

# **Zinsänderungsrisiken und die Strategie der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode**

Von Bernd Rudolph, Frankfurt

## **I. Zinsänderungsrisiken als Gegenstand der Geschäftspolitik von Kreditinstituten**

### *1. Bankbetriebliche Risikopolitik*

Im Laufe der letzten Jahre hat in bankwissenschaftlichen Arbeiten ein Gebiet wachsende Beachtung gefunden, das sich als bankbetriebliche Risiko- oder Sicherheitspolitik bezeichnen lässt. Die Tendenz, Risikopolitik neben der Rentabilitäts- und Liquiditätspolitik als wichtiges eigenständiges Teilstück der Geschäftspolitik von Banken zu verstehen und zu behandeln, lässt sich durch drei Verweise belegen.

Der erste Verweis zielt auf die Lehrbuchliteratur<sup>1</sup>, in der man zunehmend neben einer Phänomenologie konkrete Empfehlungen zur Begrenzung bankbetrieblicher Risiken findet. Begnügten sich ältere Monographien damit, das Spannungsfeld bankbetrieblicher Rentabilität, Liquidität und Sicherheit in recht allgemeiner Form als „magisches Dreieck“ zu beschreiben, so bieten diese neueren Arbeiten eine Umsetzung geschäftspolitischer Zielsetzungen in Handlungsempfehlungen zur Kalkulation, Limitierung oder Abwälzung der Risiken aus den verschiedenen Geschäftssparten der Kreditinstitute. Beispiele findet man in Darstellungen der Kurssicherungspolitik für Risiken aus offenen Währungspositionen, der Besicherungspolitik für Risiken aus dem einzelnen Kreditengagement oder der Diversifikationspolitik für Risiken aus dem Kreditportefeuille.

---

<sup>1</sup> Vgl. Büschgen, H. E., *Bankbetriebslehre*, Wiesbaden 1972; *derselbe*, *Einführung in die Bankbetriebslehre*, Teil I und II, Frankfurt am Main 1977; Hagenmüller, K. F., *Der Bankbetrieb*, Band III, 4. Aufl., Wiesbaden 1977; Hahn, O., *Die Führung des Bankbetriebs*, Eine Einführung in die Geschäftsbank-Politik, Stuttgart, Berlin, Köln, Mainz 1977; Mühlhaupt, L., *Einführung in die Betriebswirtschaftslehre der Banken*, Struktur und Grundprobleme des Bankbetriebs, Wiesbaden 1977; vgl. auch den von Feldbausch, F. K., bearbeiteten 5. Hauptteil der *Bankbetriebslehre* in Band III der *Bank-Enzyklopädie*, Wiesbaden 1975, S. 263 ff.

Die Tendenz zur Hervorhebung der Risikopolitik als wichtiges Teilgebiet bankbetrieblicher Forschung läßt sich nicht nur in den Standardwerken, sondern zweitens auch in Untersuchungen nachweisen, in denen Spezialprobleme der Leistungs- und Sortimentsplanung von Banken abgehandelt werden<sup>2</sup>. Diese Untersuchungen machen gleichzeitig deutlich, daß zur Behandlung des Risikoproblems auch in der Bankbetriebslehre mathematisch-statistische Verfahren mit Erfolg eingesetzt werden können.

Drittens findet man schließlich eine zunehmende Behandlung der Risikoproblematik in Auseinandersetzungen mit den gesetzlichen Risikobegrenzungsgeboten, wie sie ihren Niederschlag in den Strukturanormen des Kreditwesengesetzes und den Grundsätzen des Bundesaufsichtsamtes für das Kreditwesen gefunden haben<sup>3</sup>. Der im zeitlichen Anschluß an den *Herstatt-Fall* von 1974 begründete Grundsatz I a über Devisengeschäfte, die Einsetzung der Studienkommission „Grundsatzfragen der Kreditwirtschaft“ durch den Bundesfinanzminister und die KWG-Novelle von 1976 mit der Einführung des Vieraugenprinzips, der Verschärfung der Großkreditbestimmungen und der Erweiterung der Anzeigepflichten sind Indizien dafür, daß auch der Gesetzgeber — nun aber im Hinblick auf den Schutz der Einleger und die allgemeine Funktionsfähigkeit der Kreditwirtschaft — dem Risikoproblem eine besondere Bedeutung beimißt.

## 2. Teilbereiche der Risikopolitik

Gleichgültig, ob man zusammenfassende Darstellungen der Geschäftspolitik betrachtet oder Spezialliteratur über Risikoplanung bzw. aufsichtsbehördliche Risikobegrenzungsvorschriften, stets stehen neben den Unternehmensrisiken (Liquiditätsrisiko, Solvenzrisiko, Risiken aus dem Betriebsbereich) drei banktypische Vermögensrisiken im Vordergrund der Betrachtung:

<sup>2</sup> Hier sei stellvertretend auch für zahlreiche Aufsätze in Fachzeitschriften auf die Dissertationen von *Küllmer, H.*, *Bankbetriebliche Programmplanung unter Unsicherheit*, Wiesbaden 1975, *Pitz, K. H.*, *Die Anwendungsmöglichkeit der Portfolio Selection Theorie auf die optimale Strukturierung des Banksortiments*, Bochum 1977, *Schneider, G.*, *Zur Planung von Bankportefeuilleentscheidungen*, Frankfurt 1970 und *Wächtershäuser, M.*, *Kreditrisiko und Kreditentscheidung im Bankbetrieb*, Wiesbaden 1971, hingewiesen.

<sup>3</sup> Vgl. *Krümmel, H. J.*, *Liquiditätssicherung im Bankwesen*, in: *Kredit und Kapital*, 1968, S. 247 ff., *derselbe*, *Die Begrenzung des Kreditrisikos im Kreditwesengesetz aus der Sicht der Kredittheorie*, in: *Österreichisches Bank-Archiv*, 1976, S. 181 ff.

- das Kreditrisiko als Bonitäts- oder Ausfallrisiko und als Terminrisiko von Forderungen,
- das Währungsrisiko von Forderungen und
- das Zinsänderungsrisiko von Forderungen.

Mit dem Kreditrisiko haben sich seit der Arbeit von *Apfelthaler*<sup>4</sup> zahlreiche Autoren beschäftigt und sind zu recht überzeugenden Ansätzen gekommen, seitdem sich in den 60er Jahren die Erkenntnis durchgesetzt hat, daß sich Kreditgeschäfte wie Investitionsprojekte durch die ihnen zurechenbaren Ein- und Auszahlungsströme beschreiben lassen und daher die Methoden der Investitionsrechnung bei Unsicherheit einen geeigneten Ansatzpunkt zur Formulierung rationaler Kreditvergabestrategien bieten. Das gilt sowohl für Ansätze wie das Credit Scoring, die eher den Portefeuilleaspekt des Kreditgeschäfts betonen<sup>5</sup>, als auch für die Ansätze im Rahmen der Theorie der Einzelkreditvergabeentscheidung<sup>6</sup>.

Für das Währungsrisiko kann man zu einer ähnlichen Beurteilung kommen, wenn auch die Anzahl der nun zitierbaren Arbeiten weit geringer ist als beim Kreditrisiko. *Backes* hat in seiner Arbeit über Kurssicherungsgeschäfte<sup>7</sup> den optimalen Einsatz der verschiedenen Instrumente zur Begrenzung von Devisenkursrisiken bei unterschiedlichen Datenbedingungen der Unternehmen abgeleitet. Der methodische Ansatz läßt sich ohne große Mühe in den Planungskalkül einer Geschäftsbank integrieren.

Einen wenig zufriedenstellenden Stand der Forschung findet man dagegen bei der Behandlung des dritten banktypischen Risikos, des Zinsänderungsrisikos. Das Zinsänderungsrisiko wird zwar von zahl-

---

<sup>4</sup> *Apfelthaler*, S., Das Risikoproblem im Bankbetrieb, Diss. Wien 1939.

<sup>5</sup> Vgl. *Bräutigam*, J. und *Küllmer*, H., Die Anwendung statistischer Verfahren zur Objektivierung der Kreditwürdigkeitsprüfung, in: Betriebswirtschaftliche Blätter für die Praxis der Sparkassen und Girozentralen, 1972, S. 6 ff. und *Weibel*, P. F., Die Aussagefähigkeit von Kriterien zur Bonitätsbeurteilung im Kreditgeschäft der Banken, Bern und Stuttgart 1973.

<sup>6</sup> Vgl. *Krümmel*, H. J., Finanzierungsrisiken und Kreditspielraum, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 1966, E, S. 134 ff., *Rudolph*, B., Die Kreditvergabeentscheidung der Banken, Opladen 1974, *Wilhelm*, J., Risikohorizont und Kreditspielraum, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 1977, S. 117 ff.

<sup>7</sup> *Backes*, M., Kurssicherungsgeschäfte, Berlin 1977; vgl. auch *Wittgen*, R., Währungsrisiko und Devisenkurssicherung, Frankfurt am Main 1975 und *Moser*, R., Wechselkursrisiko: Theorie und Praxis der Kurssicherungstechniken, Wien 1975.

reichen Autoren erwähnt oder angesprochen, auch werden durch Beispielrechnungen die Konsequenzen von Marktzinsänderungen für das Betriebsergebnis der Banken aufgezeigt, es fehlt aber bislang an einem leistungsfähigen Instrument zur Beschreibung, Quantifizierung und Planung dieses Risikos. Mit der Entwicklung eines solchen Instruments beschäftigt sich der folgende Beitrag.

Dazu wird im folgenden Abschnitt eine Klassifikation der Zinsänderungsrisiken angegeben, im Teil II das Instrument zur Quantifizierung und Planung von Zinsänderungsrisiken anhand eines Problems aus dem Bereich der Kapitalanlageplanung eingeführt und im Teil III diskutiert, welche Möglichkeiten bestehen, dieses Instrument für betriebliche Planungsprobleme einzusetzen.

### *3. Zinsänderungsrisiken bei Kreditinstituten*

Was ist unter dem Begriff des Zinsänderungsrisikos zu verstehen, und wie läßt sich dieses Risiko beschreiben und planbar machen? Zur Beantwortung der ersten Frage nach dem Begriff des Zinsänderungsrisikos ist es vorteilhaft, das Zinsänderungsrisiko einzelner Vermögensgegenstände vom Zinsänderungsrisiko zu unterscheiden, dem Vermögensgesamtheiten oder Unternehmen ausgesetzt sind.

Dem Zinsänderungsrisiko unterliegen alle Vermögensgegenstände, die keine Zahlungsmittel sind, soweit die ihnen zurechenbaren zukünftigen Ein- und Auszahlungen nicht an jenen Zins angebunden sind, der zur Diskontierung der zukünftigen Zahlungsströme herangezogen wird, um den Liquidationswert des Vermögensobjektes zu bestimmen. Ändert sich der für die Diskontierung relevante Zinssatz, dann ändert sich auch der Barwert der Zahlungsreihe und somit der Liquidationswert. Bei Finanzanlagen, die einer fortlaufenden Bewertung am Kapitalmarkt unterliegen und deren Zahlungsreihen nicht mit Unsicherheiten behaftet sind, wird die Abhängigkeit des Barwertes vom Diskontierungssatz vielfach dadurch zum Ausdruck gebracht, daß die Begriffe Zins- und Kursänderungsrisiko gleichbedeutend verwendet werden.

Das Zinsänderungsrisiko, dem Unternehmen ausgesetzt sind, resultiert aus den Zinsänderungsrisiken aller Vermögens- und Schuldpositionen des Unternehmens. Bestimmt man das Reinvermögen von Unternehmen als Kapitalwert und mißt das Zinsänderungsrisiko an der Veränderung des Kapitalwertes, so wird deutlich, daß nun die Begriffe Zins- und Reinvermögensänderungsrisiko korrespondieren.

Speziell bei Kreditinstituten unterscheidet man zwischen einem aktivischen und einem passivischen Zinsänderungsrisiko. Dem passivischen Zinsänderungsrisiko ist eine Bank ausgesetzt, die überwiegend variabel verzinsliche Einlagen, also Einlagen, deren Zinssatz sich an der Kapitalmarktentwicklung orientiert, in Anlagen mit einem Festzinssatz (Festzinsdarlehen, Obligationen) bindet, bei denen der Zinssatz über die Dauer der Kapitalbindung im voraus bestimmt ist<sup>8</sup>. Besteht die Gefahr, daß die Zinskosten (die Kosten der Passiva) bei konstanten Zinserlösen steigen, dann sinkt die Zinsspanne — im Extremfall wird sie negativ. Das Reinvermögen nimmt mit steigendem Marktzins ab<sup>9</sup>. Dem Zinsänderungsrisiko steht die Zinsänderungschance gegenüber, daß die Zinskosten sinken.

Dem aktivischen Zinsänderungsrisiko sind Banken ausgesetzt, die überwiegend Festzinsgelder zu variablen Zinssätzen ausleihen. Besteht die Gefahr, daß die Zinserlöse bei konstanten Zinskosten sinken, dann vermindert sich die Zinsspanne. Das Reinvermögen nimmt mit sinkendem Marktzins ab. Auch dem aktivischen Zinsänderungsrisiko steht eine Zinsänderungschance gegenüber, daß nämlich ein steigender Anlagezinssatz zu einer Vergrößerung der Zinsspanne führt.

In der gegenwärtigen Niedrigzinsphase kommt dem passivischen Zinsänderungsrisiko die wesentliche Bedeutung zu. Diese Beurteilung deckt sich mit warnenden Stimmen aus dem Kreditgewerbe<sup>10</sup> und besonders auch mit dem Schreiben, das das Bundesaufsichtsamt am 23. November 1977 dem Institut der Wirtschaftsprüfer zugestellt hat<sup>11</sup>:

„In der Wirtschaftspresse und in Fachzeitschriften ist in letzter Zeit wiederholt darauf eingegangen worden, daß in der derzeitigen Niedrigzinsphase von den Kreditinstituten in zunehmendem Maße langfristige Kredite erwartet und auch gewährt werden, bei denen die Zinsen fest vereinbart

<sup>8</sup> Zum Begriff des aktivischen und passivischen Zinsänderungsrisikos vgl. Mülhaupt, L., a.a.O., S. 134 ff.; zur Verteilung von Zinsänderungsrisiken und Zinsänderungschancen auf Gläubiger und Schuldner vgl. Wildhagen, J., Zinserwartungen und Anleihekonditionen, Diss. Saarbrücken 1967.

<sup>9</sup> Dem passivischen Zinsänderungsrisiko unterliegt auch das Reinvermögen von Sachinvestoren, wenn die Finanzierung nicht vorwiegend auf einer Festzinsbasis erfolgt.

<sup>10</sup> Vgl. die Beiträge von Schönmann, H. G., Gedanken zur Kongruenz der Refinanzierung langfristiger Darlehen, und von Stützer, R., Die Rendite im Kredit- und Anlagegeschäft der Kreditinstitute, in: Der langfristige Kredit, 1978, S. 131 ff. und S. 139 ff. sowie ähnliche Überlegungen für die Dispositionen privater Anleger bei Wielens, H., Anlage und Spekulation mit Renten, in: Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, 1977, S. 1005 ff.

<sup>11</sup> Schreiben vom 23. 11. 1977 — I 1 — 31 — 2/77.

sind, im Falle einer späteren Erhöhung des Zinsniveaus also nicht an die Entwicklung angepaßt werden können. Mit der Refinanzierung solcher Kredite ist ein Zinsänderungsrisiko verbunden, das nicht nur von der Befristung, sondern auch von der Zinsvariabilität der Refinanzierungsmittel abhängt; es ist um so größer, je mehr Refinanzierungsmittel mit variabler Verzinsung hierfür eingesetzt werden. Im Hinblick auf diese Risiken halte ich es für erforderlich, daß in den Berichten über die Jahresabschlußprüfung der Kreditinstitute dargelegt wird, in welchem Umfange langfristige Kredite zu Festzinssätzen gewährt worden sind und in welchem Ausmaß ihnen keine entsprechend befristeten Refinanzierungsmittel mit festen Zinsen gegenüberstehen.

Ich darf Sie bitten, den Wirtschaftsprüfern, die mit der Prüfung der Jahresabschlüsse befaßt sind, von dem Inhalt dieses Schreibens mit der Bitte um Beachtung Kenntnis zu geben. Ich bitte um die unverzügliche Anzeige der Prüfer nach § 29 Abs. 2 KWG, sofern eine Refinanzierung aus Mitteln mit variablen Zinsen in einem Umfange vorgenommen wird, der geeignet ist, die wirtschaftliche Entwicklung des Kreditinstituts wesentlich zu beeinträchtigen<sup>12</sup>.“

Die Frage, die sich unmittelbar an das Schreiben des Bundesaufsichtsamtes anschließt, ist die, wie sich denn der Umfang oder das Ausmaß der langfristigen Festzinskredite bzw. der Refinanzierungsmittel mit variabler Verzinsung konkret bestimmen läßt? Die Betrachtung beliebiger Bilanzen der Geschäftsbanken zeigt ja, daß die Kreditinstitute Ausleihungen mit einem differenzierten Fächer von Zinssätzen und Fristen vornehmen und auch auf der Passivseite kein homogener Block variabel verzinslicher Gelder zu beobachten ist. Darüber hinaus ist zu berücksichtigen, daß Banken nicht nur Kredite ausreichen, bei denen wegen der Endfälligkeit der Schuld der Bindungszeitraum des Kapitals auf sehr einfache Weise zu bestimmen ist. Gerade bei Festzinskrediten ist vielmehr die Zinseinzahlung und die planmäßige Tilgung der Darlehenssumme typisch mit der Folge, daß sich die Fristigkeit der Anlage zunächst gar nicht durch Angabe einer einzigen wohl definierten Zeitspanne der Kapitalbindung beschreiben läßt.

Zur Feststellung, „in welchem Umfang langfristige Kredite zu Festzinsen gewährt worden sind und in welchem Ausmaß ihnen keine entsprechend befristeten Refinanzierungsmittel mit festen Zinsen gegenüberstehen“, ist also ein Ausdruck zu entwickeln, der die Fristigkeitsstruktur der Aktiva und Passiva zu einer Maßgröße zusammenfaßt, die

---

<sup>12</sup> § 29 Abs. 2 KWG regelt die Mitteilungs- und Auskunftspflichten der Wirtschaftsprüfer und entbindet sie gegenüber dem Bundesaufsichtsamt und der Bundesbank in bestimmten Fällen von ihrer beruflichen Schweigepflicht.

das von der Bank eingegangene Zinsänderungsrisiko erkennen läßt<sup>13</sup>. Zur Entwicklung dieser Maßgröße wollen wir von einem einfachen Anlageproblem ausgehen, das die Grundstruktur der Messung des Zinsänderungsrisikos abbildet und das so einfach gehalten ist, daß sich die Maßgröße für das Zinsänderungsrisiko leicht angeben, interpretieren und in einen Planungsansatz einbauen läßt.

## II. Die Entwicklung einer Strategie zur Begrenzung von Zinsänderungsrisiken

### 1. Ein einfaches Kapitalanlageproblem

Ein Anleger am Kapitalmarkt möchte einen Teil seiner finanziellen Mittel  $G$  mit dem Ziel investieren, daß ihm zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt  $t = T$ , dem Planungshorizont, ein möglichst hoher DM-Betrag zur Verfügung steht. Der Anleger kann, um dieses Ziel zu erreichen, unterschiedliche Strategien verfolgen. Er könnte seine finanziellen Mittel z. B. zum Erwerb von Aktien verwenden oder sich mit einer Kommanditeinlage an der Finanzierung eines Abschreibungssobjektes beteiligen. Solche risikobehafteten Anlageformen seien hier ausgeschlossen. Um nämlich das Zinsänderungsrisiko, das aus der Unsicherheit über die Entwicklung des zukünftigen Marktzinses resultiert, isoliert behandeln zu können, nehmen wir an, daß alle in Frage kommenden Finanzanlagen durch eine deterministische Zahlungscharakteristik gekennzeichnet sind. Als Anlageobjekte bieten sich also ausschließlich Gläubigerpapiere an, für die ein Bonitäts- oder Währungsrisiko nicht existiert, deren Tilgung nicht durch Auslosung erfolgt und bei denen das Kündigungsrecht nach § 247 BGB ausgeschlossen ist. Zweitens nehmen wir zunächst einen einheitlichen Marktzinssatz von  $r\%$  p. a. an, der für Anlagen beliebiger Fristigkeit gilt. Die Annahme einer flachen Zinsertragsskurve schließt aus, daß — wie etwa derzeit am Kapitalmarkt zu beobachten — wachsende Laufzeiten mit steigenden Zinssätzen verbunden sind. Drittens wird vereinfachend angenommen, daß keine Transaktionskosten in Form von Bankprovisionen, Courtagen oder Depotgebühren anfallen.

Zusammenfassend bewirken diese Annahmen, daß für alle betrachteten Anlagealternativen derselbe Effektivzinssatz gilt, daß dieser Ef-

---

<sup>13</sup> Das bedeutet auch, daß die aus dem Aktiv- und Passivgeschäft erwarteten Ein- und Auszahlungen dahingehend zu kennzeichnen sind, ob wegen Zinsgleit- oder Konversionsklauseln eine quasi automatische Anpassung an die Marktentwicklung erfolgen kann.

fektivzinssatz mit dem Marktzinssatz  $r$  übereinstimmt, und daß die für eine Anlage in Frage kommenden Gläubigerpapiere ausschließlich in der Zeitstruktur der Zins- und Tilgungszahlungen differieren können. Daraus folgt unmittelbar, daß bei beliebiger Anlagestrategie der vom Anleger in  $t = T$  verfügbare Betrag genau  $G_T = (1 + r)^T G$  beträgt, sofern sich der Marktzins in Zukunft nicht ändert.

Der Anleger realisiert  $G_T = (1 + r)^T G$  auch bei einem nach erfolgter Anlage steigenden oder fallenden Marktzins, wenn er in Gläubigerpapiere investiert, die genau in  $t = T$  fällig werden und auf die zwischenzeitlich keinerlei Zins- oder Tilgungszahlungen erfolgen. Weicht aber die Laufzeit bzw. Restlaufzeit der endfälligen Papiere vom Planungszeitraum ab, dann ändert sich  $G_T$  in Abhängigkeit vom Marktzins. Bei einem steigenden Marktzins ist der Verfügbetrag  $G_T$  größer als  $(1 + r)^T G$ , sofern die Laufzeit  $N$  der Anlage kleiner ist als die Planungsperiode  $T$ , und  $G_T$  ist kleiner als  $(1 + r)^T G$ , wenn die Laufzeit der Anlage größer ist als die Planungsperiode. Im ersten Fall wird nämlich der Anleger bei der Wiederanlage des frühzeitig fällig werdenden Betrages den angezogenen Marktzins realisieren; im zweiten Fall wird er dagegen wegen des angestiegenen Marktzinses nur den in  $t = T$  unter pari liegenden Kurswert seiner Papiere liquidieren können. Für den Fall, daß der Marktzins sinkt, gelten die jeweils entgegengesetzten Aussagen.

Der Verfügbetrag  $G_T$  ist also von Marktzinsänderungen nicht betroffen, wenn die Laufzeit der Titel (endfällige Papiere ohne zwischenzeitliche Zinszahlungen) mit der Planungsperiode übereinstimmt (Laufzeitstrategie). Weicht dagegen die Laufzeit  $N$  von der Planungsperiode ab, so ergeben sich positive oder negative Abweichungen des Verfügbetrages  $G_T$  von  $(1 + r)^T G$  je nachdem, ob die Laufzeit  $N$  der Anlage kleiner oder größer als die Planungsperiode  $T$  ist und je nachdem, ob der Marktzins nach erfolgter Anlage höher oder niedriger ist als der ursprüngliche Marktzins  $r$ . Die Reaktionen des Verfügbetrages auf Marktzinsänderungen sind in der Tabelle 1 zusammengestellt.

Der Anwendungsbereich der Tabelle 1 ist nun dadurch stark beschränkt, daß sich die Aussagen über die Reaktionen des Verfügbetrages auf Anlageformen beziehen, nämlich endfällige Titel ohne zwischenzeitliche Zinszahlungen, die am Kapitalmarkt eher Ausnahmeherrscheinungen darstellen. Längerfristige Papiere sind in der Regel in der Weise ausgestattet, daß jährlich oder halbjährlich Kuponzahlungen erfolgen und daß darüber hinaus nach ein paar Freijahren auch

Tabelle 1

## Reaktion des Verfügungsbetrages auf Änderungen des Marktzinses

Laufzeit der Anlage	Marktzins		
	sinkt	bleibt gleich	steigt
$N < T$	$G_T < (1 + r)^T G$	$G_T = (1 + r)^T G$	$G_T > (1 + r)^T G$
$N = T$	$G_T = (1 + r)^T G$	$G_T = (1 + r)^T G$	$G_T = (1 + r)^T G$
$N > T$	$G_T > (1 + r)^T G$	$G_T = (1 + r)^T G$	$G_T < (1 + r)^T G$

Tilgungszahlungen einsetzen können. Offensichtlich ist beim Kauf solcher Papiere die Reaktion des Verfügungsbetrages  $G_T$  auf Marktzinsänderungen nicht mehr an Hand des Schemas der Tabelle 1 zu beurteilen.

Übersteigt die Laufzeit einer „normalen“ Finanzanlage die Planungsperiode, so ist ein steigender Marktzins bei der Wiederanlage der bis  $t = T$  erfolgten Zins- und Tilgungszahlungen (positiver Effekt) und gleichzeitig bei der Kurswertermittlung (negativer Effekt) zu berücksichtigen<sup>14</sup>. Kompensieren sich beide Effekte, dann ist der Verfügungsbetrag  $G_T$  gegenüber Zinssatzänderungen immun.

Die Frage, unter welchen Bedingungen sich die positiven und negativen Effekte einer Marktzinsänderung gerade kompensieren, lässt sich beantworten, wenn man den (in bestimmter Weise definierten) zeitlichen Einzahlungsschwerpunkt der Finanzanlage kennt. Diesen zeitlichen Einzahlungsschwerpunkt der Anlage bezeichnen wir als die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode der Anlage. Der Anleger erhält nämlich zumindest den Verfügungsbetrag  $G_T = (1 + r)^T G$  und profitiert von Marktzinsänderungen gleich welcher Richtung dann, wenn die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode der Finanzanlage gerade seiner Planungsperiode entspricht (Strategie der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode).

Was hat man unter der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode einer Finanzanlage zu verstehen und wie kann man zeigen, daß die angegebene Strategie tatsächlich zu dem postulierten Ergebnis führt?

<sup>14</sup> Der Verfügungsbetrag  $G_T$  ist darüber hinaus davon abhängig, zu welchem Zeitpunkt und in welcher Höhe die Marktzinsänderung erfolgt. Wir nehmen an, daß die Marktzinsänderung erstens einmalig und zweitens unmittelbar nach Durchführung der Finanzinvestition erfolgt.

## 2. Die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode

Die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode ( $\phi SLP$ ) einer Anlage wird als gewogener Mittelwert jener Zeitpunkte bestimmt, zu denen beim Anleger Einzahlungen aus seiner Anlage erfolgen. Führt die Anlage zu den Zeitpunkten  $t = 1, 2, 3, 4 \dots$  zu Einzahlungen und ist  $x_t$  der Gewichtungsfaktor für den Zeitpunkt  $t$ , dann ist die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode also gegeben durch  $\phi SLP = x_1 1 + x_2 2 + x_3 3 + x_4 4 + \dots = \sum x_t t$  mit  $\sum x_t = 1$  und  $x_t \geq 0$ . Als Gewichtungsfaktoren für die Einzahlungszeitpunkte verwendet man das Verhältnis der Barwerte der den Zeitpunkten zukommenden Einzahlungen  $E_t/(1+r)^t$  zum Barwert der gesamten Einzahlungsreihe  $B_0$ . Der Barwert der gesamten Einzahlungsreihe und somit der Barwert der Finanzanlage ist

$$(1) \quad B_0 = \frac{E_1}{(1+r)} + \frac{E_2}{(1+r)^2} + \frac{E_3}{(1+r)^3} + \frac{E_4}{(1+r)^4} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t}{(1+r)^t},$$

wenn  $E_1, E_2, E_3$  usw. die Einzahlungen aus der Anlage bezeichnen, wobei es gleichgültig ist, ob diese Einzahlungen Zins- oder Tilgungszahlungen darstellen sollen. Der Barwert der in  $t = 1$  erfolgenden Einzahlung ist  $E_1/(1+r)$ , so daß der Gewichtungsfaktor  $x_1$  gerade  $\{E_1/(1+r)\}/B_0$  ist. Entsprechend ist der Gewichtungsfaktor  $x_2$  für den Einzahlungszeitpunkt 2 gerade  $\{E_2/(1+r)^2\}/B_0$ . Die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode einer Finanzanlage ist also definiert als

$$(2) \quad \phi SLP = \frac{E_1/(1+r)}{B_0} 1 + \frac{E_2/(1+r)^2}{B_0} 2 + \frac{E_3/(1+r)^3}{B_0} 3 + \dots \\ = \frac{1}{B_0} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t}{(1+r)^t} t.$$

In dem einfachen, bereits behandelten Fall, daß aus der Anlage nur eine einzige Einzahlung erfolgt, ist die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode mit der Laufzeit der Anlage identisch. Es gilt dann nämlich, wenn diese Einzahlung in  $t = N$  erfolgt,  $B_0 = E_N/(1+r)^N$  und somit  $\phi SLP = N$ .

Es ist nun zu zeigen, daß die Strategie der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode zu der behaupteten Eliminierung des Zinsänderungsrisikos führt. Dazu betrachten wir den vom Anleger im Zeitpunkt  $t = T$  insgesamt verfügbaren Betrag  $G_T$ . Dieser ergibt sich durch Aufzinsung aller vor  $t = T$  und durch Abzinsung aller nach  $t = T$  erfolgenden Einzahlungen aus der Finanzanlage.

$$(3) \quad G_T = \frac{(1+r)^{T-1} E_1 + (1+r)^{T-2} E_2 + \dots + E_T}{\substack{\text{Wert der bis } t=T \text{ erfolgten Zahlungen} \\ + (1+r)^{-1} E_{T+1} + (1+r)^{-2} E_{T+2} + \dots}} \\ \text{Liquidationswert zum Zeitpunkt } t=T$$

Gleichung (3) besagt, daß die Einzahlung  $E_1$  noch für  $T-1$  Perioden anzulegen, die Einzahlung  $E_2$  noch für  $T-2$  Perioden anzulegen ist. Die Einzahlung  $E_T$  erfolgt zum Zeitpunkt  $t=T$ , wenn der Anleger über den Betrag verfügen will. Alle nachfolgenden Einzahlungen sind auf den Zeitpunkt  $t=T$  abzuzinsen. Zusammenfassend läßt sich der in (3) angegebene Verfügungsbetrag  $G_T$  darstellen als

$$(4) \quad G_T = \sum_{t=1}^{\infty} (1+r)^{T-t} E_t = (1+r)^T \sum_{t=1}^{\infty} E_t / (1+r)^t$$

Eine kleine Zinssatzveränderung unmittelbar nach erfolgter Kapitalanlage verändert den Verfügungsbetrag  $G_T$ .

$$(5) \quad dG_T/dr = (1+r)^{T-1} \{ T \sum E_t / (1+r)^t - \sum E_t t / (1+r)^t \}$$

Die Veränderung des Verfügungsbetrages ist Null, wenn der Ausdruck in der Klammer von (5) Null ist, woraus folgt, daß  $G_T$  gegenüber kleinen Zinssatzänderungen immun ist, wenn

$$(6) \quad T = \frac{\sum E_t t / (1+r)^t}{\sum E_t / (1+r)^t}$$

gilt. Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (6) gibt die in (2) definierte durchschnittliche Selbstliquidationsperiode an. Stimmt die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode der Anlage mit der Planungsperiode überein, so bleibt der Verfügungsbetrag  $G_T$  von einer kleinen Marktzinsschwankung unberührt. Reale Zinsänderungen führen zu einer Veränderung des Verfügungsbetrages. Die Veränderung ist aber — unabhängig davon, in welche Richtung sich der Marktzins bewegt — stets positiv<sup>15</sup>.

<sup>15</sup> Markzinserhöhungen und sinkende Markzinsen führen zu wachsenden Verfügungsbeträgen, wenn  $\phi SLP = T$  erfüllt ist. Dieses Verhalten der  $G_T$ -Funktion läßt sich aus der Prüfung der zweiten Ableitung von  $G_T$  nach  $r$  entnehmen. Dazu schreibt man (5) in der Form  $dG_T/dr = (1+r)^{T-1} B_0 (T - \phi SLP)$ . Wegen

$$d^2 G_T/dr^2 = (T-1)(1+r)^{T-2} B_0 (T - \phi SLP) + (1+r)^{T-1} (T - \phi SLP) \\ dB_0/dr - (1+r)^{T-1} B_0 d\phi SLP/dr \text{ mit}$$

$d\phi SLP/dr = -V/(1+r)$  und  $V \geq 0$ , gilt für  $\phi SLP = T$

$d^2 G_T/dr^2 = (1+r)^T B_0 V \geq 0$ , so daß  $G_T$  ein Minimum ist.  $V$  ist definiert als

$$V = \frac{1}{B_0} \sum \frac{E_t}{(1+r)^t} (t - \phi SLP)^2 \geq 0$$

und läßt sich als Varianz der Einzahlungszeitpunkte interpretieren.

*3. Ein Beispiel für die Strategie  
der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode*

Der Planungshorizont des Anlegers, der einen Betrag von  $G = 15\ 000$  DM investieren möchte, sei  $T = 2$  Jahre. Mögliche Anlageformen sind die Wertpapiere A, B und C, deren Nominalzins mit dem derzeitigen Marktzins von 6 % übereinstimmt, so daß der Kurs der drei Papiere 100 beträgt und der Anleger insgesamt 150 Stücke erwirbt. Alle drei Papiere führen (um die Rechenarbeit zu vereinfachen) nur in  $t = 1, 2$  und 3 zu Einzahlungen. Der zeitliche Schwerpunkt dieser Einzahlungen ist aber unterschiedlich. Investiert der Anleger jeweils den Gesamtbetrag  $G$  in die Wertpapierarten A, B oder C, so erzielt er daraus die in der Tabelle 2 zusammengestellten Einzahlungen.

**Tabelle 2**  
**Einzahlungen aus der Anlage in die Wertpapierarten A, B oder C**

Wertpapierart	Einzahlung aus der Anlage im Zeitpunkt		
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
A	5 900	5 600	5 300
B	5 300	5 618	5 955,08
C	900	900	15 900

Der zeitliche Schwerpunkt der Einzahlungen liegt also bei der Wertpapierart A vor dem der Wertpapierart B und dieser wiederum vor dem der Wertpapierart C. In der Tabelle 3 werden die Barwerte (2) der in  $t = 1, 2$  und 3 erfolgenden Einzahlungen (1) ermittelt, mit den zugehörigen Einzahlungszeitpunkten 1, 2 oder 3 multipliziert (3) und die durchschnittlichen Selbstliquidationsperioden als Maß für die zeitlichen Einzahlungsschwerpunkte der drei Anlagealternativen berechnet.

Tabelle 4 gibt an, welchen Verfügungsbetrag  $G_2$  der Anleger aus den drei Anlagealternativen erzielt, wenn der Marktzins nach der Festlegung der Mittel um zwei Prozent sinkt, wenn er konstant bleibt und wenn er um zwei Prozent steigt.

Für den Fall einer Anlage in das Wertpapier A mit einer durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode von ca. 1,93 Jahren übernimmt der Anleger das Risiko eines sinkenden Marktzinses, bei einer Anlage in das Wertpapier C (mit einer durchschnittlichen Selbstliquidations-

Tabelle 3

Berechnung der durchschnittlichen Selbstliquidations-  
perioden der Anlagealternativen

Wert- papier- art	Zah- lungs- zeit- punkt	$E_t$ (1)	$E_t/(1+r)^t$ (2)	$E_t t/(1+r)^t$ (3)	$\phi SLP$ $\Sigma (3)/\Sigma (2)$
A	1	5 900,00	5 566,04	5 566,04	
	2	5 600,00	4 983,98	9 967,96	
	3	5 300,00	4 449,98	13 349,95	
	$\Sigma$	15 000,00	28 883,95		1,93
B	1	5 300,00	5 000,00	5 000,00	
	2	5 618,00	5 000,00	10 000,00	
	3	5 955,08	5 000,00	15 000,00	
	$\Sigma$	15 000,00	30 000,00		2,00
C	1	900,00	849,06	849,06	
	2	900,00	800,99	1 602,00	
	3	15 900,00	13 349,95	40 049,83	
	$\Sigma$	15 000,00	42 500,89		2,83

Tabelle 4

Vergleich der Verfügungsbeträge der Anlagealternativen  
bei unterschiedlichen Marktzinsentwicklungen

Wertpapierart	Verfügungsbetrag bei einem Marktzins nach erfolgter Anlage von		
	4 %	6 %	8 %
A ( $\phi SLP < 2$ )	16 832,15	16 854,00	16 879,41
B ( $\phi SLP = 2$ )	16 856,04	16 854,00	16 855,96
C ( $\phi SLP > 2$ )	17 124,46	16 854,00	16 594,22

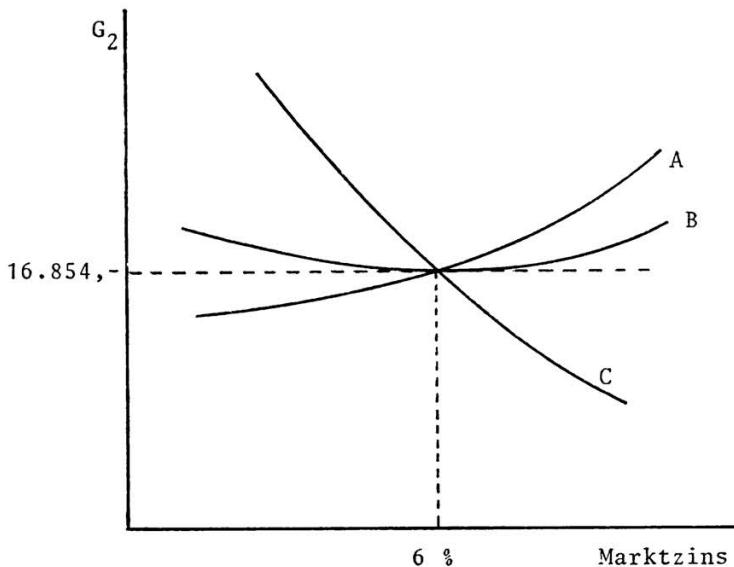


Abb. 1: Abhängigkeit des Verfügungsbetrages  $G_2$  vom Marktzins nach erfolgter Vermögensanlage

periode von ca. 2,83 Jahren) das Risiko eines steigenden Marktzinses. Die Ergebnisse der Tabelle 4 korrespondieren also mit denen der Tabelle 1 für endfällige Titel. Der bemerkenswerte Unterschied besteht in der zweiten Zeile für die Anlage B mit einer durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode von genau 2 Jahren darin, daß Marktzinsänderungen beider Richtungen zu steigenden Verfügungsbeträgen führen. Diese Abhängigkeit kommt auch im Verlauf der in Abbildung 1 skizzierten  $G_2$ -Funktion für die Wertpapierart B zum Ausdruck.

Gegen die in der Beispielrechnung verwendeten Daten läßt sich einwenden, daß gerade die Anlageform B, die zu einem von Marktzinsänderungen stets positiv beeinflußten Verfügungsbetrag führt, keine für am Kapitalmarkt emittierte und gehandelte Papiere typische Zahlungscharakteristik aufweist, so daß die vorgetragene Strategie nur in Ausnahmefällen realisierbar erscheint<sup>16</sup>. Der zunächst berechtigte Einwand

<sup>16</sup> Wertpapier B zeichnet sich durch „ungewöhnliche“, steigende Einzahlungen (5 300 DM, 5 618 DM, 5 955,08 DM) aus. Die Wertpapierart A weist die für ein Darlehen typische Zahlungscharakteristik auf, das in gleichbleibenden Tilgungsraten zurückgezahlt wird. Der Zahlungsstrom der Wertpapierart C ist typisch für eine Schuldverschreibung mit jährlichem Kupon und der Gesamttilgung am Ende der Laufzeit.

läßt sich überwinden, wenn man den Begriff der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode eines Portefeuilles einführt. Der Anleger kann nämlich aus den Wertpapierarten A und B (ebenso aber auch aus anderen am Markt gehandelten Papieren) ein Portefeuille bilden, das eine durchschnittliche Selbstliquidationsperiode von 2 Jahren aufweist. Bezeichnet man die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode dieses Portefeuilles mit  $\phi SLP_P$  und die eines beliebigen Wertpapiers  $i$  mit  $\phi SLP_i$ , so gilt

$$(7) \quad \phi SLP_P = \frac{1}{B_0} \sum_i B_{0i} \phi SLP_i \quad \text{mit} \quad B_0 = \sum_i B_{0i} ,$$

so daß also der Anteil der einzelnen Wertpapierarten in einer Höhe gewählt werden kann, die für das Wertpapierportefeuille zu der gewünschten durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode führt<sup>17</sup>. Betrachtet man in dem vorgetragenen Beispiel nur die Wertpapierarten A und C als mögliche Anlageformen, dann erhält man aus der Bedingung  $2 = \{1,93 B_{0A} + 2,83 (15\ 000 - B_{0A})\}/15\ 000$  einen Anteil von über 92 % für das Wertpapier A und einen Anteil von unter 8 % für das Wertpapier C am Anlageportefeuille, wenn ein marktzinsimmuner Verfügungsbetrag  $G_2$  erreicht werden soll.

Die Strategie der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode läßt sich also nicht nur für einzelne Finanzanlagen, sondern auch für Portefeuilles von Finanzanlagen formulieren.

### III. Anwendungsbereiche der Strategie der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode

Die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode ist eine Maßzahl, die geeignet ist, Zinsänderungsrisiken exakt zu beschreiben und planbar zu machen. Die Wirksamkeit dieser Maßzahl wurde bislang aber nur an Hand eines speziellen Kapitalanlageproblems aufgezeigt. Was leistet sie für die Risikoplanung der Geschäftsbanken?

Eine erste Antwort auf diese Frage läßt sich geben, wenn man die in der Literatur behandelten Problemstellungen betrachtet, die das Instrument der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode zu einer Pro-

---

<sup>17</sup> Unterschiedliche Portefeuillestrukturen führen auch bei übereinstimmenden durchschnittlichen Selbstliquidationsperioden in der Regel zu unterschiedlichen Reaktionen des Verfügungsbeitrages auf Marktzinsschwankungen.

blemlösung heranziehen<sup>18</sup>. Wir wollen hier die Beiträge von *Macaulay*, *Hicks* und *Samuelson* als die Originalquellen dieses Instrumentes kurz skizzieren. Die Diskussion erfolgt in der Weise, daß deutlich wird, daß jeder dieser drei Ansätze den Blick für einen speziellen Aspekt des Anwendungsbereichs der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode öffnet.

### 1. *Macaulays „Duration“*

Eine Definition der in Formel (2) angegebenen durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode findet man zum ersten Mal in einer umfassenden Untersuchung von Frederick R. *Macaulay* über die Entwicklung der Kurse von Anleihen amerikanischer Eisenbahngesellschaften seit 1856<sup>19</sup>. *Macaulay* suchte zur Charakterisierung der „tatsächlichen“ Laufzeit kupontragender Anleihen nach einer einfachen skalaren Maßgröße und konstruierte als Maßzahl die „Duration“<sup>20</sup>.

*Macaulays* Definition weicht von der in (2) angegebenen in zweierlei Richtung ab. Erstens betrachtet *Macaulay* den speziellen Typ einer Schuldverschreibung mit gleichbleibenden (jährlichen oder halbjährlichen) Zinszahlungen und der Tilgung der Schuld am Ende der Laufzeit, so daß sich (2) spezifizieren läßt als

$$(8) \quad \phi SLP = \frac{\sum_{t=1}^N \frac{C}{(1+r)^t} t + \frac{M}{(1+r)^N} N}{\sum_{t=1}^N \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{M}{(1+r)^N}}.$$

In (8) ist  $N$  die Anzahl der mit der Anleihe verbundenen Zinsscheine und im Falle jährlicher Kuponzahlungen  $C$  gleichzeitig die Laufzeit in Jahren.  $M$  gibt den Tilgungsbetrag an, der mit dem Nominalwert übereinstimmt, wenn der Rückzahlungskurs mit 100 % festgelegt ist. Die Summen im Zähler und Nenner von (8) lassen sich zusammenfassen und führen auf

$$(8') \quad \phi SLP = \frac{1+r}{r} - \frac{N(C-rM) + (1+r)M}{C(1+r)^N - (C-rM)}.$$

<sup>18</sup> Eine kurze Dogmengeschichte findet man bei Weil, R. L., *Macaulays Duration: An Appreciation*, in: *Journal of Business*, 1973, S. 589 ff.

<sup>19</sup> *Macaulay*, F. R., *Some Theoretical Problems suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*, New York 1938.

<sup>20</sup> „Let us use the word ‚duration‘ to signify the essence of the time element in a loan. If one loan is essentially a longer term loan than another we shall speak of it as having greater ‚duration‘.“ *Macaulay*, F. R., a.a.O., S. 44.

Ist  $M$  der Nominalwert der Anleihe, dann ist  $p = C/M$  der Nominalzinssatz bzw. die Kuponrate, und die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode dieser Anleihe ist

$$(9) \quad \phi SLP = \frac{1+r}{r} - \frac{N(p-r)+(1+r)}{p(1+r)^N - (p-r)}$$

Stimmt der Nominalzins mit dem Marktzins überein ( $p = r$ ), dann gilt

$$\phi SLP = \frac{1+r}{r} \left( 1 - \frac{1}{(1+r)^N} \right),$$

und für  $N \rightarrow \infty$  (Ewige Rente) ist die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode gerade  $(1+r)/r$ . Im übrigen sinkt in (9) die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode mit steigendem Nominalzins. Bei einem angenommenen Marktzins von 6 % wird diese Abhängigkeit in der Tabelle 5 beschrieben, in der für eine 10jährige Anleihe neben der jährlichen auch die halbjährliche Kuponzahlung mit einem Nominalzinssatz von  $p/2$  berücksichtigt ist<sup>21</sup>.

Tabelle 5

**Abhängigkeit der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode vom Nominalzinssatz**

Nominal- zinssatz	Durchschnittliche Selbstliquidationsperiode in Jahren bei	
	jährlicher Zinszahlung	halbjährlicher Zinszahlung
0 %	10,00	10,00
2 %	8,96	8,90
4 %	8,28	8,18
6 %	7,80	7,67
8 %	7,45	7,30
10 %	7,17	7,01

Bei einem kuponlosen Papier (Diskontpapier) stimmt die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode mit der Laufzeit überein. Kuponzahlungen bewirken, daß die Einzahlungen im Durchschnitt früher er-

<sup>21</sup> Bei halbjährlicher Zinszahlung setzt man in (9)  $N' = 20$ ,  $p' = p/2$ ,  $r' = (1+r)^{1/2} - 1 \approx 0,029563$  und halbiert das Ergebnis der Rechnung. Will man von „effektiv“ vergleichbaren Nominalzinssätzen ausgehen, dann setzt man  $p' = (1+p)^{1/2} - 1$  und erhält etwas höhere Werte als in Tabelle 5.

folgen. Der Effekt lässt sich steigern, wenn die Kuponzahlungen mehr als einmal jährlich vorgenommen werden.

Die zweite Abweichung der von *Macaulay* gegebenen Definition von der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode in (2) besteht darin, daß *Macaulay* der Berechnung der „Duration“ nicht den Marktzins, sondern den Effektivzins (yield to maturity) der Anleihe zugrunde legt. Ist  $K_0$  der bekannte Kurswert einer  $N$ -jährigen Anleihe, dann lässt sich der Effektivzinssatz  $i_N$  aus

$$(10) \quad K_0 = \sum_{t=1}^N \frac{C}{(1+i_N)^t} + \frac{M}{(1+i_N)^N}$$

als interner Zinsfuß berechnen. *Macaulays* „Duration“ lässt sich dann für eine  $N$ -jährige Anleihe mit jährlicher Zinsausschüttung angeben als

$$(11) \quad D = \frac{1}{K_0} \left\{ \sum_{t=1}^N \frac{C}{(1+i_N)^t} t + \frac{M}{(1+i_N)^N} N \right\}.$$

Der Grund für diese Abweichung in der Definition liegt darin, daß *Macaulay* im Rahmen seiner empirischen Arbeit nicht von der vereinfachenden Annahme eines für alle Anlagezeiträume identischen Marktzinssatzes ausgehen konnte. Daher ersetzt er den Marktzins durch den Effektivzins und ist so in der Lage, aus der Beobachtung der Werte für  $K_0$ ,  $C$  und  $M$  bei Anleihen unterschiedlicher Laufzeit auf den Verlauf der Zinsertragskurve zu schließen. Wir brauchen hier nicht zu diskutieren, warum dieses Vorgehen für eine Abschätzung der Fristigkeitsstruktur der Zinssätze unbefriedigend bleiben muß<sup>22</sup>.

Das oben behandelte Anlageproblem kann mit dem Ansatz (11) nicht gelöst werden, wenn die Annahme einer flachen Zinsertragskurve aufgegeben wird. Es müßte dann nämlich erstens gelten, daß der Anleger freiwerdende Mittel stets zum Effektivzinssatz reinvestieren kann, und zweitens unterstellt werden, daß sich der Liquidationswert der Anleihe in  $t = T$  nach dem Effektivzinssatz der Anleihe bestimmt. Die Kritik an diesen Voraussetzungen ist aus der Diskussion der Internen-Zinsfuß-Methode hinreichend bekannt. Um sie zu vermeiden, ist bei unterschied-

---

<sup>22</sup> Carr, J. L., Halpern, P. J. und McCallum, J. S., Correcting the Yield Curve: A Re-Interpretation of the Duration Problem, in: Journal of Finance, 1974, S. 1287 ff. haben gezeigt, daß das Verfahren von *Macaulay* zulässig ist, wenn entweder ein für alle Anlagezeiträume identischer Marktzinssatz gilt oder wenn der Kuponsatz gerade Null ist. *Macaulays* Analyse bezieht sich aber gerade auf den Fall positiver Kuponsätze.

lichen Marktzinssätzen die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode als

$$(12) \quad \phi \text{ SLP} = \frac{1}{K_0} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t}{(1+R_t)^t} \text{ t mit } K_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t}{(1+R_t)^t} \text{ und} \\ (1+R_t)^t = (1+r_1)(1+r_2)(1+r_3) \dots (1+r_t)$$

zu definieren. In (12) ist  $R_t$  der Marktzins für eine  $t$ -jährige Anlage und  $r_t$  der Marktzins für eine einperiodige Anlage in der Periode  $t$ , so daß der Diskontfaktor  $(1+R_t)$  dem geometrischen Mittel aller bis  $t$  geltenden einperiodigen Diskontfaktoren entspricht.

Die Bedingung für einen marktzinsimmunen Verfügungsbetrag ist bei unterschiedlichen Marktzinssätzen nicht mehr in der einfachen Form anzugeben, die für einen einheitlichen Marktzinsfuß im Teil II entwickelt wurde. Würde etwa der Marktzins für vierjährige Anlagen steigen und der für fünfjährige gleichzeitig sinken, dann ist die Strategie der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode nicht mehr anwendbar<sup>23</sup>. Ändert sich aber nicht die Struktur der Zinssätze, sondern nur das Zinsniveau, dann führt die Strategie zu einer optimalen Lösung<sup>24</sup>. Diese Beobachtung ist von Bedeutung für praktische Probleme

<sup>23</sup> Zu den Bedingungen, unter denen die „Duration“-Strategie bei stetiger Verzinsung und unterschiedlichen Veränderungen der Zinsertragskurve zu einer optimalen Lösung führt, vgl. Fisher, L. und Weil, R. L., Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Return to Bondholders from Naive and Optimal Strategies, in: Journal of Business, 1971, S. 408 ff.; Cooper, I. A., Asset Values, Interest-Rate Changes, and Duration, sowie Bierwag, G. O., Immunization, Duration, and the Term Structure of Interest Rates, in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1977, S. 701 ff. und S. 725 ff.; Bierwag, G. O. und Kaufmann, G. G., Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: A Note, in: Journal of Business, 1977, S. 364 ff.

<sup>24</sup> Wir nehmen an, der Diskontfaktor  $(1+R_t)$  lasse sich als Vielfaches  $\alpha_t$  eines Basisdiskontfaktors  $(1+r)$  darstellen. Es gilt dann

$$(1+R_1) = (1+r_1) = (1+r) \alpha_1 \\ (1+R_2)^2 = (1+r_1)(1+r_2) = (1+r)^2 \alpha_1 \alpha_2 \\ \vdots \\ (1+R_t)^t = (1+r_1)(1+r_2)(1+r_3) \dots (1+r_t) = (1+r)^t \prod_{t=1}^t \alpha_t$$

Analog zu (4) läßt sich der Verfügungsbetrag angeben als

$$G_T = (1+R_T)^T \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t}{(1+R_t)^t}$$

Die Ableitung von  $G_T$  nach  $r$  (Änderung des Zinsniveaus)

$$\frac{dG_T}{dr} = T(1+R_T)^T (1+r)^{-1} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t}{(1+R_t)^t}$$

der Planung des Zinsänderungsrisikos, für die die Annahme einer flachen Zinsertragskurve eine unzulässige Vereinfachung der tatsächlichen Situation darstellen würde.

## 2. Die Zinselastizität des Barwertes von Vermögensanlagen nach Hicks

Ein Jahr nach Macaulays Studie über die Entwicklung der Anleiherenditen amerikanischer Eisenbahngesellschaften erscheint das Buch „Value and Capital“ von Hicks<sup>25</sup>. Hicks verwendet dort eine Durchschnittselastizität<sup>26</sup> als Maß für die durchschnittliche Produktionsperiode. Die von Hicks definierte Elastizität des Barwertes eines Einzahlungsstroms (the elasticity of this capital value with respect to the discount ratio) stimmt mit der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode dieses Einzahlungsstromes überein. Leitet man nämlich den Barwert  $B_0$  aus (1) nach  $r$  ab und multipliziert das Ergebnis mit  $(1 + r)/B_0$ , so erhält man wegen

$$dB_0/dr = - \frac{1}{1 + r} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t}{(1 + r)^t} \cdot t$$

die Identität

$$(13) \quad - \frac{dB_0/B_0}{dr/(1 + r)} = \phi \text{ SLP} .$$

Auf die Bedeutung des Ansatzes von Hicks für die temporale Kapitaltheorie ist hier nicht einzugehen<sup>27</sup>. Für die Interpretation der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode ist aber noch die Bemerkung von Hicks bedeutsam, daß die „elasticity of the capital value with respect to the discount ratio“ in Jahren angegeben wird, während der übliche

---


$$- (1 + R_T)^T \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t}{(1 + R_t)^t} (1 + r)^{-1} t$$

ist Null, wenn

$$T = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t}{(1 + R_t)^t} \cdot t}{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_t}{(1 + R_t)^t}}$$

gilt.

<sup>25</sup> Hicks, J. R., Value and Capital, Oxford 1939; 2. Aufl., Oxford 1946.

<sup>26</sup> Fehl, U., Die durchschnittliche Produktionsperiode als Grundbegriff der temporalen Kapitaltheorie, Bestandsaufnahme und Neufassung, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 1975/76, S. 294.

<sup>27</sup> Vgl. Fehl, U., a.a.O., S. 289 ff. sowie v. Weizsäcker, C. C., Substitution along the Time Axis, in: Kyklos, 1974, S. 732 ff.

Elastizitätsbegriff auf eine Verhältniszahl führt. *Hicks* erklärt diese Abweichung aus der Verrechnung von Zinseszinsen<sup>28</sup>. Tatsächlich folgt diese Abweichung daraus, daß im Nenner der linken Seite von (13) die Veränderung des Marktzinssatzes  $dr$  auf den Aufzinsungsfaktor  $(1 + r)$  bezogen wird<sup>29</sup>. Ersetzt man in (13) den Aufzinsungsfaktor  $(1 + r)$  durch den Zinssatz  $r$ , so erhält man als Zinselastizität des Barwertes<sup>30</sup>

$$(14) \quad \varepsilon = - \frac{dB_0/B_0}{dr/r} = \frac{r}{1+r} \phi SLP$$

und somit eine Verhältniszahl. Die Zinselastizität des Barwertes  $\varepsilon$  ist eine linear steigende Funktion der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode<sup>31</sup>. Da die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode nur im Falle einer endfälligen Anleihe ohne zwischenzeitliche Zinszahlungen mit der Laufzeit der Anleihe übereinstimmt und bei allen üblichen Finanzierungsinstrumenten kleiner ist als die Laufzeit, steigt die Zinselastizität i. d. R. unterproportional zur Laufzeit. In Abbildung 2 ist die Zinselastizität in Abhängigkeit von der Laufzeit für drei typische Finanzierungsinstrumente dargestellt<sup>32</sup>. Den üblichen Finanzierungsinstrumenten lassen sich typische Zinselastizitätsfunktionen zuordnen.

<sup>28</sup> „This is a consequence of compound interest. The rate of interest for two years is not double that for one; so that time cannot be eliminated by considering proportional changes.“ *Hicks*, J. R., a.a.O., (1946), S. 187.

<sup>29</sup> Der Aufzinsungsfaktor  $(1 + r)$  hat die Dimension DM/DM = 1; dasselbe gilt für  $(1 + r)^2$  usw. Der Zins hat die Dimension DM/(DM × Jahr) = 1/Jahr.

<sup>30</sup> *Haugen*, R. A. und *Wichern*, D. W., The Elasticity of Financial Assets, in: *Journal of Finance*, 1974, S. 1229 ff. identifizieren wie *Hicks* die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode mit der „interest elasticity of the value“. Der gewohnte Elastizitätsbegriff führt auf (14).

<sup>31</sup> Die Steigung der Zinselastizitätsfunktion ist um so größer, je höher der Marktzins ist. Die Zinselastizität ist 1, wenn  $\phi SLP = (1 + r)/r$  gilt. Diese durchschnittliche Selbstliquidationsperiode hat eine endfällige Anleihe ohne zwischenzeitliche Zinszahlungen mit der Laufzeit  $N = (1 + r)/r$ . Unabhängig vom Marktzins hat diese durchschnittliche Selbstliquidationsperiode jede Ewige Rente.

<sup>32</sup> Setzt man voraus, daß der Nominalzins mit dem Marktzins übereinstimmt, dann gilt  $\varepsilon = rN/(1 + r)$  für einen endfälligen Titel ohne zwischenzeitliche Zinszahlungen,  $\varepsilon = 1 - 1/(1 + r)^N$  für einen endfälligen Titel mit zwischenzeitlichen Zinszahlungen (Anleihe mit jährlichem Kupon) und

$$\varepsilon = \frac{r^N}{((1 + r)^N - 1)(1 + r)}$$

für ein Darlehen, das mit gleichbleibenden Annuitäten verzinst und getilgt wird.

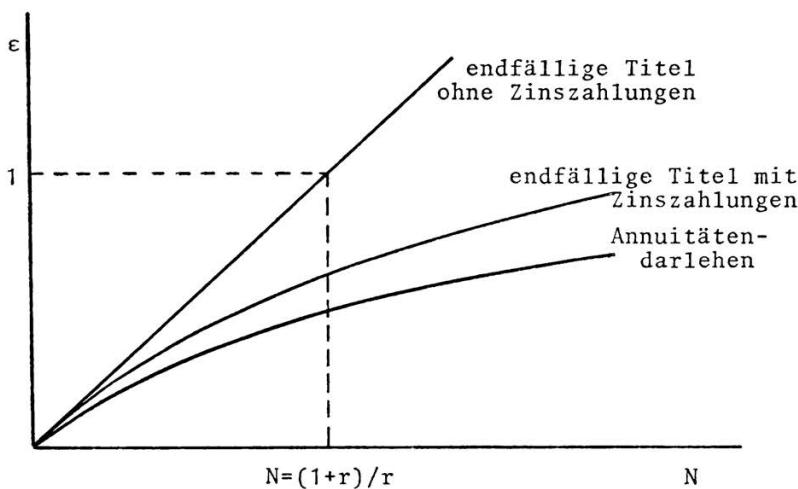


Abb. 2: Abhängigkeit der Zinselastizität von der Laufzeit typischer Finanzierungsinstrumente

### 3. Zinsänderungsrisiken und die Eigenkapitalposition von Geschäftsbanken

Der dritte Originalbeitrag zum Anwendungsbereich des Instruments der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode stammt von *Samuelson* und wurde 1945 im „American Economic Review“ unter dem Titel „The Effects of Interest Rate Increases on the Banking System“ veröffentlicht<sup>33</sup>. *Samuelson* stellt erstmals der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode der Vermögensanlagen die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode der Kapitaleinlagen gegenüber und erhält auf diese Weise ein Maß für das mit dem Kapitalwert bzw. dem Reinvermögen eines Unternehmens verbundene Zinsänderungsrisiko. Ist

$$(15) \quad C_0 = B_0 - A_0$$

der Kapitalwert eines Portefeuilles von Forderungen und Verbindlichkeiten bzw. das Reinvermögen (Eigenkapital) eines Unternehmens als Differenz der Barwerte der zukünftigen Einzahlungen und Auszahlungen, dann ist

<sup>33</sup> *Samuelson*, P. A., The Effects of Interest Rate Increases on the Banking System, in: American Economic Review, 1945, S. 16 ff. *Samuelsons* Maßzahl stimmt mit der in (2) definierten durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode nicht überein. Die Ableitung des Kapitalwertes nach dem Marktzins auf S. 19, Fußnote 1, enthält einen Rechenfehler. Die Argumentation von *Samuelson* bleibt davon unberührt.

$$(16) \quad \frac{dC_0}{dr} = \frac{dB_0}{dr} - \frac{dA_0}{dr} = - \frac{1}{1+r} \{ B_0 \phi SLP_B - A_0 \phi SLP_A \}$$

die Veränderung dieses Kapitalwertes bei einer Änderung des Marktzinssatzes, wenn  $\phi SLP_B$  die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode der Aktiva (Einzahlungen) und  $\phi SLP_A$  die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode der Passiva (Auszahlungen) bezeichnet. Die Veränderung des Kapitalwertes ist Null und somit der Kapitalwert ohne Zinsänderungsrisiko, wenn die mit dem Barwert der Aktiva gewichtete durchschnittliche Selbstliquidationsperiode der Aktiva der mit dem Barwert der Passiva gewichteten durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode der Passiva entspricht.

Ist der Kapitalwert Null, weil der Nominalzins aller Aktiva und Passiva mit dem Marktzins übereinstimmt, dann ist die Veränderung des Kapitalwertes positiv, wenn  $\phi SLP_A > \phi SLP_B$  gilt<sup>34</sup>, was grob formuliert besagt, daß längerfristige Kapitaleinlagen in kürzerfristige Kapitalanlagen gebunden werden<sup>35</sup>.

Geht man von einem positiven Kapitalwert aus und unterstellt den für Banken typischen Fall, daß die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode der Aktiva größer ist als die der Passiva, dann ergibt sich aus (16) unmittelbar, daß  $C_0$  mit wachsendem  $r$  sinkt.

Eine erste Abschätzung des Kapitalwertes nach erfolgter Marktzinsänderung führt auf<sup>36</sup>

$$(17) \quad C_0(r + \Delta r) \simeq C_0 - \frac{1}{1+r} \{ B_0 \phi SLP_B - A_0 \phi SLP_A \} \Delta r .$$

<sup>34</sup> Vgl. Samuelson, P. A., a.a.O., S. 19; Durand, D., Payout Period, Time Spread and Duration: Aids to Judgment in Capital Budgeting, in: Journal of Bank Research, 1974, S. 20 ff. bezeichnet die Differenz  $\phi SLP_B - \phi SLP_A$  als ‚Duration‘ (S. 25). Diese Differenz gibt aber nur im Falle  $A_0 = B_0$  die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode des Kapitalwertes (der gerade Null ist) an.

<sup>35</sup> Für  $A_0 = B_0$  und  $\phi SLP_A = \phi SLP_B$  steigt  $C_0$  sowohl bei einer Marktzinserhöhung als auch bei einer Marktzinssenkung, wenn die Varianz der Selbstliquidationsperiode der Einzahlungen größer ist als die der Auszahlungen.

<sup>36</sup> Eine genauere Approximation erreicht man mit folgendem Ansatz:

$$\begin{aligned} C_0(r + \Delta r) \simeq C_0 & - \frac{1}{1+r} \{ B_0 \phi SLP_B - A_0 \phi SLP_A \} \Delta r \\ & + \frac{1}{2(1+r)^2} \{ B_0 (\phi SLP_B + \phi SLP_B^2 + V_B) \\ & - A_0 (\phi SLP_A + \phi SLP_A^2 + V_A) \} (\Delta r)^2 \end{aligned}$$

$V_A$  und  $V_B$  bezeichnen die Varianzen der Selbstliquidationsperioden der Aktiva und Passiva.  $V$  ist definiert in Fußnote 15.

Der Ansatz (17) läßt sich sowohl zur Entwicklung von Planungsrechnungen<sup>37</sup> als auch für den Aufbau von Prüfungsrechnungen für die Solvenz der Kreditinstitute heranziehen. Bei Prüfungsrechnungen ist dabei erstens ein kritisches Niveau für die kurzfristig zu erwartende Marktzinsänderung anzugeben, das festlegt, bei welcher Marktzinsänderung die Solvenz der Bank gerade noch gewährleistet sein muß. Zweitens ist ein kritisches Niveau für  $C_0(r + \Delta r)$ , also für das Reinvermögen nach erfolgter Marktzinsänderung, anzugeben, das festlegt, welches Reinvermögen erhalten bleiben muß, damit die Bank noch als solvent gelten kann. Drittens ist vorzugeben, für welchen Zeitraum die Entwicklung des Reinvermögens — bei Betrachtung des Altgeschäfts — geprüft werden soll.

#### 4. Zum Aufbau einer Kontrollrechnung für Zinsänderungsrisiken

Der praktische Aufbau einer Prüfungsrechnung erfordert es, daß die Überlegungen, die wir an die Darstellung und Diskussion der Ansätze von *Macaulay*, *Hicks* und *Samuelson* angeschlossen haben, zusammengebracht werden. Der Marktzins  $r$  ist durch die für die Bank geltende Terminstruktur der Zinssätze zu ersetzen. Die durchschnittlichen Selbstliquidationsperioden von Großengagements sind einzeln zu berechnen. Für typische Kreditprogramme, Einlagen und ausgegebene Schuldverschreibungen lassen sich zusammenfassende Formeln entwickeln. Darüber hinaus müssen Überlegungen angestellt werden, bei welchen Aktiv- oder Passivpositionen die durchschnittlichen Selbstliquidationsperioden tatsächlich als Instrumentvariablen der Bank aufgefaßt werden können, so daß sich jene vorhandenen oder neu aufzubauenden Bilanzpositionen heraustranskribieren lassen, die einen wesentlichen Einfluß auf die insgesamt übernommenen Zinsänderungsrisiken aufweisen und bei denen außerdem eine gewisse Manipulierbarkeit der durchschnittlichen Selbstliquidationsperioden über Fristenveränderungen, die Vereinbarung von Konversions- oder Zinsgleitklauseln, den Aufbau von Gegenpositionen oder die Anpassung des Normalzinses am Markt durchsetzbar erscheint.

---

<sup>37</sup> Vgl. *Grove*, M. A., A Model of the Maturity Profile of the Balance Sheet, in: *Metroeconomica*, 1966, S. 40 ff. und *Grove*, M. A., On „duration“ and the optimal maturity structure of balance sheet, in: *Bell Journal of Economics and Management Science*, 1974, S. 696 ff.

## Zusammenfassung

### Zinsänderungsrisiken und die Strategie der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode

Der Beitrag beschäftigt sich mit der insbesondere für die Ausrichtung der Geschäftspolitik von Kreditinstituten bedeutsamen Frage, wie sich die Risiken, die aus einer Änderung des Marktzinses resultieren, erfassen, planen und kontrollieren lassen. Nach einem einführenden Teil über die Einordnung und Bedeutung von Zinsänderungsrisiken wird im zweiten Teil die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode als Maß für den zeitlichen Schwerpunkt einer Einzahlungsreihe definiert und gezeigt, daß der Endwert einer Investition gegenüber Zinssatzänderungen abgesichert ist, wenn die durchschnittliche Selbstliquidationsperiode der Vermögensanlagen mit dem Planungshorizont des Investors übereinstimmt. Eine Beispielrechnung aus dem Bereich der Kapitalanlageplanung dient der Veranschaulichung der vorgetragenen Strategie und einer Erweiterung des Grundmodells auf Portefeuillepositionen. Im dritten Teil werden die zum Problem der Beschreibung und Planung von Zinsänderungsrisiken vorliegenden Ansätze von *Macaulay*, *Hicks* und *Samuelson* diskutiert. Die Auseinandersetzung mit den Fragestellungen und Prämissen dieser Ansätze zeigt zugleich einige typische Anwendungsbereiche des Instruments der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode für die Formulierung und Kontrolle der Geschäftspolitik von Kreditinstituten.

## Summary

### The Risks of Interest-Rate Changes and the Strategy of the Self-Liquidation Period

The article deals with a problem that is of significance especially for the orientation of the business policy of banks, that is, the question of how risks resulting from a change in the market interest rate can be ascertained, planned and controlled. Following an introductory section on the classification and importance of risks of interest-rate changes, the second section defines the average self-liquidation period as the measure of the temporal focus of a series of inpayments and shows that the ultimate value of an investment is secured against interest-rate changes, if the average self-liquidation period of investments coincides with the investor's planning horizon. A specimen calculation from the field of capital investment planning is used to illustrate the described strategy and an expansion of the basic model to portfolio dispositions. The third section discusses the approaches of *Macaulay*, *Hicks* and *Samuelson* to the problem of describing and planning risks resulting from interest-rate changes. The ventilation of the questions and premises of these approaches simultaneously depicts some typical fields of application for the instrument of the average self-liquidation period for formulating and controlling the business policy of banks.

### Résumé

#### **Les risques des modifications des taux d'intérêt et la stratégie de la période moyenne d'autoliquidation**

Ce papier s'intéresse à une question essentielle pour l'orientation de la politique d'affaires des établissements de crédit, à savoir les moyens de recenser, planifier et contrôler les risques procédant d'un changement du taux d'intérêt du marché. Après une première partie relative au classement et à l'importance des risques des modifications des taux d'intérêt, l'étude définit la période moyenne d'autoliquidation comme mesure du centre de gravité dans le temps d'une série de versements et démontre que la valeur finale d'un investissement est garanti contre les changements de taux lorsque la période moyenne d'autoliquidation du placement des fonds coïncide avec l'horizon de la planification de l'investisseur. Un exemple de calcul du domaine de la planification du placement de capital sert à illustrer la stratégie exposée et à étendre de modèle de base à des portefeuilles-titres. Une troisième partie examine les équations de *Macaulay*, *Hicks* et *Samuelson* relatives au problème de la description et de la planification des risques des modifications de taux d'intérêt. L'examen de ces équations avec les questions et les prémisses qu'elles posent montre parallèlement quelques secteurs spécifiques d'application de l'instrument de la période moyenne d'autoliquidation pour la formulation et le contrôle de la politique d'affaires des établissements de crédit.