

## Konsequenzen des Zins- und Einkommensrisikos auf das wirtschaftliche Wachstum\*

Von Christiane Clemens und Susanne Soretz\*\*

### 1. Vorbemerkungen

Die traditionelle Sichtweise auf die Phänomene Konjunktur und Wachstum ist, daß die Wirtschaft einer langfristigen stetigen Entwicklung – dem sogenannten Trend – folgt, der von Störungen überlagert wird. Die konjunkturellen Schwankungen werden als Abweichungen vom Trend interpretiert. Im Hinblick auf die Dauer ihrer Wirkung werden transitorische und permanente Störungen unterschieden, wobei allerdings die Aufmerksamkeit zumeist der ersten Kategorie gilt. Diese Auffassung bedeutet jedoch implizit auch, daß es keine Wechselwirkungen zwischen Trend und zyklischen Schwankungen gibt, folgerichtig also beide Phänomene isoliert voneinander betrachtet werden können.

In der von Kydland und Prescott (1982) sowie Long und Plosser (1983) begründeten neuklassischen Konjunkturtheorie findet die oben beschriebene Sichtweise ihren Niederschlag darin, daß, wie Jones et al. (1999, S. 1) anmerken: „*The current standard in the real business cycle literature, is to view long run growth as exogenous and, hence, independent of the fundamental shocks.*“ Die makroökonomischen Modelle werden trendbereinigt, um die Schwankungen in den Mittelpunkt der Analyse zu stellen. Im Gegensatz dazu sind die Wachstumsmodelle jüngeren Datums, der sogenannten endogenen Wachstumstheorie nach Romer (1986) oder Lucas (1988), überwiegend deterministisch abgefaßt, was gerade dem Konzept eines störungsfreien glatten Trends entspricht.

Die auf diese Weise vollzogene analytische Trennung von Konjunktur und Wachstumstheorie beruht auf einer einseitigen Schwerpunktsetzung in bezug auf transitorische Phänomene und wird besonders von Prescott (1986) in Frage gestellt. Er vertritt den Standpunkt, daß es auch von empirischer

---

\* Verantwortlicher Herausgeber / editor in charge: B. F.

\*\* Wir bedanken uns bei zwei anonymen Gutachtern für ihre konstruktive Kritik. Alle verbleibenden Unzulänglichkeiten gehen natürlich zu unseren Lasten.

Seite keine stichhaltigen Hinweise dafür gibt, daß Produktivitätsschocks in einem schwankungsfreien Wachstum der Produktionsmenge resultieren. Für die Bundesrepublik Deutschland wird diese Auffassung durch empirische Arbeiten von Neusser (1991) und Reimers (1991) gestützt. Die Vereinigung der Analyse volkswirtschaftlichen Wachstums und nicht prognostizierbarer Schwankungen der Produktivität in einem einzigen Theorierahmen erlaubt, die Auswirkungen von Fluktuationen auf den langfristigen Trend zu berücksichtigen und kann die Dichotomie zwischen den beiden Bereichen aufheben.

Die Konjunkturerklärung der RBC-Theorie stützt sich auf exogene Schocks als Auslöser der Schwankungen, wobei sich die Mehrzahl der Arbeiten auf technologische Unsicherheit als Quelle des konjunkturellen Phänomens konzentrieren. Der Produktivitätsschock wird empirisch über das Solow-Residuum motiviert. Die Zeitreihe dieses Residuums wird als beobachtete Realisationen des stochastischen Technologieprozesses aufgefaßt. Die Transmission der Störungen über die Zeit erfolgt dabei durch Änderungen im mikroökonomischen Entscheidungskalkül der Wirtschaftssubjekte. Grundsätzlich stellen jedoch bei der hier zugrundeliegenden Konjunkturerklärung alle Reaktionen der makroökonomischen Variablen transitorische Anpassungen an einen langfristigen, (trend-)stationären Zustand dar. Ein permanenter Effekt der Zufallsstörungen auf das Niveau des technischen Fortschritts wäre erst unter der Annahme eines stochastischen Trends – den oben erwähnten Fundamentalschocks – gegeben. Die durch Romer (1986) begründete moderne Wachstumstheorie setzt hingegen an einem anderen Aspekt des Solow-Residuums an, der Exogenität des technischen Fortschritts.

Erst in jüngerer Zeit hat die Verknüpfung von konjunktur- und wachstumstheoretischen Fragestellungen beispielsweise durch die Arbeiten von Cazzavillan (1996), Collard (1999), Jones et al. (1999) oder Smith (1996a) größere Aufmerksamkeit erhalten. Gestützt werden diese Arbeiten durch eine der auffälligsten Regelmäßigkeiten der empirischen Makroökonomik, derzufolge die gesamtwirtschaftlichen Konsumausgaben im Zeitablauf weniger stark schwanken als das gesamtwirtschaftliche Einkommen. Der Vermögensbildung kommt dabei, wie Carroll und Samwick (1997) in ihrer Untersuchung verdeutlichen, die Aufgabe zu, einen ungleichmäßigen Einkommensstrom in einen regelmäßigeren Konsumstrom zu transferieren. Hubbard et al. (1993) ebenso wie Skinner (1988) und Zeldes (1989) ziehen aus ihren empirischen Analysen den Schluß, daß sowohl das Vererbungsmotiv als auch das Motiv zur Bildung von Vorsichtsersparnis als Einflußfaktoren berücksichtigt werden müssen. Gerade für letzteres gibt es nach Caballero (1990) starke empirische Indizien.

Die theoretische Behandlung des Phänomens Vorsichtersparnis geht auf Leland (1968) und Sandmo (1970) zurück. Der risikoaverse Haushalt versucht, sich gegen die Volatilität zukünftiger Einkommensströme auf dem Kapitalmarkt über die Zeit selbst zu versichern. Von besonderer Bedeutung für das Auftreten von Vorsichtersparnis ist dabei Sandmo (1970) zufolge die Quelle der Unsicherheit und der Grad der individuellen Risikoaversion. Er unterscheidet zwischen dem Zinsrisiko (Kapitalrisiko) auf der einen Seite und dem Einkommensrisiko auf der anderen, wobei letzteres beispielsweise aus unsicheren Löhnen resultiert.

Dem Zusammenhang zwischen diesen Erkenntnissen und dem Problem der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung ist der vorliegende Beitrag gewidmet: Die Integration von Unsicherheit in den Modellrahmen endogenen Wachstums – beispielsweise über die Annahme exogener Produktivitäts schocks – kann dann zunächst die gewünschte Verknüpfung zwischen Konjunktur und Wachstumstheorie herbeiführen und darüberhinaus am Beispiel des Phänomens der Vorsichtersparnis demonstrieren, daß beide Fragestellungen nicht unabhängig voneinander diskutiert werden können.

Mit den Arbeiten von Devereux und Smith (1994) sowie Obstfeld (1994b) richtet sich das Interesse im Rahmen der stochastischen Wachstumstheorie bislang vorrangig auf den Zusammenhang zwischen Wachstum und internationaler Risikostreuung. Einen weiteren Forschungsschwerpunkt bildet die Analyse der Wirkungen fiskalpolitischer Maßnahmen, beispielsweise in den Beiträgen von Turnovsky (1993, 1999), Smith (1996b), Clemens und Soretz (1997), Corsetti (1997), Clemens (1999) und Soretz (2000).

Weniger Aufmerksamkeit galt hingegen der Frage, welchen Einfluß die Art des zugrundeliegenden Risikos auf das langfristige Wachstum einer Volkswirtschaft hat. Dieser Aspekt rekurriert also unmittelbar auf die von Sandmo (1970) hervorgehobene Unterscheidung zwischen Kapital- und Einkommensunsicherheit. Um zu verdeutlichen, welche Rolle der Riskanz verschiedener Einkommensquellen bei der Bestimmung des gleichgewichtigen Wachstumspfades einer Volkswirtschaft mit nicht-antizipierbaren Schwankungen der Produktivität zukommt, werden zwei endogene Wachstumsmodelle gegenübergestellt: Zum einen wird das AK-Modell nach Jones und Manuelli (1990) betrachtet, in dem der Kapitalstock als ‚broad measure of capital‘ aufgefaßt wird, das sowohl physisches als auch Humankapital in sich vereint. In diesem Modell unterliegt der Haushalt ausschließlich einem Zinsrisiko. Die endogene Wachstumstheorie vorwegnehmend wurde das lineare stochastiche Modell bereits von Eaton (1981) diskutiert. Zum anderen wird eine stochastiche Variante des Ansatzes von Romer (1986) betrachtet, in der neben physischem Kapital sowie technischem Wissen auch der Faktor Arbeit in der Produktion eingesetzt wird. Neben dem Zinsrisiko

ist das risikoaverse Wirtschaftssubjekt in diesem Modellrahmen auch einem Einkommensrisiko ausgesetzt.

Der Beitrag behandelt zwei Fragestellungen: (1) In welcher Form beeinflusst das Auftreten von Technologieschocks das langfristige Wachstum der Ökonomie? (2) Welchen Einfluß übt die konkrete Gestalt der Produktionstechnologie, das heißt insbesondere die Volatilität der Faktoreinkommen aus? Um der ersten Frage gerecht zu werden, wird im folgenden Abschnitt 2 mit der allgemeinen Darstellung der Konsum-Vermögensallokation eines risikoaversen Wirtschaftssubjektes begonnen. Erst in Abschnitt 3 werden die abgeleiteten Ergebnisse konkret um die Besonderheiten der oben genannten Produktionstechnologien erweitert. Abschnitt 4 vergleicht die Resultate der beiden Modelle, wobei – der oben diskutierten Fragestellung (2) entsprechend – der Schwerpunkt auf den Konsequenzen der Annahme bzw. des Ausschlusses bestimmter Einkommensquellen liegen wird. In Abschnitt 5 werden die Ergebnisse kurz zusammengefaßt. Technische Details finden sich im Anhang.

## 2. Das Ausgangsmodell

In diesem Kapitel soll zunächst auf allgemeine Weise das intertemporale Entscheidungsproblem risikoaverser Wirtschaftssubjekte vorgestellt werden, deren Vermögensakkumulation stochastischen Einflüssen unterliegt. Die Ökonomie besteht aus einem Kontinuum  $[0, 1]$  unendlich lang lebender Individuen. Diese sind homogen, das heißt im Hinblick auf ihre Präferenzen und Ausstattungen identisch. Jeder Agent maximiert seinen intertemporalen Nutzen  $V(t)$  gemäß der folgenden Non-Expected-Utility-Rekursion<sup>1</sup>

$$(1) \quad G[(1 - \rho)V(t)] = \frac{1 - \rho}{1 - 1/\varepsilon} C(t)^{1-1/\varepsilon} h + e^{-\beta h} G[(1 - \rho)E_t V(t + h)].$$

Einziges Argument des Lebenszeitnutzens  $V(t)$  ist der Konsumstrom  $C(t)$ , von dem angenommen wird, daß er keinen unmittelbaren stochastischen Einflüssen unterliegt.  $E_t$  bezeichnet den bedingten mathematischen Erwartungswert, gegeben die Informationen des Zeitpunktes  $t$ . Der Koeffizient  $\beta > 0$  steht für die Zeitpräferenzrate. Die Periodennutzenfunktion ist streng konkav und dreifach stetig differenzierbar, mit streng positivem aber abnehmendem Grenznutzen. Sie weist eine konstante intertemporale Substitutionselastizität (CIES) auf, die mit  $\varepsilon > 0, \varepsilon \neq 1$  bezeichnet wird. Der

---

<sup>1</sup> Die Spezifikation der Nutzenfunktion erfolgt in Anlehnung an Obstfeld (1994a). die Entwicklung dieses Zweiges der Non-Expected-Utility-Theorie geht auf Epstein und Zin (1989) zurück.

konstante Parameter  $\rho > 0, \rho \neq 1$  ist das Maß der relativen Risikoaversion. Die Funktion  $G(\bullet)$  hat folgende Gestalt

$$(2) \quad G[(1 - \rho)V(t)] = \frac{1 - \rho}{1 - 1/\varepsilon} [(1 - \rho)V(t)]^{\frac{1-1/\varepsilon}{1-\rho}}.$$

Für  $\rho = 1/\varepsilon$  reduziert sich (1) auf den zustands und zeitseparablen Erwartungsnutzen vom von Neumann / Morgenstern-Typ. Der Vorteil der hier zugrundeliegenden Non-Expected-Utility-Präferenzspezifikation liegt darin, daß sie erlaubt, die Risikoneigung und die intertemporale Substitutionsbereitschaft parametrisch voneinander zu trennen. Dieses kann von der Erwartungsnutzentheorie nicht geleistet werden, weil in ihr die Periodennutzen verschiedener Zustände mit den subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten auf die gleiche (multiplikative) Weise gewichtet werden, wie der Diskontfaktor zu einer Gewichtung der Periodennutzen in verschiedenen Zeitpunkten beträgt.

Die Individuen verfügen über zwei Möglichkeiten Ersparnis zu bilden: Sie können in physisches Kapital  $K(t)$  investieren oder ihr Vermögen in Bonds anlegen. Es wird davon ausgegangen, daß in jedem Zeitinkrement die Ökonomie einem in der Zeit identisch und unabhängig verteilten Hicks-neutralen Technologieschock unterliegt. Mit der Produktion  $Y(t) = F[K(t), L(t)]$  folgen damit auch die Kapitalerträge einem stochastischen Prozeß.

Über den Technologieschock werden folgende Annahmen getroffen: Die Zufallseinflüsse werden durch einen Wiener-Prozeß  $z(t)$  abgebildet. Es handelt sich hierbei um einen zeitkontinuierlichen Markov-Prozeß. Für das Inkrement  $dz(t)$  dieses Prozesses wird angenommen, daß  $dz(t) = \eta_t \sqrt{dt}$ . Bei der Innovation  $\eta_t$  handelt es sich um eine standardnormalverteilte, seriell unkorrelierte Zufallsvariable. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist statio-när. Für den stochastischen Prozeß gilt somit  $dz(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 dt)$ . Es handelt sich hierbei um ein aggregiertes oder auch soziales Risiko. Alle Individuen der Ökonomie sind von den Schocks in gleicher Weise betroffen, das heißt, es gibt auf nationaler Ebene keine Möglichkeit, das Produktionsrisiko zu versichern.<sup>2</sup>

Unter der ergänzenden Annahme, daß die aggregierte Produktionstechnologie linear im Kapital ist, unterliegt der Kapitalstock der Ökonomie einem stochastischen Prozeß, dessen Differential wie folgt definiert ist<sup>3</sup>

---

<sup>2</sup> Wird von identisch und unabhängig verteilten, vollständig beobachtbaren idiosynkratischen Risiken ausgegangen, kann gezeigt werden, daß diese nur das Niveau der gleichgewichtigen Wachstumsrate der Ökonomie beeinflussen (vgl. Clemens, 1999). Die Ergebnisse weisen somit im Vergleich zur hier diskutierten Modellannahme aggregierter Schocks keine qualitativen Unterschiede auf.

<sup>3</sup> Die beiden in Abschnitt 3 unterstellten Technologien genügen dieser Bedingung.

$$(3) \quad dK(t) = \psi(t)K(t)dt + \sigma_K(t)K(t)dz(t).$$

$\psi(t)$  repräsentiert den momentanen Drift- und  $\sigma_K(t)$  den momentanen Difusionskoeffizienten. Sind beide zeit- und zustandsunabhängige Funktionen der Modellparameter, wird die Kapitalakkumulation durch eine homogene stochastische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben, welche die Übergangswahrscheinlichkeiten für  $K(t)$  vollständig bestimmen. Der zugrundeliegende Prozeß ist eine einfache Brownsche Bewegung mit Drift. An späterer Stelle wird gezeigt, daß der Driftkoeffizient  $\psi$  gerade der erwarteten gleichgewichtigen Wachstumsrate der Ökonomie entspricht. Die Kapitalakkumulation folgt einem stochastischen Trend, das heißt, die Technologieschocks lösen nicht ausschließlich temporäre sondern über die Zeit anhaltende (permanente) Effekte aus. Auf die explizite Integration von Abschreibungen in das Modell wird zur Vereinfachung verzichtet. Der Kapitalstock des Zeitinkrements  $t$  entspricht den bis dahin getätigten Investitionen.

Die Alternative zur Realkapitalhaltung besteht in dem Erwerb von risikolosen ewigen Anleihen  $B(t)$ . Diese werden mit der momentanen, sicheren und konstanten Ertragsrate  $i$  verzinst. Bei Thesaurierung der Erträge folgt  $B(t)$  dann der Differentialgleichung

$$(4) \quad dB(t) = iB(t)dt.$$

Der Produktionsfaktor Arbeit  $L(t)$  wird unelastisch angeboten, ist konstant über die Zeit und wird vereinfachend auf eins normiert. Unter der Annahme eines Hicks-neutralen Produktivitätsschocks werden die beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital gleichermaßen von den technologischen Störungen betroffen. Insofern stellt auch das Lohneinkommen für den Haushalt eine unsichere Größe dar. Das Gesamtvermögen  $W(t)$  eines Haushalts ergibt sich als Summe des Realkapitalbestandes und des Finanzvermögens

$$(5) \quad W(t) = K(t) + B(t),$$

so daß die Vermögensakkumulation durch die folgende intertemporale Budgetrestriktion des Agenten beschrieben werden kann:

$$(6) \quad dW(t) = [iW(t) + (r(t) - i)K(t) + \omega(t) - C(t)]dt + dw(t).$$

Dabei bezeichnet  $r(t)$  die erwartete reale Ertragsrate des physischen Kapitals,  $\omega(t)$  den erwarteten Lohnsatz und  $dw(t) = [r(t)K(t) + \omega(t)]dz(t)$

den stochastischen Vermögensprozeß.<sup>4</sup> Die Vermögensvarianz ergibt sich dann als  $\sigma_W^2 = E(dw)^2/dt$ .

Das Optimierungsproblem des einzelnen Agenten besteht nun darin, seinen Konsumstrom über die Zeit und die optimale Aufteilung des Vermögens auf die beiden Aktiva so zu bestimmen, daß er seinen Lebenszeitnutzen  $V(t)$  unter der intertemporalen Budgetrestriktion (6) bei gegebenem Anfangswert  $K(0)$  maximiert. Im folgenden repräsentiert die Wertefunktion  $J[W(t), t] = \max V(t)$  den maximierten Lebenszeitnutzen, das heißt die Wohlfahrt des Haushalts. Das Hinzuziehen der Wertefunktion zur Bestimmung der notwendigen Bedingungen des obigen Optimierungsproblems ist die gängige Vorgehensweise bei der Lösung dieses Modelltyps. Sie liegt darin begründet, daß die Vermögensakkumulation einem stochastischen Prozeß folgt, der zwar stetig aber nicht nach der Zeit differenzierbar ist. Das stochastische Differential der Wertefunktion wird unter Anwendung von Itôs Lemma ermittelt und führt zu der folgenden Zielfunktion

$$(7) \quad \max_{C,K,W} \mathcal{L} = \frac{1-\rho}{1-1/\varepsilon} C^{1-1/\varepsilon} - \beta G(\bullet) + (1-\rho) G'(\bullet) \left[ J'(W)(iW + (r-i)K + \omega - C) + \frac{1}{2} \sigma_W^2 J''(W) \right].$$

Ableiten von (7) nach  $C$ ,  $K$  und  $W$  ergibt die notwendigen Bedingungen für ein Maximum, aus denen sich die optimalen Werte für Konsum und Kapitalhaltung wie folgt ermitteln lassen, wenn zusätzlich die oben getroffene Annahme einer Nutzenfunktion mit konstanter intertemporaler Substitutionselastizität berücksichtigt wird<sup>5</sup>

$$(8) \quad C^* = [(1-\rho)J(W)]^{\frac{1-\varepsilon\rho}{1-\rho}} \cdot [J'(W)]^{-\varepsilon},$$

$$(9) \quad K^* = -\frac{J'(W)}{J''(W)} \cdot \frac{r-i}{r^2 \sigma^2} - \frac{\omega}{r}.$$

Die optimalen Werte für Konsum und physisches Kapital sind Funktionen der ersten beiden Ableitungen  $J'(W)$  und  $J''(W)$  der Wertefunktion. Einsetzen dieser Werte in die Ableitung der Zielfunktion (7) nach dem Vermögen führt zu einer stochastischen Differentialgleichung in  $J(W)$ , für die es unter den hier getroffenen Annahmen in der Regel möglich ist, eine geschlossene

<sup>4</sup> Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden auf die explizite Schreibweise  $f(\cdot, t)$  verzichtet.

<sup>5</sup> Vgl. hierzu die Bedingungen 1. Ordnung (29) und (30) im Anhang. Der optimale Wert des Finanzvermögens ergibt sich dann residual als  $B = W - K$ .

Lösung explizit zu ermitteln.<sup>6</sup> Die Vorgehensweise ist dabei üblicherweise, für die Funktion  $J(W)$  eine Lösungsvermutung aufzustellen.

Die Lösungshypothese für dieses Modell ist, daß auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad der Ökonomie sowohl die Konsumquote aus Vermögen  $\mu$  als auch die Portfolioanteile des realen Vermögens  $n$  und des Finanzvermögens  $1 - n$  konstant über die Zeit sind, was bedeutet

$$(10) \quad C^* = \mu W^*, \quad K^* = n W^*, \quad B^* = (1 - n) W^* \quad \text{mit } \mu, n = \text{konstant}.$$

Erweist sich die Lösungsvermutung als richtig, wird der Steady-State durch nichtstochastische Funktionen der Modellparameter beschrieben. Die hier postulierte Lösung ermöglicht, aus den Bedingungen 1. Ordnung die Ableitungen der Wertefunktion zu ermitteln (s. (33) im Anhang). Eingesetzt in (9) und (31) ergeben sich dann die optimale erwartete Konsumquote aus Vermögen und die optimale Portfoliowahl wie folgt:

$$(11) \quad \mu = \beta \varepsilon + (1 - \varepsilon) \left[ i + \frac{1}{2} \frac{(r - i)^2}{\rho r^2 \sigma^2} \right] + \frac{i \omega}{r W},$$

$$(12) \quad n = \frac{r - i}{\rho r^2 \sigma^2} - \frac{\omega}{r W}.$$

Die Lösungsvermutung wird bestätigt, wenn nach dem Einsetzen der Faktorpreise beide Größen aus (11) und (12) unabhängig von der Höhe des Vermögens sind. Dieses ist bislang noch nicht gegeben, wie unmittelbar aus den Gleichungen zu ersehen ist. Jedoch implizieren die unterstellten Präferenzen in Verbindung mit im folgenden zu treffenden Annahmen über die Technologie, daß bei einem zum Vermögen proportionalen Lohnsatz und einem vermögensunabhängigen Realzins die optimale Portfolioaufteilung invariant gegenüber der Höhe des Vermögens ist.

Die Höhe der Konsumquote wird zum einen von den noch zu bestimmenden Marktpreisen determiniert, das heißt von den Ertragsraten der Anleihe und des physischen Kapitals sowie dem Lohnsatz. Zum anderen gehen die Parameter der Nutzenfunktion in die optimale Konsumwahl ein. Die Betrachtung des erwarteten Portfolioanteils  $n$  zeigt ein vergleichbares Ergebnis.

Die Konsumneigung aus Vermögen kann in zwei Komponenten zerlegt werden. Der Teil, der unabhängig von der Technologievarianz ist, soll im folgenden als Driftterm bezeichnet werden. Die zweite Komponente – der sogenannte Diffusionsterm – spiegelt mit der Varianz des Technologie-

---

<sup>6</sup> Die entsprechende Ableitung findet sich als Gleichung (31) im Anhang.

schocks gerade die Reaktion der Haushalte auf die Einkommensunsicherheit wider. Er wird in seinem Vorzeichen und damit in seiner Wirkungsrichtung entscheidend durch die Höhe der intertemporalen Substitutionselastizität beeinflußt.

Bei der Bestimmung der Höhe des erwarteten Portfolioanteils kommt dem Ertragsdifferential  $r - i$ , zwischen den beiden Anlagealternativen eine entscheidende Rolle zu. Je höher dieses ausfällt, desto größer ist auch der Portfolioanteil des physischen Kapitals. Es geht bereits aus Gleichung (12) hervor, daß die Verzinsung des physischen Kapitals über der Anleihenverzinsung liegen muß, damit überhaupt riskantes Realkapital von den Agenten gehalten wird.

Die optimalen Werte für die Konsumquote und den Portfolioanteil können nun benutzt werden, um die Wachstumsrate des Vermögens zu bestimmen. Zu diesem Zweck werden (11) und (12) in die Budgetrestriktion (6) eingesetzt. Wegen der Annahmen über den stochastischen Vermögensprozeß gilt  $E[dw] = 0$ , so daß für die erwartete Wachstumsrate  $\psi = E(dW)/(W dt)$  folgt:

$$(13) \quad \psi = \varepsilon(i - \beta) + \frac{1}{2}(\varepsilon + 1) \frac{(r - i)^2}{\rho r^2 \sigma^2} .$$

Auch die erwartete Wachstumsrate setzt sich aus einer Drift- und einer Diffusionskomponente zusammen. Sie wird ausschließlich durch die exogen gegebenen Modellparameter und die Marktpreise determiniert.

### 3. Technologie und Marktgleichgewicht

Für eine Fortführung der Analyse ist es erforderlich, die noch ausstehenden Größen, das heißt die Marktpreise  $r, i$  und  $\omega$ , zu ermitteln. Dabei müssen zunächst für die Bestimmung des makroökonomischen Gleichgewichts konkrete Annahmen über die Produktionstechnologie getroffen werden, da diese in der neoklassisch geprägten, modernen dynamischen Makrotheorie über die Höhe der Faktorentlohnung entscheidet. Wie bereits einleitend erwähnt, sollen vergleichend zwei verschiedene Spezifikationen der Technologie in den bereits vorhandenen Modellrahmen integriert werden.

Es handelt sich hierbei zum einen um die lineare Technologie vom sogenannten AK-Typ und zum anderen um die von Romer (1986) verwendete Produktionsfunktion mit externen Effekten in der Humankapitalakkumulation. Beiden Produktionstechnologien ist gemein, daß über einen nicht-abnehmenden Grenzertrag des Kapitals die Voraussetzungen für dauerhaftes Wachstum der Pro-Kopf-Einkommen gegeben sind.

Der Einsatz der linearen Technologie in einem Modell endogenen Wachstums geht auf Jones und Manuelli (1990) zurück, wurde aber im stochastischen Kontext bereits von Eaton (1981) diskutiert. Ihrer Verwendung liegt ein weit definierter Kapitalbegriff zugrunde, wonach der aggregierte Kapitalstock der Ökonomie ein Kompositum aus diversen produktiven Kapitalgütern ist, zu denen neben dem physischen Kapital auch das Humankapital und die öffentliche Infrastruktur gezählt werden. Im Rahmen eines AK-Modells stellt das Zinseinkommen die einzige Einkommensquelle des Haushalts dar. Demzufolge ist dieser im Zuge des Auftretens von Produktivitätsschocks in der Terminologie von Sandmo (1970) einem reinen Kapitalrisiko oder auch Zinsrisiko ausgesetzt.

Unter der Annahme Hicks-neutraler Technologieschocks kann die Produktionsfunktion wie folgt formuliert werden:

$$(14) \quad dY^{AK} = \gamma K(dt + dz).$$

Die Stromgröße  $dY$  ist der Momentanoutput des Unternehmerhaushalts.<sup>7</sup> Der Koeffizient  $\gamma > 0$  repräsentiert den Niveauparameter der Produktion.  $K$  ist der Kapitalstock der Ökonomie, wobei zu berücksichtigen ist, daß aufgrund der Normierung der Bevölkerungsgröße auf eins aggregierte und durchschnittliche Größen übereinstimmen.

Die zweite der Analyse zugrundeliegende Technologie geht auf Überlegungen von Arrow (1962) und Romer (1986) zurück und wird unter der sogenannten learning-by-doing-Hypothese subsumiert. Es wird ein positiver Zusammenhang zwischen der Produktivität eines einzelnen Unternehmens und der kumulierten Investition der gesamten Industrie vermutet. Mit dem gesamtwirtschaftlichen Kapitalstock wächst auch das in der Ökonomie verfügbare technische Wissen. Dieses weist die Charakteristiken eines öffentlichen Gutes auf, das heißt, es zeichnet sich durch Nichtrivalität in der Nutzung aus, und ein Ausschluß ist nicht möglich. Die individuellen Investitionen in Humankapital generieren einen externen Effekt, so daß der soziale Grenzertrag des Kapitals über dem privaten liegt. Die Agenten vermögen nicht, das Ertragsdifferential zu internalisieren, mit der Folge, daß in der Ökonomie systematisch zu wenig akkumuliert wird. Unter der Annahme des multiplikativen Produktivitätsschocks ergibt sich die Technologie des Arrow-Romer-Modells folgendermaßen:

$$(15) \quad dY^{AR} = \gamma K^\alpha (LA)^{1-\alpha} (dt + dz), \quad \alpha \in (0, 1).$$

---

<sup>7</sup> Die Schreibweise folgt damit der üblichen Notation für zeitkontinuierliche stochastische Prozesse.  $Y(t)$  ist die kumulierte Produktion des Zeitpunktes  $t$ .

$dY$  bezeichnet wie oben den Momentanoutput und  $\gamma$  den Niveauparameter.  $L$  ist das unelastische Arbeitsangebot, das annahmegemäß auf eins normiert wird. Der Harrod-neutrale Wachstumsparameter  $A$  repräsentiert den Bestand des technischen Wissens und wächst mit den Realkapitalinvestitionen. Im makroökonomischen Gleichgewicht gilt  $A = K$ . Auf aggregierter Ebene ist die Produktionsfunktion überlinear homogen, wohingegen auf individueller Ebene mit konstanten Skalenerträgen bezüglich der akkumulierbaren und nicht-akkumulierbaren Faktoren produziert wird. Mit dieser Formulierung können die Produktionsfaktoren unter Einhaltung des Euler-Theorems nach ihrem Grenzprodukt entlohnt werden. Im Gegensatz zur AK-Technologie unterliegt der Haushalt bei der Produktionsfunktion (15) nicht nur einem Zinsrisiko. Auch die Entlohnung des Produktionsfaktors Arbeit ist eine unsichere Größe, so daß in der Terminologie von Sandmo (1970) das Individuum darüberhinaus einem Einkommensrisiko ausgesetzt ist.

Mit den auf diese Weise konkretisierten Produktionsbedingungen ist es nun möglich, Aussagen über die Ertragsraten der Produktionsfaktoren und über das makroökonomische Gleichgewicht zu treffen. Bei einer Entlohnung nach dem Grenzprodukt ergibt sich die erwartete Realkapitalverzinsung des AK-Modells als:

$$(16) \quad r^{AK} = \gamma,$$

wohingegen die Produktionsfaktoren des Arrow-Romer-Modells im Gleichgewicht folgendermaßen entlohnt werden:

$$(17) \quad r^{AR} = \alpha\gamma \quad \text{und} \quad \omega = (1 - \alpha)\gamma K.$$

Werden die erwarteten Grenzprodukte der Produktionsfaktoren in die Optimalbedingungen für die Konsumquote (11) und den Portfolioanteil des Realkapitals (12) eingesetzt, ergeben sich als neue (technologiespezifische) Werte für die beiden Größen

$$(18) \quad \mu^{AK} = \beta\varepsilon + (1 - \varepsilon) \left[ i + \frac{1}{2}(\gamma - i)n^{AK} \right],$$

$$(19) \quad n^{AK} = \frac{\gamma - i}{\rho\gamma^2\sigma^2}$$

sowie

$$(20) \quad \mu^{AR} = \beta\varepsilon + (1 - \varepsilon)i + (\gamma - i)n^{AR} - \frac{1}{2}(\varepsilon + 1)(n^{AR})^2\rho\gamma^2\sigma^2$$

und

$$(21) \quad n^{AR} = \frac{\alpha\gamma - i}{\rho\alpha\gamma^2\sigma^2} .$$

Die Gleichungen (18) bis (21) zeigen für beide zugrundegelegten Produktionsfunktionen die Richtigkeit der oben aufgestellten Lösungshypothese (10). In beiden Modellen sind die Konsumquote aus Vermögen und der Portfolioanteil konstante Funktionen der Präferenz- und Technologieparameter des Modells.

Im Hinblick auf das im vorangehenden Abschnitt dargestellte Optimierungsproblem lassen sich an dieser Stelle somit folgende erste Ergebnisse festhalten: Unter Unsicherheit erstreckt sich die intertemporale Entscheidung des Agenten auf zwei Bereiche. Zum einen legt er mit der Wahl der optimalen Konsum-Ersparnis-Allokation die absolute Höhe seines Vermögens fest. Zum anderen entscheidet er auf dem Kapitalmarkt über die optimale Anlagestrategie zwischen risikanten und sicheren Vermögenswerten. Grundsätzlich können diese beiden Entscheidungen nicht unabhängig voneinander getroffen werden, wie aus den Gleichgewichtswerten für die beiden Konsumquoten unmittelbar zu erkennen ist. Das risikoaverse Individuum plant, über die Zeit einen konstanten Anteil seines Vermögens zu konsumieren, der jedoch in seiner Höhe auch von der optimalen Portfoliowahl bestimmt wird. Die Portfoliaufteilung selbst wird hingegen von der Konsumentscheidung nicht beeinflußt. Dieses grundsätzliche Merkmal des Modells ist bereits aus der Erwartungsnutzentheorie für den Fall der CRRA-Präferenzen bekannt und wird in dem hier unterstellten Non-Expected-Utility-Rahmen repliziert. Entscheidend ist, daß der Grad der individuellen Risikoaversion invariant gegenüber dem Vermögensniveau ist. Ein weiterer wichtiger Einflußfaktor ist die Markov-Eigenschaft des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses, die besagt, daß historische Realisationen der Technologieschocks keinen Einfluß auf das zukünftige Verhalten haben, wenn die Gegenwart bekannt ist; mithin keine Pfadabhängigkeit vorliegt. Die für die beiden endogenen Wachstumsmodelle abgeleiteten Ergebnisse entsprechen damit den Schlußfolgerungen, die von Merton (1969) sowie Samuelson (1969) aus der Analyse des intertemporalen Consumption-Based Capital Asset Pricing Model (C-CAPM) gezogen wurden.

An dieser Stelle angelangt, ist der sichere Zins  $i$  die einzige unbestimmte Größe des Modells. Mit den oben getroffenen Annahmen über die Quelle der Unsicherheit handelt es sich bei den Produktivitätsschocks um ökonomieweite, das heißt aggregierte Fluktuationen des Outputs, denen alle Wirtschaftssubjekte gleichermaßen ausgesetzt sind. Wird von Aktivitäten auf den internationalen Kapitalmärkten abstrahiert, ist es nicht möglich, die

auftretenden Einkommensschwankungen auf nationaler Ebene zu streuen.<sup>8</sup> Dieses impliziert gleichzeitig, daß auch der Staat keine Versicherung über den Kapitalmarkt anbietet. Folgerichtig muß bei Abwesenheit eines nationalen Kreditmarktes das gesamtwirtschaftliche Vermögen gleich dem aggregierten Kapitalstock sein, das heißt  $K = W$ . Aus dem optimalen Wert für den Portfolioanteil des physischen Kapitals läßt sich für den Fall  $n = 1$  derjenige sichere Zinssatz als Sicherheitsäquivalent des riskanten Kapitalertrags ermitteln, für den das risikoaverse Wirtschaftssubjekt gerade indifferent zwischen einer Investition in Realkapital oder in Finanzkapital ist

$$(22) \quad i^{AK} = \gamma - \rho\gamma^2\sigma^2,$$

$$(23) \quad i^{AR} = \alpha\gamma - \rho\alpha\gamma^2\sigma^2.$$

Die jeweilige Arbitragebedingung für den sicheren Zins bestätigt das bereits an früherer Stelle angedeutete Ergebnis, daß ein risikoaverser Agent sich nur bei Erhalt einer Risikoprämie bereit erklärt, physisches Kapital zu halten. Die erwartete Realkapitalrendite übersteigt das sichere Zinsniveau, wobei der Risikoaufschlag dem zweiten Term auf der rechten Seite von (22) und (23) entspricht. Die Höhe des Zuschlags wird entscheidend durch den Risikograd selbst – gemessen durch die Varianz des Technologieschocks – und durch die Höhe der Risikoaversion bestimmt. Diese theoretische Erkenntnis findet ihre empirische Entsprechung unter anderem in den Untersuchungen von Mehra und Prescott (1985). In dem von ihnen zugrundegelegten Beobachtungszeitraum hat die durchschnittliche Ertragsrate des U. S.-amerikanischen Aktienmarktes die Durchschnittsrendite der staatlichen Anleihen um 6.2 Prozentpunkte überstiegen.<sup>9</sup>

Eine Betrachtung der Gleichungen (22) und (23) zeigt weiter, daß die sicheren Zinsen der beiden endogenen Wachstumsmodelle um den Faktor  $\alpha$  voneinander abweichen. An dieser Stelle wird evident, daß die Wirtschaftssubjekte des Arrow-Romer-Modells ihren individuellen Beitrag zur Human-kapitalakkumulation nicht in ihrer Investitionsentscheidung berücksichtigen. Somit fällt nicht nur die Realkapitalrendite sondern auch der sichere Zins im Vergleich zum Pareto-effizienten Wachstumspfad geringer aus. Dieses Ergebnis spiegelt sich ebenso in der gleichgewichtigen Wachstumsrate

<sup>8</sup> Die Wohlfahrtsseffekte der Kapitalmarktintegration werden von Obstfeld (1994b) und van Wincoop (1994, 1999) diskutiert.

<sup>9</sup> Die Autoren kommen zu dem Schluß, daß die Erwartungsnutzenhypothese nur bei immens hohen Werten des Risikoaversionsmaßes vermag, ein derart hohes Ertragsdifferential zu erklären. Sie sprechen aus diesem Grund auch von einem ‚equity premium puzzle‘. Der hier verwendete Non-Expected-Utility-Ansatz hat auf dieses Ergebnis keinen Einfluß.

der Ökonomie wider. Die Arbitragebedingungen für den sicheren Zins können zusammen mit der Bedingung  $n = 1$  benutzt werden, um für beide Modelle den Gleichgewichtswert der erwarteten Wachstumsrate zu bestimmen:

$$(24) \quad \psi^{AK} = \varepsilon(\gamma - \beta) + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)\rho\gamma^2\sigma^2$$

und

$$(25) \quad \psi^{AR} = \varepsilon(\alpha\gamma - \beta) + \rho\gamma^2\sigma^2\left(\frac{\varepsilon + 1}{2} - \varepsilon\alpha\right).$$

Die Wachstumsraten lassen sich in zwei Komponenten zerlegen. Der jeweils erste Term, im folgenden Driftterm genannt, stimmt mit der entsprechenden Wachstumsrate des deterministischen Modells überein. Im Gegensatz zur Theorie unter Sicherheit ist es allerdings keine hinreichende Bedingung für positives Wachstum der Pro-Kopf-Einkommen, wenn die Kapitalertragsrate die Zeitpräferenzrate übersteigt. Zusätzlich muß noch das Vorzeichen des zweiten Summanden, im folgenden Diffusionsterm genannt, berücksichtigt werden, der gerade den individuellen Reflex auf die Einkommenschwankungen repräsentiert. Seine Höhe wird in beiden Modellen entscheidend von der intertemporalen Substitutionselastizität und der individuellen Risikoneigung beeinflußt. Im Arrow-Romer-Modell ist jedoch zusätzlich die partielle Produktionselastizität  $\alpha$  von Bedeutung. Anhand der Gleichungen (24) und (25) ist leicht zu überprüfen, daß die Wachstumsrate des AK-Modells diejenige des Arrow-Romer-Modells nur übersteigt, wenn der sichere Zins positiv ist. Somit werden im stochastischen Kontext die Erkenntnisse der deterministischen Modelle nur unter weitergehenden, den zulässigen Lösungsraum einschränkenden Bedingungen repliziert.<sup>10</sup>

Die erwarteten gleichgewichtigen Wachstumsraten (24) und (25) sind zeit-invariante Funktionen der Strukturparameter der beiden Modelle. Es handelt sich hierbei um die Präferenzparameter  $\beta, \varepsilon$  und  $\rho$  sowie um die Parameter der Produktionsfunktionen  $\gamma$  und  $\sigma$ , beziehungsweise bei (25) zusätzlich um den Koeffizienten  $\alpha$ . Mit einer Erhöhung der Zeitpräferenzrate  $\beta$  geht die Wachstumsrate der Ökonomie zurück, da der Haushalt dem Gegenwartskonsum eine größere Bedeutung zumäßt und infolgedessen über eine geringere Akkumulation seine zukünftigen Konsummöglichkeiten einschränkt. Die Diskontrate erscheint nur im Driftterm, und der bereits aus der deterministischen Theorie bekannte Zusammenhang verändert sich nicht.

---

<sup>10</sup> Darüber hinaus muß für ein zulässiges Konsumprogramm die im Anhang aufgeführte Transversalitätsbedingung (32) erfüllt sein.

Ein höherer Niveauparameter  $\gamma$  führt im Driftterm aufgrund der damit einhergehenden Steigerung des Kapitalertrags eindeutig zu einer Steigerung der Wachstumsrate. Die Realkapitalhaltung wird attraktiver, so daß der Haushalt Konsum durch Ersparnis substituiert.

Die intertemporale Substitutionselastizität  $\varepsilon$  im Driftterm zeigt den bereits aus der deterministischen Theorie bekannten Effekt auf die Wachstumsrate. Je geringer die intertemporale Substitutionselastizität ist, desto weniger sind die Individuen bereit, von einem über die Zeit gleichmäßigen Konsumstrom abzuweichen und Gegenwarts- gegen Zukunftskonsum zu substituieren. Dieser Sachverhalt äußert sich dementsprechend in einer geringeren Wachstumsrate der Ökonomie. Auch der Diffusionsterm hängt von der Höhe der Substitutionselastizität ab, die hier über sein Vorzeichen entscheidet. Ist die Substitutionsbereitschaft hinreichend groß, so wird der Diffusionsterm der Wachstumsrate des AK-Modells negativ, während derjenige des Arrow-Romer-Modells zusätzlich von der Kapitaleinkommensquote determiniert wird. Eine Steigerung der relativen Risikoaversion hat einen Niveaueffekt auf den Diffusionsterm und verstärkt dessen Einfluß auf die Wachstumsrate.

Die Reaktion der Wachstumsrate auf eine Erhöhung der Varianz des Kapitalstocks ist hingegen nicht eindeutig, da wie gerade erläutert das Vorzeichen des Diffusionsterms beider Wachstumsraten maßgeblich durch die Höhe der intertemporalen Substitutionselastizität bestimmt wird. Der ambivalente Wachstumseffekt einer Zunahme der Kapitalvolatilität wird eingehender im folgenden Abschnitt diskutiert.

An dieser Stelle kann zunächst als zentrales Ergebnis festgehalten werden, daß die Integration von Unsicherheit in Form von nicht antizipierbaren Schwankungen der Produktivität Auswirkungen auf das langfristige Wachstum der Volkswirtschaft hat. Die Entwicklung des Kapitalstocks folgt einem stochastischen Trend und ist lognormalverteilt in der Zeit. Der Kapitalstock des Zeitpunktes  $t$  ergibt sich in allgemeiner Form für  $\psi \in (\psi^{AK}, \psi^{AR})$  als Lösung von (3):

$$(26) \quad K(t) = K(0) \cdot e^{\left\{ \left( \psi - \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma^2 \right) t + \gamma \sigma [z(t) - z(0)] \right\}}.$$

Die wechselseitige Unabhängigkeit in der Betrachtung der Phänomene Konjunktur und Wachstum wird hiermit durchbrochen. Welchen Einfluß dabei die Art des Risikos auf die qualitative Gestalt der makroökonomischen Gleichgewichtswerte hat und unter welchen Bedingungen bestimmte Verhaltensweisen der Wirtschaftssubjekte generiert werden, wird im nächsten Abschnitt eingehender erörtert.

#### 4. Vorsichtsersparnis bei Zins- und Einkommensrisiko

Im folgenden soll sich die Analyse auf das Vorzeichen des Diffusionsterms konzentrieren, der die Anpassung der Wirtschaftssubjekte an das technologische Risiko reflektiert. Der Term ist grundsätzlich immer dann positiv, wenn ein Motiv zur Bildung von Vorsichtsersparnis vorliegt, die gerade als die durch die Unsicherheit verursachte zusätzliche Ersparnis definiert ist. Die erwartete Wachstumsrate der Ökonomie übersteigt dann die unter Sicherheit gewählte. Wie bereits einleitend erwähnt, versucht das risikoaverse Wirtschaftssubjekt, sich durch eine vermehrte Akkumulation auf den Kapitalmärkten über die Zeit selbst zu versichern, um so seinen Konsumstrom zu glätten. Besonders die Untersuchungen von Leland (1968) und Sandmo (1970) verdeutlichen den Zusammenhang zwischen Risiko und Ersparnis. Beide betonen den Einfluß der individuellen Risikoneigung auf die optimale Akkumulationsentscheidung. Jedoch sind die von ihnen abgeleiteten Erkenntnisse im Rahmen der Erwartungsnutzentheorie entwickelt worden, innerhalb der, wie unter anderem Obstfeld (1994a, S. 1472) feststellt, „... risk aversion and intertemporal substitutability cannot vary independently.“

Insbesondere Sandmo (1970) stellt einen Zusammenhang zwischen der Höhe der Risikoaversion und der Art des zugrundeliegenden Risikos her. Wie eingangs erwähnt, unterscheidet er zwischen Zins- und Einkommensrisiko. Um seine Ergebnisse auf die stochastische Wachstumstheorie übertragen zu können, ist es jedoch erforderlich, im folgenden den Fall der Erwartungsnutzenmaximierung zu betrachten. In dem hier vorgestellten Modellrahmen entspricht dies der Parameterkonstellation  $\rho = 1/\varepsilon$ . Die Wachstumsraten lassen sich dann entsprechend aus den Gleichungen (24) und (25) wie folgt ermitteln:

$$(27) \quad \psi^{AK} = \frac{1}{\rho}(\gamma - \beta) + \frac{1}{2}(\rho - 1)\gamma^2\sigma^2$$

und

$$(28) \quad \psi^{AR} = \frac{1}{\rho}(\alpha\gamma - \beta) + \gamma^2\sigma^2\left(\frac{\rho + 1}{2} - \alpha\right).$$

Bei Vorliegen reiner Zinsunsicherheit, wie sie im AK-Modell auftritt, ist die Reaktion des Konsumenten auf eine Zunahme des Risikos nach Sandmo (1970) unbestimmt, da Einkommens und Substitutionseffekt gegenläufige Vorzeichen aufweisen. Eine vermehrte Ersparnis erhöht einerseits das erwartete zukünftige Einkommen, andererseits steigt auch dessen Volatilität.

Der intertemporale Einkommenseffekt wirkt eindeutig positiv auf die Ersparnis. Gleichzeitig reagiert der Konsument auf die größere Volatilität des zukünftigen Einkommens jedoch auch mit einer Einschränkung der Ressourcen, die er einem Verlustrisiko aussetzt. Damit wirkt der intertemporale Substitutionseffekt negativ auf die Ersparnis und führt zu einer Reduktion der Wachstumsrate. Im Fall des Zinsrisikos bleibt letztlich offen, welcher der beiden Effekte überwiegt.

Dieses Ergebnis spiegelt sich in der erwarteten Wachstumsrate (27) des AK-Modells wider. Aus der Annahme konstanter relativer Risikoaversion folgt, daß der Nettoeffekt aus positivem Einkommens- und negativem Substitutionseffekt ausschließlich von der Höhe des Maßes  $\rho$  bestimmt wird. Die Situation der Vorsichtersparnis korrespondiert somit mit  $\rho > 1$ , wohingegen Sicherheitsäquivalenz bei  $\rho = 1$  gegeben ist.<sup>11</sup> Im dritten möglichen Fall,  $\rho < 1$ , wird das risikoaverse Wirtschaftssubjekt seinen Konsum bei Risiko sogar über das unter Sicherheit optimale Niveau hinaus erhöhen. Die Wachstumsrate fällt dementsprechend geringer aus.

Betrachtet man im Gegensatz dazu die erwartete Wachstumsrate (28) des Arrow-Romer-Modells, zeigt sich ein anderes Bild. In diesem Modell trifft der Produktivitätsschock alle Produktionsfaktoren gleichermaßen.<sup>12</sup> Aus diesem Grund unterliegt der Haushalt sowohl einem Zinsrisiko in bezug auf seine Kapitalerträge als auch einem Einkommensrisiko im Hinblick auf sein Lohneinkommen. Die Betrachtung der jeweiligen Diffusionsterme zeigt, daß ergänzend zur Risikoaversion der Parameter  $\alpha$  als Maß für die Aufteilung der Faktoreinkommen von Bedeutung ist.

Sandmo (1970) kommt für den Fall des reinen Einkommensrisikos zu dem Ergebnis, daß ein Motiv zur Bildung von Vorsichtersparnis eindeutig bei abnehmender absoluter Risikoaversion besteht. Da die hier unterstellte isoelastische Nutzenfunktion diese Eigenschaft aufweist, würde der Haushalt bei reinem Einkommensrisiko für jedes  $\rho > 0$  und jedes Konsumniveau Vorsichtersparnis bilden.<sup>13</sup>

Da im zugrundegelegten Arrow-Romer-Modell Einkommens- und Zinsrisiko gleichzeitig auftreten, entscheidet die Produktionselastizität  $\alpha$  über die Gewichtung, mit der die beiden beschriebenen Risikoquellen zur Bildung von Vorsichtersparnis beitragen. Diese tritt bereits bei einer Risikoneigung von  $\rho < 1$  auf. Wegen des Einflusses des Einkommensrisikos kann

<sup>11</sup> Diese Situation ist nicht mit Risikoneutralität, das heißt  $\rho = 0$ , zu verwechseln.

<sup>12</sup> Die Bedeutung der Einkommensquelle wird noch betont, wenn zusätzlich Verteilungsschocks unterstellt werden, wie in Clemens und Soretz (1998).

<sup>13</sup> An dieser Stelle ist es wichtig darauf hinzuweisen, daß Risikoaversion allein keine hinreichende Bedingung dafür ist, daß Vorsichtersparnis gebildet wird. Leland (1968) nennt als Gegenbeispiel die quadratische Nutzenfunktion, die zu einer sicherheitsäquivalenten intertemporalen Konsumallokation führt.

das Phänomen der Vorsichtersparnis für  $\alpha \in (0, 1)$  bereits ab  $\rho > 2\alpha - 1$  beobachtet werden. Ein höherer Anteil des Einkommensrisikos am Gesamt-Risiko korrespondiert mit einem geringeren Wert von  $\alpha$ . Infolgedessen reagieren auch weniger risikoaverse Wirtschaftssubjekte auf die Unsicherheit mit einer Erhöhung der Ersparnis. Der Fall  $\rho > 1$  entspricht hier nicht der Situation sicherheitsäquivalenten Konsums, das heißt auch unter der häufig getroffenen Annahme logarithmischer Präferenzen bildet der Konsument Vorsichtersparnis. Die Kombination von Einkommensunsicherheit und der hinreichenden Bedingung  $\rho > 0$  mit einem Zinsrisiko und der zugehörigen Bedingung  $\rho > 1$  führt zu der Verschiebung des Parameterintervalls, innerhalb dessen dieses Phänomen auftritt.

## 5. Schlußbemerkungen

Im Zentrum des vorliegenden Beitrags stand die Frage, welchen Einfluß aggregierte Produktivitätsschocks, die eine kumulative (permanente) Komponente aufweisen, auf das langfristige Wachstum einer Volkswirtschaft ausüben. Es konnte gezeigt werden, daß risikoaverse Wirtschaftssubjekte im Rahmen ihrer Entscheidung über die optimale intertemporale Konsumallokation die auftretende Unsicherheit berücksichtigen. Sie wählen eine Wachstumsrate ihres Vermögens, die üblicherweise von der unter Sicherheit abweicht und nur unter bestimmten Parameterkonstellationen des Modells mit ihr übereinstimmt. Im Rahmen der Analyse von Einkommens- und Zinsrisiko hat sich als ein entscheidender Faktor für dieses Ergebnis die individuelle Risikoeinstellung erwiesen, die durch den Arrow /Pratt-Index der relativen Risikoaversion gemessen wird. Stärker risikoaverse Wirtschaftssubjekte tendieren dazu, sich durch eine erhöhte Akkumulation auf dem intertemporalen Kapitalmarkt selbst zu versichern. Im Gegensatz dazu kann eine relativ geringe Risikoneigung dazu führen, daß die Wachstumsraten des stochastischen Modells hinter die des deterministischen zurückfällt. Ein wesentliches Ergebnis ist jedoch, daß das Phänomen der Vorsichtersparnis um so früher auftritt, je größer der Anteil der Nicht-Kapitaleinkommen am Gesamteinkommen ist, daß in diesem Sinn also auch die Quelle des unsicheren Einkommens eine entscheidende Rolle spielt. Um diesen Effekt zu verdeutlichen, wurden zwei endogene Wachstumsmodelle miteinander verglichen: zum einen das AK-Modell, in dem ausschließlich ein Zinsrisiko besteht, zum anderen das Arrow-Romer-Modell, in dem neben dem Zins auch ein Einkommensrisiko auftritt. Der wesentliche Unterschied der intertemporalen Wirkung besteht darin, daß eine Erhöhung der Ersparnis im Fall des Einkommensrisikos lediglich den Erwartungswert zukünftiger Einkommensströme beeinflußt, während sie bei Zinsrisiko auch auf deren Volatilität wirkt.

## Anhang

Die Bedingungen 1. Ordnung des Programms (7) lauten:

$$(29) \quad 0 = C^{-1/\varepsilon} - G'(\bullet)J'(W)$$

$$(30) \quad 0 = J'(W)(r - i) + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_W^2}{\partial K} J''(W)$$

$$(31) \quad 0 = G'(\bullet) \left[ J'(W)(i - \beta) + J''(W)[iW + (r - i)K + \omega - C] + \frac{1}{2} J'''(W) \sigma_W^2 \right]$$

$$(31) \quad + (1 - \rho)G''(\bullet)J'(W) \left[ J'(W)(iW + (r - i)K + \omega - C) + \frac{1}{2} J''(W) \sigma_W^2 \right].$$

Die Bedingung (29) bestimmt zusammen mit (31) die optimale Konsumallokation und verlangt den Ausgleich der Grenznutzen über die Zeit. Gleichung (31) ersetzt dabei die sonst zumeist verwendete Bellman-Gleichung. Diese ist ungeeignet zur Lösung von Modellen mit steigenden Skalenerträgen in der Produktion (vgl. Clemens 1999, Kap. 2). Gleichung (30) ist die erforderliche Arbitragebedingung für die gleichgewichtige Portfoliowahl. Darüberhinaus muß für ein zulässiges Konsumprogramm die Transversalitätsbedingung erfüllt sein. Sie lautet:

$$(32) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E_t \left[ e^{-\beta t} G[(1 - \rho)J(W)] \right] = 0.$$

Man erhält (8) aus (29) durch Auflösen nach  $C$ . Zur Ermittlung des optimalen Wertes von  $K$  muß die Definition der erwarteten Varianz des Technologieschocks  $E(dz)^2 = \sigma^2 dt$  berücksichtigt werden. Die Ableitung der Vermögensvarianz nach dem Kapitalstock lautet dann:  $\partial \sigma_W^2 / \partial K = 2r(rK + \omega)\sigma^2$ . Auflösen nach  $K$  ergibt Gleichung (9) aus dem Text.

Ein über die Zeit konstanter Portfolioanteil des Kapitals impliziert konstante relative Risikoaversion. Dieses führt zu der Lösungsvermutung, daß es sich bei der Wertefunktion  $J(W)$  um eine Funktion vom CRRA-Typ handelt. Ausnutzen dieser Vermutung in (9) ergibt als Lösung den Optimalwert des Portfolioanteils (12). Aus der notwendigen Bedingung (29) und der CRRA-Form der Wertefunktion folgt unmittelbar:

$$(33) \quad \begin{aligned} J'(W) &= \mu^{\frac{1-\rho}{1-\varepsilon}} W^{-\rho} > 0 \\ J''(W) &= -\rho \mu^{\frac{1-\rho}{1-\varepsilon}} W^{-(\rho+1)} < 0 \\ J'''(W) &= \rho(\rho+1) \mu^{\frac{1-\rho}{1-\varepsilon}} W^{-(\rho+2)} > 0. \end{aligned}$$

Einsetzen der Ableitungen in (8) und (31) ergibt die Gleichung (11) aus dem Text.

## Literatur

- Arrow, K. J.* (1962), The Economic Implications of Learning by Doing, *Review of Economic Studies* 29, 155–173.
- Caballero, R. J.* (1990), Consumption Puzzles and Precautionary Savings, *Journal of Monetary Economics* 25, 113–136.
- Carroll, C. D. / Samwick, A. A.* (1997), The Nature of Precautionary Wealth, *Journal of Monetary Economics* 40, 41–71.
- Cazzavillan, G.* (1996), Public Spending, Endogenous Growth, and Endogenous Fluctuations, *Journal of Economic Theory* 71, 394–415.
- Clemens, C.* (1999), Endogenes Wachstum, Einkommensunsicherheit und Besteuerung, Metropolis, Marburg.
- Clemens, C. / Soretz, S.* (1997), Macroeconomic Effects of Income Taxation in a Model of Stochastic Growth, *Finanzarchiv, N. F.* 54, 471–493.
- (1998), Risk Sharing and Factor Incomes in a Stochastic Growth Model, in: F. Haslinger und O. Stönnér-Venkatarama (Hrsg.), *Aspects of the Distribution of Income*, S. 371–389, Metropolis, Marburg.
- Collard, F.* (1999), Spectral and Persistence Properties of Cyclical Growth, *Journal of Economic Dynamics and Control* 23, 463–488.
- Corsetti, G.* (1997), A Portfolio Approach to Endogenous Growth: Equilibrium and Optimal Policy, *Journal of Economic Dynamics and Control* 21, 1627–1644.
- Devereux, M. B. / Smith, G. W.* (1994), International Risk Sharing and Economic Growth, *International Economic Review* 35, 535–550.
- Eaton, J.* (1981), Fiscal Policy, Inflation and the Accumulation of Risky Capital, *Review of Economic Studies* 48, 435–445.
- Epstein, L. G. / Zin, S. E.* (1989), Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behaviour of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework, *Econometrica* 57, 937–969.
- Hubbard, R. G. / Skinner, J. / Zeldes, S. P.* (1993), The Importance of Precautionary Motives in Explaining Individual and Aggregate Saving, *NBER Working Paper Series* 4516, National Bureau of Economic Research, Cambridge/Ma.
- Jones, L. E. / Manuelli, R. E.* (1990), A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Political Implications, *Journal of Political Economy* 98, 1008–1038.
- Jones, L. E. / Manuelli, R. E. / Stacchetti, E.* (1999), Technology (and Policy) Shocks in Models of Endogenous Growth, *NBER Working Paper Series* 7063, National Bureau of Economic Research, Cambridge/Ma.
- Kydland, F. E. / Prescott, E. C.* (1982), Time to Build and Aggregate Fluctuations, *Econometrica* 50, 1345–1370.
- Leland, H. E.* (1968), Saving and Uncertainty: The Precautionary Demand for Saving, *The Quarterly Journal of Economics* 82, 465–473.
- Long, J. B. / Plosser, C. I.* (1983), Real Business Cycles, *Journal of Political Economy* 91, 39–69.

- Lucas, R. E. (1988), On the Mechanics of Economic Development, Journal of Monetary Economics 22, 3–42.*
- Mehra, R. / Prescott, E. C. (1985), The Equity Premium. A Puzzle, Journal of Monetary Economics 15, 145–161.*
- Merton, R. C. (1969), Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case, The Review of Economics and Statistics 51, 247–257.*
- Neusser, K. (1991), Testing the Long-Run Implications of the Neoclassical Growth Model, Journal of Monetary Economics 27, 3–37.*
- Obstfeld, M. (1994a), Evaluating Risky Consumption Paths: The Role of Intertemporal Substitutability, European Economic Review 38, 1471–1486.*
- (1994b), Risk-Taking, Global Diversification, and Growth, *The American Economic Review* 84, 1310–1329.
- Prescott, E. C. (1986), Theory ahead of Business-Cycle Measurement, Carnegie Rochester Conference Series on Public Policy 25, 11–44.*
- Reimers, H. E. (1991), Analyse kointegrierter Variablen mittels vektorautoregressiver Modelle, Physica-Verlag, Heidelberg.*
- Romer, P. M. (1986), Increasing Returns and Long-Run Growth, *Journal of Political Economy* 94, 1002–1037.*
- Samuelson, P. A. (1969), Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, *The Review of Economics and Statistics* 51, 239–246.*
- Sandmo, A. (1970), The Effect of Uncertainty on Savings Decisions, *Review of Economic Studies* 37, 353–360.*
- Skinner, J. (1988), Risky Income, Life Cycle Consumption and Precautionary Savings, *Journal of Monetary Economics* 22, 237–255.*
- Smith, T. R. (1996a), Cyclical Uncertainty, Precautionary Saving and Economic Growth, *Economica* 63, 477–494.*
- Smith, W. T. (1996b), Taxes, Uncertainty, and Long-term Growth, *European Economic Review* 40, 1647–1664.*
- Soretz, S. (2000), Steuerpolitik und wirtschaftliches Wachstum, Metropolis, Marburg.*
- Turnovsky, S. J. (1993), Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy, *International Economic Review* 34, 953–981.*
- (1999), On the Role of Government in a Stochastically Growing Economy, *Journal of Economic Dynamics and Control* 23, 873–908.
- van Wincoop, E. (1994), Welfare Gains from International Risksharing, *Journal of Monetary Economics* 34, 175–200.*
- (1999), How Big are the Potential Welfare Gains from International Risksharing?, *Journal of International Economics* 47, 109–135.
- Zeldes, S. P. (1989), Optimal Consumption with Stochastic Income: Deviations from Certainty Equivalence, *The Quarterly Journal of Economics* 104, 275–298.*

## Zusammenfassung

Der vorliegende Beitrag analysiert den Einfluß von aggregierten Produktivitäts schocks auf die intertemporale Entscheidung risikoaverser Agenten. Dabei stehen insbesondere die Auswirkungen auf das langfristige Wachstum der Ökonomie im Vordergrund der Betrachtungen. Es wird gezeigt, daß neben der Höhe der individuellen Risikoneigung auch die Quelle der stochastischen Einkommen eine wesentliche Determinante für die Wirkungsrichtung der Zufallseinflüsse ist. Die Bedingungen, unter denen das Zinsrisiko positiv auf das Wachstum wirkt, sind andere als bei gleichzeitigem Vorliegen eines Lohnrisikos. Dieser Unterschied wird mittels alternativer Annahmen über die zugrundeliegende Produktionstechnologie veranschaulicht.

## Abstract

This paper analyzes the effects of aggregate productivity shocks on intertemporal decisionmaking of risk averse agents. We focus especially on the consequences for long-run growth. We demonstrate that not only the degree of risk aversion but also the source of income is crucial for the impact of the stochastic disturbances. In the presence of a pure capital risk, growth effects are different from those arising when agents are subject to capital and income risk.

*JEL-Klassifikation:* D8, D9, O4

*Keywords:* Endogenes Wachstum, Produktivitätsschocks,  
Einkommensvolatilität