Ressourcen hat.

Da das Vererbungsmotiv eine so zentrale Bedeutung für die Gültigkeit des Ricardianischen Äquivalenztheorems hat, ist es wünschenswert, hinreichende Bedingungen für seine Wirksamkeit anzugeben. *Abel* (1987) und *Weil* (1987) haben dies z.B. im Rahmen des *Diamond* (1965)-Modells ohne staatlichen Sektor getan.

Michaelis (1989) hat für die Analyse der gleichen Fragestellung eine Variante des *Diamond*-Modells verwendet, welche den staatlichen Sektor explizit berücksichtigt. Er hat gezeigt, daß die Bedingungen für die Wirksamkeit des Vererbungsmotivs nicht politikinvariant sind, sondern durch die Wahl des staatlichen Kreditaufnahmesatzes beeinflußt werden. Dieses Ergebnis impliziert nun, daß es nicht zulässig ist, die Gültigkeit des Äquivalenztheorems anhand der von *Abel* und *Weil* abgeleiteten Kriterien zu überprüfen.

Michaelis unterstellt bei seiner Beweisführung der Einfachheit halber, daß sowohl die Nutzenfunktion der Konsumenten als auch die Produktionsfunktion der Unternehmen vom *Cobb-Douglas*-Typ sind. In der vorliegenden Arbeit werden die Resultate von Michaelis verallgemeinert. Es wird gezeigt, daß die qualitativen Aussagen auch dann erhalten bleiben, wenn man eine relativ allgemeine, strikt konkave Nutzenfunktion sowie eine beliebige linear homogene Produktionsfunktion unterstellt.

Der wesentliche Unterschied zu den Arbeiten von *Michaelis, Abel* und *Weil* besteht darin, daß die Ergebnisse nicht nur analytisch, sondern auch graphisch abgeleitet werden. Mit Hilfe eines einzigen Diagramms, welches die Steady-State-Werte des Zinssatzes und der Pro-Kopf-Vererbung anhand von zwei einfachen Kurven bestimmt, können die folgenden Fragen auf einen Blick beantwortet werden:

a) Unter welchen Voraussetzungen ist das Vererbungsmotiv wirksam?

b) Wie wird die Wirksamkeit des Vererbungsmotivs durch die Wahl der staatlichen Politikparameter beinflußt?

c) Wie müssen die von *Abel* und *Weil* abgeleiteten Kriterien modifiziert werden, wenn man sie auf das von *Michaelis* verwendete Modell mit staatlichem Sektor anwenden will?

d) Kann der Staat durch geeignete Wahl der Budgetpolitik den paretooptimalen Steady-State ansteuern?

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen strukturiert: Im Abschnitt II werden zunächst die einzelnen Sektoren des Modells beschrieben. Danach werden die Bedingungen für ein langfristiges Gleichgewicht abgeleitet. Im Abschnitt III wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen das Vererbungsmotiv wirksam ist. Weiters wird die Frage gestellt, ob der Staat durch eine geeignete Finanzpolitik eine paretooptimale Allokation der Ressourcen gewährleisten kann. Im Appendix (Abschnitt IV) werden zwei im Text aufgestellte Behauptungen exakt bewiesen.

II. Das Modell

Grundlage der Analyse bildet ein Modell mit überlappenden Generationen, dessen Produktionssektor von *Diamond* übernommen wird, während die Nutzenfunktion der privaten Wirtschaftssubjekte in Anlehnung an *Barro* das Vererbungsmotiv berücksichtigt.

In jeder Periode t werden N_t homogene Wirtschaftssubjekte geboren, welche zwei Perioden leben. Wir unterstellen, daß die Bevölkerung mit einer konstanten Rate wächst, d.h.

$$N_t = (1+n)\,N_{t-1} \qquad \text{mit}\, n > 0 \tag{1}$$

Im ersten Lebensabschnitt („Arbeitsperiode“) bietet jedes Individuum (unabhängig vom Lohnsatz) eine Einheit Arbeit an und erhält dafür den Bruttoreallohn w_t. Der Nettoreallohn ist durch $(1-\tau)\,w_t$ gegeben, wobei τw_t entweder Lohnsteuerzahlungen oder einkommensabhängige staatliche Transfers beschreibt, je nachdem, ob τ positiv oder negativ ist. Das Individuum verwendet die ihm zur Verfügung stehenden Ressourcen für den Erstperiodenkonsum c_t^1 und die Ersparnis s_t^1, d.h.

$$c_t^1 + s_t^1 = (1 - \tau)\, w_t \tag{2}$$

Die Ersparnis wird in Form von privaten oder staatlichen Wertpapieren, welche als perfekte Substitute betrachtet werden, veranlagt. Diese Wertpapiere haben eine Laufzeit von einer Periode (d.h. Tilgung in der Periode $t + 1$) und eine reale Nettoertragsrate von r_{t+1}.

Im zweiten Lebensabschnitt („Ruhestandsperiode") bezieht das Wirtschaftssubjekt kein Arbeitseinkommen, zahlt keine Steuern an den Staat und erhält von diesem auch keine Transfers. Bezüglich der Vererbung trifft *Michaelis* genauso wie *Cukiermann & Meltzer* (1989) die Annahme, daß die Angehörigen der Generation t am Beginn ihrer Ruhestandsperiode (= Periode $t + 1$) für jedes ihrer $(1 + n)$ Kinder[1] q_t (mit $q_t \geq 0$) Konsumgütereinheiten reservieren und diese auf dem Kapitalmarkt zu einem Zinssatz von r_{t+2} veranlagen. Nach dem Ableben des Vorfahren (d.h. am Beginn der Periode $t + 2$) erhält dann jedes Kind $(1 + r_{t+2})\, q_t$ Einheiten an realer Vererbung[2].

Dieses Vererbungsmuster impliziert, daß die in t geborenen Wirtschaftssubjekte am Beginn der Periode $t + 1$ von ihrem eigenen Vorfahren eine Erbschaft in Höhe von $(1 + r_{t+1})\, q_{t-1}$ erhalten. Die Budgetgerade für die Ruhestandsphase hat unter diesen Voraussetzungen die folgende Form:

$$c_t^2 + (1 + n)\, q_t = (1 + r_{t+1})\, s_t^1 + (1 + r_{t+1})\, q_{t-1} \tag{3}$$

c_t^2 bezeichnet den Alterskonsum eines Angehörigen der Generation t. Für die Nachfrage nach Wertpapieren in der Ruhestandsphase, s_t^2, gilt:

$$s_t^2 = (1 + n)\, q_t \geq 0 \tag{4}$$

Aus den Budgetrestriktionen (3) und (4) kann die folgende Beziehung abgeleitet werden:

---

[1] Die Fortpflanzung beruht in diesem Modelltyp auf Parthenogenese. Aus diesem Grund verwenden wir in der Folge anstatt des Begriffs „Eltern" die Bezeichnung Vorfahre".

[2] Im Unterschied zu *Michaelis* bzw. *Cukierman & Meltzer* nehmen *Abel* und *Weil* an, daß die für die Vererbung reservierten Mittel nicht auf dem Kreditmarkt veranlagt, sondern den Kindern schon in deren Arbeitsperiode ausgehändigt werden. Dies bedeutet, daß die Wirtschaftssubjekte in ihrer Ruhestandsperiode nicht mehr am Kapitalmarkt teilnehmen. *Weil* behauptet, daß dieser Ansatz zu identischen Resultaten führt [s. *Weil* (1987, Fußnote 6, S. 383)].

(5) $$c_t^2 = [(1-\tau)\,w_t + q_{t-1} - c_t^1]\,(1 + r_{t+1}) - (1+n)\,q_t$$

Alle Individuen der Generation t haben die gleiche zeitinvariante Nutzenfunktion[3]

(6) $$u\,(c_t^1, c_t^2) + \frac{1}{(1+\varrho)} \cdot v_{t+1} \qquad \text{mit } \varrho > 0$$

wobei $u\,(c_t^1,\ c_t^2)$ den Nutzen beschreibt, den ein Angehöriger der Generation t aus seinem eigenen, in der Arbeitsperiode und der Ruhestandsphase getätigten Konsum c_t^1 und c_t^2 zieht. v_{t+1} bezeichnet das maximale Nutzenniveau, das von jedem der $(1+n)$ homogenen Kinder erreicht werden kann. Der Parameter $1/(1+\varrho) < 1$ mißt in diesem Zusammenhang die Stärke des Vererbungsmotivs. Für die partiellen Ableitungen von $u\,(.,.)$ wird die folgende Notation eingeführt:

(7) $$u_{1t} := \frac{\partial u\,(c_t^1, c_t^2)}{\partial c_t^1} \qquad u_{2t} := \frac{\partial u\,(c_t^1, c_t^2)}{\partial c_t^2}$$

Für die folgende Analyse unterstellen wir, daß die Nutzenfunktion $u\,(.,.)$ stetig und strikt konkav ist und stetige partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung besitzt. Weiters mögen die Grenznutzen beider Güter strikt positiv und abnehmend sein. Außerdem nehmen wir in Anlehnung an *Abel* an, daß c_t^1 und c_t^2 normale Güter sind und

(8) $$u_{1t}\,(0,\cdot) = \infty = u_{2t}\,(\cdot, 0)$$

gilt.

Die Wirtschaftssubjekte maximieren nun die Nutzenfunktion (6) unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion (5) und der Nichtnegativitätsbedingung

(9) $$q_t \geq 0$$

durch geeignete Wahl von c_t^1, c_t^2 und q_t[4].

Die Bedingungen erster Ordnung für ein Nutzenmaximum lauten[5]:

---

[3] Die folgende Darstellung übernimmt die Notation von *Cukierman & Meltzer*, da die von *Michaelis* gewählten Bezeichnungen [$u(c_t^1, c_t^2)$ für den direkten Konsumationsnutzen bzw. u_{t+1} für den (maximalen) Nutzen eines repräsentativen Nachfahren] leicht zu Mißverständnissen führen können.

[4] Auf Nichtnegativitätsbedingungen für die beiden Konsummengen kann verzichtet werden, da diese aufgrund der Annahme (8) nicht bindend sein können.

[5] Der einfachste Weg für die Ermittlung der Bedingungen erster Ordnung besteht darin, die Lösungsmethode von *Cukierman & Meltzer* anzuwenden und die dort

(10) $$u_{1t} - (1 + r_{t+1})\, u_{2t} = 0$$

(11) $$-(1 + n)\, u_{2t} + \frac{1}{(1 + \varrho)} \cdot (1 + r_{t+2})\, u_{2t+1} + \lambda_t = 0$$

(12) $$\lambda_t\, q_t = 0 \quad \text{sowie} \quad q_t \geq 0 \quad \text{und} \quad \lambda_t \geq 0$$

Wenden wir uns nun dem Produktionssektor zu. Die Unternehmen produzieren unter Einsatz von Realkapital K_t und Arbeit L_t einen homogenen Output Y_t, der sowohl konsumiert als auch investiert werden kann. Die Abschreibungsrate des Realkapitals ist gleich Null. Wir unterstellen, daß die Produktionsfunktion

(13) $$Y_t = F(K_t, L_t)$$

sinkende Grenzproduktivitäten aufweist und linear homogen ist. Unter diesen Voraussetzungen gilt

(14) $$y_t = f(k_t) \quad \text{mit}\, f' > 0 \,\text{und}\, f'' < 0$$

$$\text{wobei} \quad y_t = Y_t / L_t \quad \text{und} \quad k_t = K_t / L_t.$$

Unter der Annahme, daß auf allen Märkten vollständige Konkurrenz herrscht, folgt aus der Gewinnmaximierung der Unternehmen, daß die Produktionsfaktoren real gemäß ihren Grenzproduktivitäten entlohnt werden:

(15) $$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

(16) $$r_t = f'(k_t)$$

Die von *Diamond* getroffene Annahme der Vollbeschäftigung (i.e. $L_t = N_t$) impliziert

(17) $$y_t = Y_t / N_t \quad \text{und} \quad k_t = K_t / N_t$$

Das Modell wird nun mit der Beschreibung des staatlichen Sektors geschlossen. Für die staatliche Budgetbeschränkung gilt

(18) $$D_{t+1} + T_t = g_t + (1 + r_t)\, D_t$$

wobei T_t die gesamten Steuereinnahmen und g_t die staatliche Güternachfrage in der Periode t bezeichnet. D_{t+1} bezeichnet die Kapitalnachfrage

---

unterstellte (auf der Annahme einer konstanten Bevölkerung beruhende) Budgetrestriktion durch die Gleichung (6) zu ersetzen. Der von *Michaelis* gewählte Lösungsweg ist etwas länger, führt aber klarerweise zu identischen Resultaten.

(Bruttokreditaufnahme) des Staates in der Periode t (!). Positive Werte von D_{t+1} implizieren, daß der Staat in der Periode t Wertpapiere ausgibt, die in der Periode $t+1$ getilgt werden und eine reale Ertragsrate von r_{t+1} aufweisen. Negative Werte von D_{t+1} bedeuten hingegen, daß der Staat als Gläubiger auftritt und private Wertpapiere kauft.

Der Einfachheit halber unterstellen wir, daß der Staat keine Güter kauft (d.h. $g_t = 0$) und die gesamten Steuereinnahmen aus einer Arbeitseinkommenssteuer folgender Form resultieren:

$$T_t = \tau w_t N_t \tag{19}$$

Negative Werte von τ bedeuten, daß der Staat einkommensabhängige Transfers gewährt. Setzt man $g_t = 0$ und (19) in (18) ein und dividiert man auf beiden Seiten durch die Anzahl der Erwerbstätigen N_t, so erhält man

$$d_{t+1} + \tau w_t = \frac{(1+r_t)}{(1+n)} \cdot d_t \qquad \text{mit } d_{t+1} = D_{t+1}/N_t \tag{20}$$

Weiters nehmen wir an, daß das Budgetdefizit (Nettokreditaufnahme) ein konstanter Bruchteil des gesamtwirtschaftlichen Einkommens sei, d.h.

$$D_{t+1} - D_t = b\,Y_t \tag{21}$$

Gleichung (21) kann folgendermaßen transformiert werden:

$$d_{t+1} - \frac{1}{(1+n)} \cdot d_t = b y_t \tag{22}$$

Kommen wir nun zur Gleichgewichtsbedingung für den Kapitalmarkt, welche durch

$$N_t s_t^1 + N_{t-1} s_{t-1}^2 = K_{t+1} + D_{t+1} \tag{23}$$

gegeben ist. Die linke Seite dieser Gleichung beschreibt das Kapitalangebot der privaten Haushalte, die rechte Seite die aggregierte Kapitalnachfrage der privaten Unternehmen und des Staates. Dividiert man beide Seiten von (23) durch die Zahl der Erwerbstätigen N_t, so erhält man

$$s_t^1 + q_{t-1} = (1+n)\,k_{t+1} + d_{t+1} \tag{24}$$

Die Steady-State-Eigenschaften des Modells werden in der Folge in Anlehnung an *Abel* in zweistufiger Form analysiert. Zunächst vernachlässigen wir die Bedingungen 1. Ordnung für ein optimales Niveau der Vererbung q_t [Gleichungen (11) und (12)]. Mit Hilfe der Budgetrestriktion (5) und der Bedingung 1. Ordnung für die optimale Aufteilung des Konsums auf die beiden Lebensabschnitte [Gleichung (10)] kann gezeigt werden, daß die Konsumfunktion c_t^1 die folgende allgemeine Form hat:

$$c_t^1 = c^1 [(1-\tau) w_t + q_{t-1}, (1+n) q_t, r_{t+1}] \tag{25}$$

Für das aggregierte Kapitalangebot der privaten Haushalte pro Kopf der Erwerbstätigen in der Periode t, $s_t = s_t^1 + [s_{t-1}^2 / (1+n)] = s_t^1 + q_{t-1}$, gilt daher:

$$\begin{aligned} s_t &= (1-\tau) w_t - c^1 [(1-\tau) w_t + q_{t-1}, (1+n) q_t, r_{t+1}] + q_{t-1} = \\ &= s [(1-\tau) w_t + q_{t-1}, (1+n) q_t, r_{t+1}] \end{aligned} \tag{26}$$

Da c_t^1 und c_t^2 als normale Güter betrachtet werden, weisen die partiellen Abteilungen von s_t in bezug auf die ersten beiden Argumente, s_{1t} und s_{2t}, die folgenden Eigenschaften auf[6]:

$$0 < s_{1t} < 1 \quad \text{und} \quad 0 < s_{2t} < 1 \tag{27}$$

Die Gleichungen (20) und (22) implizieren, daß im Steady-State[7]

$$d = \frac{(1+n)}{n} \cdot by \qquad \text{und} \qquad \tau w = \frac{(r-n)}{(1+n)} \cdot d = \frac{(r-n)}{n} \cdot by \tag{28}$$

gilt. Unter Verwendung von (14) - (16), (24), (26) und (28) kann gezeigt werden, daß die Steady-State-Gleichgewichtsbedingung für den Kapitalmarkt in folgender impliziter Form dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} H(k,q,b) = s\left[f(k) - kf'(k) - \frac{[f'(k) - n]}{n} \cdot bf(k) + q, (1+n) q, f'(k) \right] - \\ - (1+n) k - \frac{(1+n)}{n} \cdot bf(k) = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

In Anlehnung an *Weil* und *Abel* beschränken wir uns auf Fälle, in denen ein eindeutiger, lokal stabiler Steady-State existiert. In einem solchen Steady-State gilt $H_k < 0$[8]. Für die restlichen partiellen Ableitungen der impliziten Funktion H erhalten wir

$$H_q = s_1 + s_2 (1+n) > 0 \tag{30}$$

---

[6] Ein exakter Beweis wird im Appendix 1 angeführt.

[7] Steady-State-Werte werden durch das Weglassen des Zeitindex t gekennzeichnet.

[8] Siehe *Abel* (1987, S. 1042) und *Weil* (1987, S. 385).

(31) $$H_b = -s_1 \frac{[f'(k) - n]}{n} \cdot f(k) - \frac{1+n}{n} \cdot f(k) < 0$$

Gleichung (29) impliziert, daß der Steady-State-Wert der (endogenen) Kapitalintensität k sowohl vom Steady-State-Niveau der (endogenen) Vererbung q als auch von der Höhe des (exogenen) staatlichen Kreditaufnahmesatzes b abhängt, d.h. $k = k(q, b)$. Für die partiellen Ableitungen von k gilt:

(32) $$k_q = -H_q / H_k > 0 \quad \text{und} \quad k_b = -H_b / H_k < 0$$

Der Steady-State-Wert des Zinssatzes

(33) $$r = r(q, b) = f'[k(q, b)]$$

weist daher die folgenden Abhängigkeiten auf:

(34) $$r_q = f'' \cdot k_q < 0 \quad \text{und} \quad r_b = f'' \cdot k_b > 0$$

(33) wird in der Folge als K-Kurve (Kapitalmarktgleichgewichtskurve) bezeichnet. Zeichnet man sie in ein (q, r)-Diagramm ein, so impliziert (34), daß sie einen negativen Anstieg aufweist und bei einer Erhöhung von b nach oben verschoben wird. In Fig. 1 und 2 verwenden wir der Einfachheit halber eine lineare Approximation der (nichtlinearen) K-Kurve.

Bei den bisherigen Überlegungen haben wir die Bedingungen für die Ermittlung der nutzenmaximierenden Vererbung, (11) und (12), ignoriert. Diese beiden Gleichungen implizieren die folgenden Aussagen für den Steady-State:

(35.1) $$(1 + r) \leq (1 + n)(1 + \varrho) \quad \text{und} \quad q \geq 0$$

(35.2) $$\text{wenn } (1 + r) < (1 + n)(1 + \varrho), \text{ dann } q = 0$$

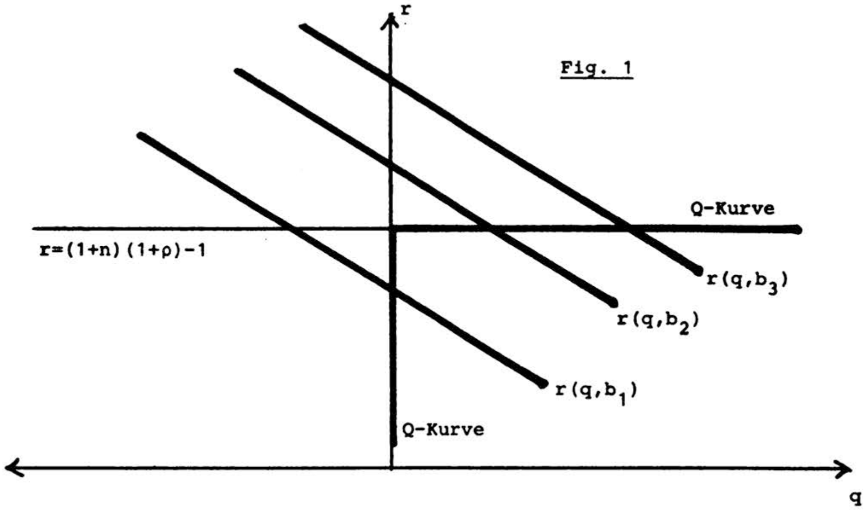
(35.3) $$\text{wenn } q > 0, \text{ dann } (1 + r) = (1 + n)(1 + \varrho)$$

Alle Kombinationen (q, r), welche (35.1) - (35.3) erfüllen, liegen auf der „rechtwinkeligen" Q-Kurve, die in Fig. 1 gemeinsam mit der K-Kurve eingezeichnet wurde. Schnittpunkte dieser beiden Kurven beschreiben die gleichgewichtigen Werte der beiden endogenen Variablen r und q.

III. Die Wirksamkeit des Vererbungsmotivs und die optimale Finanzpolitik

In Fig. 1 wurde unterstellt, daß die dem Politikparameterwert b_1 entsprechende K-Kurve, $r = r(q, b_1)$, die $(1 + r) = (1 + \varrho)(1 + n)$-Gerade im Bereich

$q < 0$ schneidet. Die Haushalte würden unter diesen Voraussetzungen gerne eine negative Vererbung realisieren, d.h. im zweiten Lebensabschnitt einen Kredit aufnehmen, den ihre Kinder in der nächsten Periode samt Verzinsung zurückzahlen müßten. Da eine negative Vererbung in diesem Modell nicht zulässig ist, wählen die Haushalte die Randlösung $q = 0$. Der gleichgewichtige Zinssatz, der sich als Schnittpunkt der $r(q,\ b_1)$-Kurve und der Q-Kurve ergibt, ist geringer als $(1 + n)(1 + \varrho) - 1$.



Nun erhöhen wir den staatlichen Kreditaufnahmesatz von b_1 auf b_2. Dies verschiebt die K-Kurve nach oben zu $r = r(q,\ b_2)$. Wir unterstellen, daß die neue K-Kurve die Q-Kurve im Bereich $q > 0$ schneidet. Unter dieser Annahme ist das Vererbungsmotiv im Steady-State wirksam, und für den Zinssatz gilt $(1 + r) = (1 + n)(1 + \varrho)$.

Eine zusätzliche Erhöhung des Politikparameters von b_2 auf b_3 verschiebt die K-Kurve weiter nach oben zu $r = r(q,\ b_3)$. Dies verursacht eine Erhöhung der Vererbung q, hat aber keinen Einfluß auf den Zinssatz r. Aus der Konstanz des Zinssatzes folgt unmittelbar, daß die Erhöhung des staatlichen Kreditaufnahmesatzes b keine Auswirkung auf die Kapitalintensität k hat, da $r = f'(k)$. Unter diesen Voraussetzungen bleiben auch der Bruttoreallohn w und die Pro-Kopf-Produktion y unverändert, da $w = f(k) - k f'(k)$ und $y = f(k)$.

Weiters kann gezeigt werden, daß bei einem wirksamen Vererbungsmotiv auch der Konsum in den beiden Lebensabschnitten, c^1 und c^2, völlig unabhängig vom staatlichen Kreditaufnahmesatz ist. Dieses Ergebnis, das im Appendix 2 exakt bewiesen wird, kann folgendermaßen interpretiert werden:

In der Ruhestandsphase erhält jedes Wirtschaftssubjekt von seinem Vorfahren eine Vererbung in Höhe von $(1 + r)\, q = (1 + \varrho)\, (1 + n)\, q$, während es für seine $(1 + n)$ Kinder insgesamt lediglich $(1 + n)\, q$ Konsumgütereinheiten für die Vererbung reserviert und auf dem Kreditmarkt veranlagt. Dies bedeutet, daß eine Erhöhung der Pro-Kopf-Vererbung q ceteris paribus die Konsummöglichkeiten der Wirtschaftssubjekte erhöht und zu einer Steigerung von c^1 und c^2 führt, da beide Güter als normale Güter betrachtet werden. Gleichzeitig senkt aber die mit der Erhöhung von b verbundene Steigerung des Arbeitseinkommenssteuersatzes τ [siehe Gleichung (28)] den Nettoreallohn $(1 - \tau)\, w$. Dieser Effekt impliziert eine Verringerung von c^1 und c^2, welche die auf der Erhöhung von q beruhende Ausweitung des Konsums in beiden Lebensabschnitten perfekt kompensiert. Veränderungen des staatlichen Nettokreditaufnahmesatzes b haben somit keinen Einfluß auf c^1 und c^2, sofern das Vererbungsmotiv (vor und nach der Änderung von b!) wirksam ist.

Anhand von Fig. 2 sollen nun zwei spezielle Werte von b bestimmt werden, die bei *Michaelis* eine zentrale Rolle spielen. b_q bezeichnet den Wert von b, bei dem die nutzenmaximierenden Wirtschaftssubjekte auch dann eine optimale Vererbung in der Höhe von $q = 0$ wählen würden, wenn beliebige (d.h. auch negative) Werte von q zulässig wären. In dieser Situation gilt in den Gleichungen (11) und (12) sowohl $\lambda = 0$ als auch $q = 0$. Die graphische Bestimmung von b_q ist denkbar einfach. b_q ist der Wert von b, bei dem die K-Kurve $r = r\,(q, b)$ die Gerade $r = (1 + \varrho)\, (1 + n) - 1$ exakt an der Stelle $q = 0$ schneidet. Für $b > b_q$ schneidet die K-Kurve die Q-Kurve im Bereich $q > 0$. Die hinreichende Bedingung für die Wirksamkeit des Vererbungsmotivs im *Michaelis*-Modell lautet also:

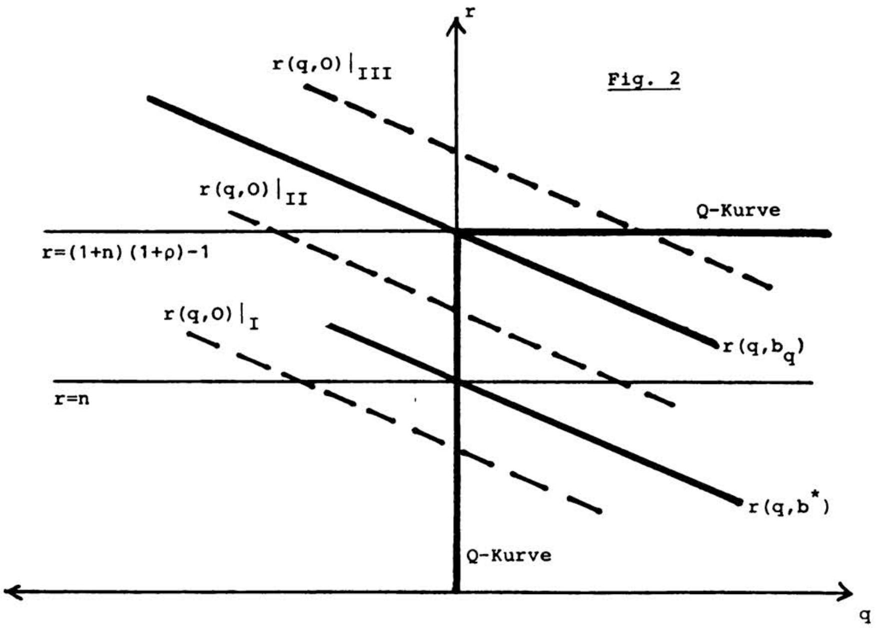
$$\text{(36)} \qquad \text{wenn } b > b_q, \quad \text{dann } q > 0$$

Unter Verwendung der beiden Ordinatenabschnitte $r\,(0, b)$ und $r\,(0, b_q) = (1 + n)\, (1 + q) - 1$ kann die Bedingung (36) auch in folgender Form angeschrieben werden[9]:

$$\text{(37)} \qquad \text{wenn } r\,(0, b) > (1 + n)\,(1 + \varrho) - 1, \quad \text{dann } q > 0$$

[9] Übersetzt man die von *Abel* und *Weil* abgeleiteten Bedingungen in die Sprache des vorliegenden Modells, so erhält man

$$\text{wenn } r\,(0,0) > (1 + n)\,(1 + \varrho) - 1, \text{ dann } q > 0.$$



$r\,(0,\ b)$ stimmt mit dem Steady-State-Zinssatz überein, der sich im *Diamond*-Modell mit staatlichem Sektor ergibt, wenn die Nutzenfunktion der privaten Wirtschaftssubjekte kein Vererbungsmotiv, sondern lediglich den direkten Konsumnutzen berücksichtigt.

Im Fall $b < b_q$ möchten die Konsumenten gerne eine negative Vererbung wählen. Da dies nicht möglich ist, wählen sie die Randlösung $q = 0$. Eine Senkung des staatlichen Kreditaufnahmesatzes b führt in dieser Situation zu einer Senkung des Zinssatzes r sowie zu einer Erhöhung der Kapitalintensität k, der Pro-Kopf-Produktion y und des Bruttoreallohns w. Der Kreditaufnahmesatz kann nun solange gesenkt werden, bis die Wirtschaft den paretooptimalen Steady-State erreicht, der bekannterweise durch $r = n$ gekennzeichnet ist. Der dem Paretooptimum entsprechende Wert des Politikparameters wird mit b^* bezeichnet.

In Fig. 2 entspricht b^* jene K-Kurve, welche die Q-Kurve beim Zinssatz $r = n$ schneidet. Da $r\,(q,\ b^*)$ unterhalb von $r\,(q,\ b_q)$ liegt, gilt klarerweise $b^* < b_q$.

Neben den eben erwähnten Parameterwerten b_q und b^* betrachten wir noch den Wert $b = 0$. Für die Position der mit $b = 0$ verbundenen K-Kurve $r = r\,(q,\ 0)$ gibt es nun drei Möglichkeiten:

Fall I: $0 < b^* < b_q$: Dieser Situation entspricht z.B. die K-Kurve $r(q, 0) \mid_{\mathrm{I}}$, die unterhalb von $r(q, b^*)$ liegt. Ohne staatliche Intervention würde sich in der Wirtschaft ein Zustand realisieren, bei dem das Vererbungsmotiv nicht wirksam ist, und die Kapitalintensität über dem paretooptimalen Wert liegt. Wenn der Staat das soziale Optimum anstrebt, muß er den Zinssatz durch Staatsverschuldung auf das Niveau $r = n$ anheben.

Fall II: $b^* < 0 < b_q$: Diese Variante wird z.B. durch die K-Kurve $r(q, 0) \mid_{\mathrm{II}}$ charakterisiert, welche oberhalb von $r(q, b^*)$ liegt, aber unterhalb von $r(q, b_q)$. Wenn der Staat weder als Gläubiger noch als Schuldner auftritt, realisiert sich ein unterkapitalisierter Steady-State, in dem das Vererbungsmotiv nicht wirksam ist. Die Verwirklichung des Paretooptimums erfordert, daß der Staat einen konstanten Budgetüberschuß pro Kopf der Erwerbstätigen (d.h. $d < 0$) erzielt, um den Zinssatz auf das Niveau $r = n$ zu senken.

Fall III: $b^* < b_q < 0$: Als Illustration dieser Situation wählen wir die K-Kurve $r(q, 0) \mid_{\mathrm{III}}$, die oberhalb von $r(q, b^*)$ und $r(q, b_q)$ liegt und daher die Q-Kurve im Bereich $q > 0$ schneidet. Wenn der Staat vollkommen inaktiv ist, realisiert sich ein unterkapitalisierter Steady-State, bei dem das Vererbungsmotiv (im Unterschied zu Fall II) wirksam ist. Strebt der Staat nun die paretooptimale Allokation an, so muß er einen genügend hohen Budgetüberschuß pro Kopf der Erwerbstätigen erzielen, um das Vererbungsmotiv unwirksam zu machen und den Zinssatz auf das Niveau $r = n$ zu senken.

IV. Appendix

Appendix 1:

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften der beiden Konsummengen c_t^1 [Gleichung (25)] und c_t^2 sowie des aggregierten Kapitalangebots der privaten Haushalte pro Kopf der Erwerbstätigen s_t [Gleichungen (26)] abgeleitet. Den Ausgangspunkt dieser Analyse bilden die Budgetrestriktion

(5) $$c_t^2 = [(1 - \tau) w_t + q_{t-1} - c_t^1](1 + r_{t+1}) - (1 + n) q_t$$

und die Bedingung erster Ordnung

(10) $$u_{1t} - (1 + r_{t+1}) u_{2t} = 0$$

Die totalen Differentiale dieser beiden Gleichungen lauten:

(A1) $[u_{11\,t} - (1 + r_{t+1})\, u_{21\,t}]\, d\, c_t^1 + [u_{12\,t} - (1 + r_{t+1})\, u_{22\,t}]\, d\, c_t^2 = u_{2\,t}\, d\, r_{t+1}$

(A2) $(1 + r_{t+1})\, d\, c_t^1 + d\, c_t^2 = (1 + r_{t+1})\, d\, [(1 - \tau)\, w_t + q_{t-1}] - d\, [(1 + n)\, q_t] +$

$$+ \; [(1 - \tau)\, w_t + q_{t-1} - c_t^1]\, d\, r_{t+1}$$

Unter Verwendung von (10) lassen sich die Gleichungen (A1) und (A2) auch folgendermaßen schreiben:

(A3) $-(u_{1\,t}\, u_{21\,t} - u_{2\,t}\, u_{11\,t})\, d\, c_t^1 + (u_{2\,t}\, u_{12\,t} - u_{1\,t}\, u_{22\,t})\, d\, c_t^2 = u_{2\,t}^2\, d\, r_{t+1}$

(A4) $u_{1\,t}\, d\, c_t^1 + u_{2\,t}\, d\, c_t^2 = u_{1\,t}\, d\, [(1 - \tau)\, w_t + q_{t-1}] - u_{2\,t}\, d\, [(1 + n)\, q_t] +$

$$+ \; u_{2\,t}\, [(1 - \tau)\, w_t + q_{t-1} - c_t^1]\, d\, r_{t+1}$$

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung $u_{1\,t}$ und $u_{2\,t}$ sowie die partiellen Ableitungen 2. Ordnung $u_{11\,t}$, $u_{12\,t} = u_{21\,t}$ und $u_{22\,t}$ werden bei den obigen Darstellungen an der nutzenmaximierenden Stelle (c_t^1, c_t^2) ausgewertet.

Die Lösungen für $d\, c_t^1$ und $d\, c_t^2$ lauten:

(A5) $$dc_t^1 = \frac{(u_{2t}u_{12t} - u_{1t}u_{22t})\, \{u_{1t} d\, [(1-\tau)\, w_t + q_{t-1}] - u_{2t} \mathrm{d}\, [(1+n)\, q_t])}{D} - $$
$$- \frac{u_{2t}^3 - (u_{2t}u_{12t} - u_{1t}u_{22t})\, u_{2t}\, [(1-\tau)\, w_t + q_{t-1} - c_t^1]}{D} \cdot dr_{t+1}$$

(A6) $$dc_t^2 = \frac{(u_{1t}u_{21t} - u_{2t}u_{11t})\, \{u_{1t} d\, [(1-\tau)\, w_t + q_{t-1}] - u_{2t} \mathrm{d}\, [(1+n)\, q_t])}{D} + $$
$$+ \frac{u_{1t}u_{2t}^2 + (u_{1t}u_{21t} - u_{2t}u_{11t})\, u_{2t}\, [(1-\tau)\, w_t + q_{t-1} - c_t^1]}{D} \cdot dr_{t+1}$$

mit

(A7) $$D = 2\, u_{1\,t}\, u_{2\,t}\, u_{12\,t} - u_{11\,t}\, u_{2\,t}^2 - u_{22\,t}\, u_{1\,t}^2$$

Im Abschnitt II haben wir unterstellt, daß die Nutzenfunktion strikt konkav ist. Da jede strikt konkave Nutzenfunktion auch strikt quasikonkav ist, gilt $D > 0$ im gesamten Definitionsbereich der Nutzenfunktion (und somit auch im Nutzenmaximum).

Für die partiellen Ableitungen 1. Ordnung des Erstperioden-Konsums c_t^1 in bezug auf die ersten beiden Argumente, $c_{1\,t}^1$ und $c_{2\,t}^1$, gilt:

(A8) $$c_{2\,t}^1 = -\, (u_{2\,t} / u_{1\,t})\, c_{1\,t}^1 = -\, c_{1\,t}^1 / (1 + r_{t+1})$$

Das aggregierte Kapitalangebot der privaten Haushalte pro Kopf der Erwerbstätigen, $s_t = s_t^1 + q_{t-1}$, weist die folgenden Eigenschaften auf:

(A 9) $$ds_t = \frac{(u_{1t}u_{21t} - u_{11t}u_{2t})\,u_{2t}}{D} \cdot d\,[(1-\tau)\,w_t + q_{t-1}] + $$
$$+ \frac{(u_{2t}u_{12t} - u_{1t}u_{22t})\,u_{2t}}{D} \cdot d\,[(1+n)\,q_t] + $$
$$+ \frac{u_{2t}^3 - (u_{2t}u_{12t} - u_{1t}u_{22t})\,u_{2t}\,[(1-\tau)\,w_t + q_{t-1} - c_t^1]}{D} \cdot dr_{t+1}$$

Für die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von s_t in bezug auf die ersten beiden Argumente, $s_{1\,t}$ und $s_{2\,t}$, gilt

(A 10) $$s_{1\,t} = 1 - c_{1\,t}^1 \quad \text{und} \quad s_{2\,t} = -\,c_{2\,t}^1 = c_{1\,t}^1 / (1 + r_{t+1})$$

Wenn c_t^1 und c_t^2 als normale Güter betrachtet werden, sind folgende Ungleichungen erfüllt:

(A 11) $$(u_{2\,t}\,u_{12\,t} - u_{1\,t}\,u_{22\,t}) > 0 \quad \text{und} \quad (u_{1\,t}\,u_{21\,t} - u_{2\,t}\,u_{11\,t}) > 0$$

Die Ungleichungen (A 11) implizieren in Verbindung mit (A 5), (A 6) und $r_{t+1} > 0$

(A 12) $$0 < c_{1\,t}^1 < 1 \quad \text{und} \quad -1 < c_{2\,t}^1 < 0$$

sowie

(A 13) $$0 < s_{1\,t} < 1 \quad \text{und} \quad 0 < s_{2\,t} < 1$$

Appendix 2:

In diesem Abschnitt beweisen wir, daß Veränderungen des staatlichen Kreditaufnahmesatzes b keinen Einfluß auf die Steady-State-Konsummengen c^1 und c^2 haben, sofern das Vererbungsmotiv wirksam ist.

In einem Steady-State mit wirksamer Vererbung gilt gemäß (16) und (35.3)

(A 14) $$f'(k) = r = (1 + n)\,(1 + \varrho) - 1$$

Variationen von b verändern in dieser Situation weder den Zinssatz r noch die Kapitalintensität k, d.h.

(A 15) $$\frac{dr}{db} = 0 \text{ und } \frac{dk}{db} = 0$$

Für die Reaktion des Bruttoreallohns $w = f(k) - k f'(k)$ und die Pro-Kopf-Produktion $y = f(k)$ gilt daher:

$$\frac{dw}{db} = 0 \text{ und } \frac{dy}{db} = 0 \tag{A16}$$

Differenziert man (29) total nach b, so erhält man

$$H_k \cdot \frac{dk}{db} + H_q \cdot \frac{dq}{db} + H_b \cdot 1 = 0 \tag{A17}$$

Setzt man $(d\,k \,/\, d\,b) = 0$ in (A17) ein, so läßt sich die Reaktion der gleichgewichtigen Vererbung q auf eine Veränderung des staatlichen Kreditaufnahmesatzes b durch

$$\frac{dq}{db} = -(H_b \,/\, H_q) > 0 \tag{A18}$$

beschreiben, wobei H_b und H_q durch (30) und (31) gegeben sind. Setzt man (16) und (A10) in die Gleichungen (30) und (31) ein, so können H_b und H_q auch in folgender Form dargestellt werden:

$$H_q = 1 - \frac{f'(k) - n}{1 + f'(k)} \cdot c_1^1 > 0 \tag{A19}$$

$$H_b = -\frac{f(k)\,[1 + f'(k)]}{n} \cdot H_q < 0 \tag{A20}$$

Die Gleichungen (A14) und (A18) - (A20) implizieren nun, daß in einem Steady-State mit wirksamer Vererbung

$$\frac{dq}{db} = \frac{(1+\varrho)(1+n)\,f(k)}{n} > 0 \tag{A21}$$

gilt. Gemäß (A21) bewirken Erhöhungen des staatlichen Kreditaufnahmesatzes b eine eindeutige Zunahme der gleichgewichtigen Vererbung q. Gleichzeitig nehmen die Lohnsteuerzahlungen τw aufgrund des steigenden Steuersatzes τ (bei einem konstanten Bruttolohn w) zu. Aus den Gleichungen (14), (28) und (35.3) kann abgeleitet werden, daß

$$\tau w = \frac{(1+n)\,\varrho}{n} \cdot bf(k) \tag{A22}$$

Differenziert man (A22) total nach b und berücksichtigt man dabei $(d\,k \,/\, d\,b) = 0$, so ergibt sich

(A23) $$\frac{d\,(\tau w)}{db} = \frac{\varrho\,(1+n)\,f(k)}{n}$$

Für die Reaktion des Steady-State-Erstperiodenkonsums c^1 auf Veränderungen von b gilt:

(A24) $$\frac{dc^1}{db} = c_1^1 \cdot \left[\frac{dw}{db} - \frac{d\,(\tau w)}{db} + \frac{dq}{db}\right] + c_2^1 \cdot (1+n)\frac{dq}{db} + c_3^1 \cdot \frac{dr}{db}$$

Setzt man (A8), (A15), (A16), (A21) und (A23) in (A24) ein, so erhält man

(A25) $$\frac{dc^1}{db} = 0$$

Analog kann gezeigt werden, daß

(A26) $$\frac{dc^2}{db} = 0$$

V. Literaturverzeichnis

Abel, Andrew B. (1987): Operative Gift and Bequest Motives, in: American Economic Review, Vol. 77, S. 1037 - 1047. – *Barro,* Robert J. (1974): Are Government Bonds Net Wealth? in: Journal of Political Economy, Vol. 82, S. 1095 - 1117. – *Cukierman,* Alex; *Meltzer,* Allan H. (1989): A Political Theory of Government Debt and Deficits in a Neo-Ricardian Framework, in: American Economic Review, Vol. 79, S. 713 - 732. – *Diamond,* Peter A. (1965): National Debt in a Neoclassical Growth Model, in: American Economic Review, Vol. 55, S. 1126 - 1150. – *Michaelis,* Jochen (1989): Staatsverschuldung als Quelle der Nicht-Neutralität – Ein Beitrag zum Ricardianischen Äquivalenztheorem, in: Kredit und Kapital, Vol. 22, S. 453 - 469. – *Weil,* Philippe (1987): Love Thy Children – Reflections on the Barro Debt Neutrality Theorem, in: Journal of Monetary Economics, Vol. 19, S. 377 - 391.

Zusammenfassung

Staatsverschuldung als Quelle der Nicht-Neutralität – Ein Beitrag zum Ricardianischen Äquivalenztheorem: Eine Verallgemeinerung

Barro (1974) hat gezeigt, daß ein wirksames Vererbungsmotiv („operative bequest motive") die Gültigkeit des Ricardianischen Äquivalenztheorems in Modellen mit überlappenden Generationen impliziert. *Michaelis* (1989) hat nachgewiesen, daß der Staat mit Hilfe der Finanzpolitik das Wirksamwerden des Vererbungsmotivs beeinflussen kann. Außerdem hat der Staat trotz Vererbungsmotiv die Möglichkeit, durch geeignete Budgetdefizite oder -überschüsse die „Goldene Regel" der Kapitalakkumulation anzusteuern.

Bei seiner Beweisführung hat *Michaelis* der Einfachheit halber unterstellt, daß sowohl die Nutzenfunktion der Konsumenten als auch die Produktionsfunktion der Unternehmen vom *Cobb-Douglas*-Typ sind. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die qualitativen Ergebnisse von Michaelis erhalten bleiben, wenn man eine relativ allgemeine, strikt konkave Nutzenfunktion sowie eine beliebige linear homogene Produktionsfunktion unterstellt. Im Unterschied zum Beitrag von Michaelis und anderen Arbeiten werden die Resultate nicht nur analytisch, sondern auch graphisch abgeleitet. Es wird ein einfaches Diagramm entwickelt, welches die Steady-State-Werte des Zinssatzes und der Pro-Kopf-Vererbung anhand von zwei Kurven bestimmt. Aus diesem Diagramm kann mit einem Blick abgelesen werden, (a) unter welchen Voraussetzungen das Vererbungsmotiv wirksam ist, (b) wie seine Wirksamkeit durch die Wahl der staatlichen Politikparameter beeinflußt wird und (c) wie der Staat seine Finanzpolitik gestalten muß, um die Goldene Regel der Kapitalakkumulation anzusteuern.

Summary

Government Debt as a Source of Non-Neutrality – A Contribution to the Ricardian Equivalence Theorem: A Generalization

Barro (1974) showed that an "operative bequest motive" implies the validity of the *Ricardian* equivalence theorem in models with overlapping generations. *Michaelis* (1989) proved that government is able to influence the operativeness of the bequest motive through fiscal policy management. Moreover, in spite of the bequest motive, government has the possibility of working toward the "golden rule" of capital accumulation through appropriate budgetary deficits or surpluses.

When presenting his evidence, *Michaelis* assumed for reasons of simplicity that both the consumer's utility function and the corporte-sector production function are of the *Cobb-Douglas* type. This contribution shows that the qualitative results obtained by Michaelis remain intact when assuming a relatively general and strictly concave utility function as well as a discretionary linear homogenous production function. As distinct from the Michaelis and other contributions, results are developed not only analytically, but also graphically. A simple diagramme is developed which determines the steady-state values of the interest rate and per-capita bequest with the help of two curves. This diagramme allows to see at one glimpse (a) under what conditions the bequest motive is operative, (b) how its operativenes can be influenced by the choice of governmental policy parameters and (c) in what way government must shape its fiscal policy in order to work toward the golden rule of capital accumulation.

Résumé

L'endettement public comme source de la non-neutralité – Un article sur le théorème d'équivalence de Ricardo: une généralisation

Barro (1974) a montré qu'un motif efficace de leg («operative bequest motive») implique la validité du théorème d'équivalence de Ricardo dans des modèles où des générations se chevauchent. *Michaelis* (1989) a prouvé que l'Etat peut influencer l'efficacité du motif de leg à l'aide de la politique financière. En outre, l'Etat a la possibilité, malgré le motif de leg, de se diriger vers la «règle d'or» de l'accumulation de capitaux par des déficits ou des excédents budgétaires appropriés.

En guise de simplification, *Michaelis* a supposé dans son argumentation que la fonction d'utilité des consommateurs ainsi que la fonction de production des entreprises sont toutes les deux du type de *Cobb-Douglas*. L'auteur montre dans ce travail que les résultats qualitatifs de Michaelis restent valables si l'on suppose que la fonction d'utilité est relativement générale et strictement concave et que la fonction de production est à volonté linéaire et homogène. A la différence de l'article de Michaelis et d'autres travaux, l'auteur ne déduit pas les résultats uniquement de façon analytique, mais il les déduit aussi graphiquement. Il développe un diagramme simple qui détermine à l'aide de deux courbes les valeurs steady-state du taux d'intérêt et du leg par tête. Dans ce même diagramme, on peut également voir (a) sous quelles conditions le motif de leg est efficace, (b) comment son efficacité est influencée par le choix des paramètres politiques de l'Etat et (c) quelle politique financière l'Etat doit poursuivre pour essayer d'atteindre la loi d'or de l'accumulation de capitaux.