

## Shortfall-Risiko / Excess-Chance-Entscheidungskalküle Grundlagen und Beziehungen zum Bernoulli-Prinzip\*

Von Peter Albrecht, Raimond Maurer und Matthias Möller

### 1. Motivation

Die Risikomessung und Risikosteuerung auf der Grundlage von Maßen des Shortfall-Risikos hat in den letzten Jahren verstärkt Beachtung vor allem in Investmenttheorie und -praxis, aber auch seitens der Entscheidungstheorie unter Risiko gefunden. Dabei werden vor allem Shortfall-Risikomaße des LPM (**L**ower **P**artial **M**oments)-Typus betrachtet. Traditionell hingegen spielt eine Variante der Shortfall-Wahrscheinlichkeit, die sog. Verlust- oder Ruinwahrscheinlichkeit, eine zentrale Rolle in der versicherungsbetrieblichen Risikotheorie.

Im Rahmen einer entscheidungslogischen Fundierung ist dabei zu unterscheiden zwischen zwei Konstellationen. So entstehen zum einen auf der Basis des *Markowitschen* Erwartungswert-Varianz-Ansatzes zum *Bernoulli-Prinzip* konsistente Entscheidungskalküle, wenn das Risikomaß Varianz durch ein Shortfall-Risikomaß ersetzt wird<sup>1</sup>. Zum anderen hingegen ist das *Safety-First-Prinzip*<sup>2</sup>, bei dem eine absolute Begrenzung des tolerierten Risikos stattfindet, nicht *Bernoulli-kompatibel* und erfordert die Entwicklung eines eigenständigen Entscheidungskalküls.

Im Rahmen von Untersuchungen des empirischen Verhaltens von Entscheidungsträgern in Unternehmen ist die Perzeption von Risiko als die Gefahr, bestimmte Zielgrößen zu verfehlen, bzw. als Gefahr von ruinösen Verlusten (Insolvenzrisiko) bestätigt worden<sup>3</sup>.

---

\* Verantwortlicher Herausgeber / editor in charge: H. L.

Revidierte Fassung: Wir sind den beiden Gutachtern der ersten Fassung für ihre sehr wertvolle konstruktive Kritik und die damit verbundenen umfangreichen Anregungen zu großem Dank verpflichtet. Die Durchführung der Untersuchung wurde dankenswerterweise durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft unterstützt.

<sup>1</sup> Für den Fall von Shortfall-Risikomaßen des LPM (Lower Partial-Moments)-Typus vgl. vor allem *Fishburn* (1977).

<sup>2</sup> Anzumerken ist an dieser Stelle, daß wir das *Safety-First-Prinzip* im Sinne der von *Bawa* (1978) entwickelten Konzeption verstehen, nicht im Sinne der früheren Konzeption von *Roy* (1952), bei der das Portefeuille selektiert wird, das – bei vorgegebener Zielrendite – die kleinste Shortfall-Wahrscheinlichkeit aufweist. Zur *Bernoulli-Kompatibilität* der *Roy-Konzeption* vgl. etwa *Levy / Sarnat* (1972).

Im Rahmen von Kapitalmarktgleichgewichtsmodellen hat die Konzeption von Shortfall-Risikomaßen zur Ableitung sowie zur empirischen Überprüfung von Verallgemeinerungen des Capital Asset Pricing-Modells (CAPM) geführt. Die Anleger am Kapitalmarkt sind dabei entweder Erwartungswert/Shortfall-Risiko-Investoren<sup>4</sup>, d. h. die Bewertung der Renditeverteilungen der am betrachteten Markt gehandelten Finanztitel hängt allein von dessen Erwartungswert sowie von dem jeweiligen Shortfall-Risikomaß ab oder werden alternativ als Safety-First-Investoren modelliert<sup>5</sup>.

Im Rahmen von Investment-Strategien führt die Konzeption des Shortfall-Risikos zunächst zu verallgemeinerten Ansätzen der *Markowitzschen* Portfolio-Selection-Theorie<sup>6</sup>. Empirische Anwendungen sind dabei im größeren Umfang im Bereich der Asset-Allocation-Problematik erfolgt<sup>7</sup>, d. h. der Problematik der Aufteilung eines gegebenen Investitionsbudgets auf die Haupt-Anlageklassen (Aktien, Festverzinsliche Wertpapiere, Geldmarkttitel, Immobilien, etc.) unter Berücksichtigung der Rendite/Risikoprofile und der Korrelationsstruktur dieser Anlageklassen.

Institutionelle Kapitalanleger – insbesondere Versicherungsunternehmen und Pensionsfonds – versuchen typischerweise ihr Kapitalanlageportefeuille so zu steuern, daß in den einzelnen Anlageperioden, aber auch über längere Anlagehorizonte hinweg, mit möglichst großer Sicherheit bestimmte Planrenditen erzielt werden. Dies erfordert die Entwicklung spezifischer Konzeptionen zur Kapitalanlagesteuerung. Hierbei ist der Einsatz von ein- sowie mehrperiodischen Shortfall-Risikomaßen besonders geeignet<sup>8</sup>.

Eine spezifische Problematik tritt auf, wenn im Rahmen der Kapitalanlage Optionspositionen eingegangen werden, z. B. zu Zwecken der Positionssicherung (Hedging). Durch ihre spezifische Konstruktion (Wahlrechte des Käufers der Option) induzieren Optionen asymmetrische Rendite/Risikoprofile. Traditionelle varianzbasierte portefeuilletheoretische Ansätze erweisen sich zur Steuerung von Anlageportefeuilles, die Optionspositionen beinhalten, als wenig geeignet<sup>9</sup>. Der Einsatz von Shortfall-Risikoansätzen erscheint hingegen – aufgrund der ebenfalls asymmetrischen Natur dieser Maße – hierfür als besonders geeignet<sup>10</sup>. Eine weitere aktuelle Entwick-

---

<sup>3</sup> Vgl. *Mao* (1970) sowie *Laughhunn / Payne / Crum* (1980).

<sup>4</sup> Vgl. *Harlow / Rao* (1989), *Hogan / Warren* (1974) sowie *Lee / Rao* (1988).

<sup>5</sup> Vgl. *Arzac / Bawa* (1977).

<sup>6</sup> Vgl. *Hogan / Warren* (1972).

<sup>7</sup> Vgl. *Harlow* (1991) sowie *Leibowitz / Kogelman* (1991).

<sup>8</sup> Vgl. insbesondere *Stephan* (1995).

<sup>9</sup> So bereits *Bookstaber / Clarke* (1984, 1985).

<sup>10</sup> Vgl. etwa *Albrecht / Maurer / Stephan* (1995a).

lung<sup>11</sup> besteht darin, zur Messung der Performance von Optionsstrategien alternativ zu der als Performancemaß sehr populären *Sharpe-Ratio* (Reward-to-Variability-Ratio) analog konstruierte Maße zu betrachten, bei denen das Risiko einer Anlagestrategie nicht durch die Rendite-Standardabweichung gemessen wird, sondern durch entsprechende Kenngrößen für das Shortfall-Risiko.

Im Bereich der modelltheoretischen Steuerung von Versicherungsunternehmen spielt traditionell die Shortfall-Wahrscheinlichkeit – hier Verlust- oder Ruinwahrscheinlichkeit genannt – eine bedeutende Rolle<sup>12</sup>. Anwendungen finden sich im Bereich der Analyse von Ausgleich-im-Kollektiv-Effekten<sup>13</sup> sowie bei den Problemkreisen der Prämienkalkulation (Perzentilprinzip<sup>14</sup>), der Solvabilität<sup>15</sup> (Regulierung der Mindestkapitalausstattung eines Versicherungsunternehmens), der Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen (Quantilprinzip<sup>16</sup>), der erfolgsorientierten Steuerung<sup>17</sup> sowie der risikoadjustierten Performance-Steuerung<sup>18</sup> von Versicherungsunternehmen.

Eine zur Solvabilitätsregulierung von Versicherungsunternehmen – und damit zum Risikomaß Shortfall-Wahrscheinlichkeit – eng verwandte<sup>19</sup> weitere Anwendung von Shortfall-Risikomaßen ergibt sich bei der aufsichtsrechtlichen bzw. internen Risikosteuerung<sup>20</sup> von Kredit- und Finanzinstituten auf der Grundlage des sogenannten *Value-at-Risk*-Konzepts. Der Value-at-Risk ergibt sich dadurch, daß für einen bestimmten Zeithorizont eine tolerierte Shortfall-Wahrscheinlichkeit  $LPM_z^0 = \varepsilon$  (zum Beispiel  $\varepsilon = 5\%$ ) für den Periodenverlust  $V$  aus einer Finanzposition vorgegeben und die Referenzgröße  $z$  als Lösung dieser Gleichung bestimmt wird. Der Value-at-Risk zum Konfidenzniveau  $\varepsilon$  ist dabei intuitiv derjenige Wert des Periodenverlusts aus der Finanzposition, der mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \varepsilon$  nicht überschritten wird. Aus statistischer Sicht handelt es sich um ein Quantil der zugrundeliegenden Verlustverteilung.

Konzeptionell analoge Ansätze haben Anwendung gefunden für die Bewertung von Pensions-<sup>21</sup> oder generellen Rückstellungen<sup>22</sup> sowie zur Ana-

---

<sup>11</sup> Vgl. vor allem Zimmermann (1994) sowie Albrecht / Maurer / Stephan (1995b).

<sup>12</sup> Grundlegend hierzu Bühlmann (1970), Kapitel 6.2.

<sup>13</sup> Vgl. hierzu Albrecht (1982, 1987).

<sup>14</sup> Vgl. Albrecht (1992), S. 50 f.

<sup>15</sup> Vgl. Schradin (1994), S. 196 ff.

<sup>16</sup> Vgl. Albrecht (1992), S. 63 f.

<sup>17</sup> Vgl. vor allem Schradin (1994).

<sup>18</sup> Vgl. aktuell Albrecht (1998).

<sup>19</sup> Vgl. Albrecht / Bährle / König (1997).

<sup>20</sup> Vgl. Basler Ausschuß für Bankenaufsicht (1996).

<sup>21</sup> Vgl. etwa Ramsay (1994) sowie Thurmayer (1992).

lyse des Ausfallrisikos von (nicht börsengehandelten) Finanzderivaten<sup>23</sup>. Vor dem Hintergrund dieser vielfältigen und fruchtbaren Entwicklungen sowohl auf der theoretischen Ebene als auch im Bereich ökonomischer Anwendungen verfolgt die vorliegende Arbeit eine mehrfache Zielsetzung. Zum ersten soll ein neuartiger einheitlicher konzeptioneller Zugang zur Quantifizierung des Verlustpotentials (Risikos) eines zufallsabhängigen finanziellen Ergebnisses und damit zur konsistenten Ableitung von Shortfall-Risikomaßen dargestellt werden<sup>24</sup>. Die in der Literatur bislang ausschließlich behandelten Maße des Lower Partial Moment-Typus erweisen sich dabei als Spezialfälle. Eine solche Vorgehensweise eröffnet zugleich eine neue Interpretationsmöglichkeit von Shortfall-Risikomaßen. Zum zweiten wird die solchermaßen verallgemeinerte Klasse der Shortfall-Risiko-Erwartungswert ( $SR/E$ )-Kalküle vorgestellt und ihre Beziehungen zum *Bernoulli*-Prinzip beleuchtet. Zum dritten wird symmetrisch zur Quantifizierung des Risikopotentials durch Shortfall-Risikomaße die Quantifizierung des Gewinnpotentials (Chance) durch Excess-Chancemaße vorgeschlagen<sup>25</sup>. Schließlich wird die Klasse der Shortfall-Risiko/Excess-Chance ( $SR/EC$ )-Kalküle eingeführt und auch deren Beziehungen zum *Bernoulli*-Prinzip untersucht<sup>26</sup>.

## 2. Ein Ansatz zur einheitlichen Fundierung von Shortfall-Risikomaßen

### 2.1 Grundsätzliche Überlegungen zur Quantifizierung des Verlustpotentials einer finanziellen Zufallsgröße

Ökonomische Entscheidungen unter Risiko sind Wahlakte von Wirtschaftssubjekten, bei denen die Konsequenzen der gegebenen Handlungsalternativen indeterminiert sind. Dabei wird zumindest auf der modelltheoretischen Ebene angenommen, das Wirtschaftssubjekt besitze Informationen sowohl über die möglichen Handlungsergebnisse als auch über deren Eintrittswahrscheinlichkeiten. Im Kontext ökonomischer Fragestellungen sind die Handlungsergebnisse üblicherweise jeweils monetäre Größen, die durch eine Zufallsvariable  $X$  mit bekannter Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert werden können.

<sup>22</sup> Vgl. Zimmermann (1991).

<sup>23</sup> Vgl. König / Maurer / Schradin (1997).

<sup>24</sup> Dieser Zugang geht zurück auf Albrecht (1994 a).

<sup>25</sup> Dieser Vorschlag geht ebenfalls zurück auf Albrecht (1994 a).

<sup>26</sup> Gleichzeitig vermittelt die vorliegende Arbeit einen Einblick in das im Rahmen des Mannheimer Sonderforschungsbereichs „Rationalitätskonzepte, Entscheidungsverhalten und Ökonomische Modellierung“ durchgeführte Projekt „Shortfall-Risiko/Excess-Chance-Entscheidungskalküle“.

Ein intuitiver Risikobegriff ist derjenige als möglicher Verlust. Dieser muß sich dabei nicht auf das Erleiden finanzieller Verluste beschränken. Helten (1991, S. 129 ff.) kennzeichnet Risiko sehr treffend als Informationsdefizit über die *finale* Bestimmtheit, d. h. über das Erreichen gesteckter Ziele bzw. angestrebter finanzieller Zustände. Aus diesen Gründen soll im weiteren unter dem Verlustpotential finanzieller Ergebnisse für den jeweils betrachteten Entscheidungsträger das *Ausmaß der Gefahr der Unterschreitung einer angestrebten finanziellen Zielgröße (target) z* verstanden werden. Als Synonym für diese Charakterisierung wird im folgenden der Begriff Shortfall-Risiko benutzt. In den eingangs genannten Anwendungsfällen können dies etwa angestrebte Mindestrenditen aus Finanzinvestments oder angestrebte Mindesterfolge aus geschäftspolitischen Aktivitäten sein.

Gegeben die Zufallsgröße  $X$  und der Referenzpunkt  $z$ , zerlegen wir in einem ersten Schritt im Hinblick auf die Quantifizierung des Verlustpotentials (bzw. des Gewinnpotentials) relativ zu  $z$  die Zufallsgröße  $X$  additiv in drei Teile:

$$(1) \quad X = X_+(z) + z - X_-(z) .$$

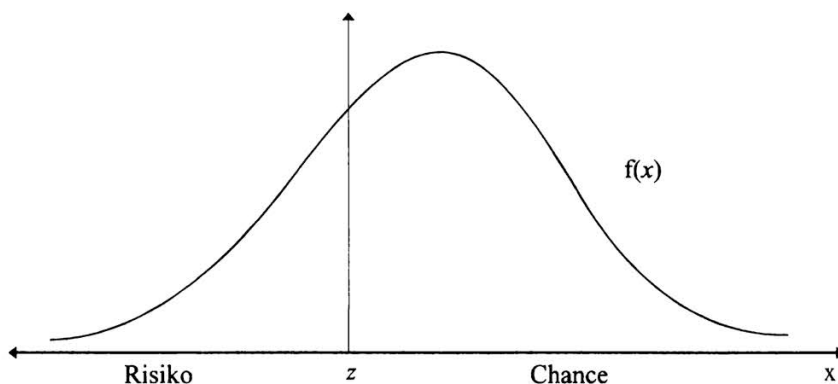


Abbildung 1: Verlust- und Gewinnbereich einer finanziellen Steuerungsgröße relativ zur Zielgröße  $z$

Dabei erfaßt die Zufallsgröße  $X_-(z) = \max(z - X, 0)$  die Höhe der potentiellen Fehlbeträge (shortfall) der die finanzielle Zielgröße  $z$  unterschreitenden Realisationen von  $X$ . Die Zufallsgröße  $X_-(z)$  nimmt nur dann einen positiven Wert an und zwar in Höhe des Fehlbetrages  $z - X$ , wenn die Zielgröße unterschritten wird. Die Zufallsgesetzmäßigkeit von  $X_-(z)$  quantifiziert das Verlustpotential von  $X$  relativ zu  $z$ . Analog beschreibt die Zufallsgröße

$X_+(z) = \max(X - z, 0)$  das Gewinnpotential von  $X$  relativ zum gewählten Referenzpunkt. Sie nimmt nur dann einen positiven Wert in Höhe des Überschreibungsbetrages  $X - z$  an, wenn die Zielgröße überschritten wird. Abbildung 1 illustriert die vorgenommene Zerlegung.

Unter der Annahme, daß die Zufallsgröße  $X$  eine Dichtefunktion  $f(x)$  besitzt, ergeben sich die entsprechenden gemischten „Dichtefunktionen“<sup>27</sup>  $f_-(x)$  bzw.  $f_+(x)$  mit  $F$  als Verteilungsfunktion von  $X$  zu:

$$(2a) \quad f_-(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - F(z) & x = 0 \\ f(z - x) & x > 0 \end{cases}$$

und

$$(2b) \quad f_+(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ F(z) & x = 0 \\ f(x - z) & x > 0 \end{cases}$$

Offenbar besitzen die Dichten eine Unstetigkeitsstelle im Punkt  $x = 0$ .  $X_-(z)$  besitzt eine in Null *links konzentrierte* Verteilung, die Wahrscheinlichkeitsmasse  $P(X_- = 0) = P(X > z) = 1 - F(z)$  ist im Punkt  $x = 0$  konzentriert.  $X_+(z)$  ist ebenfalls in Null links konzentriert, die entsprechende Wahrscheinlichkeitsmasse ist  $P(X_+ = 0) = P(X \leq z) = F(z)$ .

## 2.2 Shortfall-Risikomaße zur Messung des Verlustpotentials einer Zufallsgröße

Im Sinne der gewählten Risikokonzepualisierung beinhaltet  $X_-(z)$  alle relevanten Informationen über das Verlustpotential von  $X$ . Eine (eindimensionale) Maßgröße erhält man jedoch erst durch eine *Bewertung* von  $X_-(z)$ . In Analogie zur Vorgehensweise der statistischen Entscheidungstheorie<sup>28</sup> (Risiko = erwarteter Verlust) führen wir dazu eine Verlust- bzw. Kostenfunktion (loss function, cost function)  $L : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ein, die eine Bewertung der mit verschiedenen Unterschreitungshöhen verbundenen Konsequenzen für den Entscheidungsträger beinhaltet.  $L$  werde dabei im folgenden als nicht-negativ, stetig sowie monoton wachsend angenommen. Damit sind wir in der Lage, das mit  $X$  relativ zur Zielgröße  $z$  für den Entscheidungsträ-

<sup>27</sup> Aufgrund der im Punkt Null konzentrierten Wahrscheinlichkeitsmasse ist an sich mit der Diracschen Deltafunktion zu arbeiten, um eine Dichtefunktion im korrekten Sinne zu erhalten. Zugunsten der größeren Intuitivität der Darstellung wurde jedoch darauf verzichtet.

<sup>28</sup> Vgl. etwa Berger (1985), S. 8 ff.

ger verbundene Risiko  $SR_z(X)$  im Sinne eines Shortfall-Risikos zu definieren durch:

$$(3) \quad SR_z(X) := E[L(X_- (z))] .$$

Unter Berücksichtigung von (2a) folgt in rechentechnischer Hinsicht<sup>29</sup>

$$(4) \quad \begin{aligned} SR_z(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) f_-(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} L(y) f(z-y) dy = \int_{-\infty}^z L(z-y) f(y) dy . \end{aligned}$$

Damit steht ein allgemeiner struktureller Rahmen zur Messung des Verlustpotentials zufallsabhängiger finanzieller Ergebnisse zur Verfügung. Spezifische Maße für das Verlustpotential ergeben sich in Abhängigkeit von der durch den Entscheidungsträger zu treffenden Wahl der Verlustfunktion  $L$ . Im folgenden werden dazu eine Reihe von Möglichkeiten betrachtet.

Eine erste allgemeine Klasse von Verlustfunktionen bilden die Potenzfunktionen  $L(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . In diesem Fall gilt<sup>30</sup>

$$(5) \quad \begin{aligned} SR_z(X) &= E[X_-(z)^n] = E[\max(z-X, 0)^n] \\ &= \int_{-\infty}^z (z-y)^n f(y) dy = LPM_z^n(X) . \end{aligned}$$

Die solchermaßen konstruierten Shortfall-Risikomaße entsprechen mit hin den unteren partiellen Momenten (*Lower Partial Moments*) von  $X$  bezüglich der Zielgröße  $z$ . Grundsätzlich kann jedes beliebige  $n \geq 0$  verwendet werden, allerdings ergeben sich für die Spezialfälle  $n = 0, 1, 2$  Risikomaße mit besonders intuitiven Interpretationsmöglichkeiten. Bei einer Wahl von  $n = 0$  mit<sup>31</sup>  $L(x) = 1$  bedeutet dies, daß sämtliche möglichen Unterschreitungen der finanziellen Zielgröße  $z$  gleich bewertet werden, etwa ein Unterschreiten von  $z$  um eintausend DM ebenso wie eine Verfehlung um eine Million DM. Bei entsprechender Auswertung von (5) ergibt sich demgemäß

$$(6) \quad SW_z(X) := E(X_-^0) = P(X \leq z) ,$$

<sup>29</sup> Unter der zusätzlichen Voraussetzung  $L(0) = 0$ .

<sup>30</sup> Im Fall  $n = 0$  definiert man  $\max(z-X, 0)^0 := I_{(-\infty, z)}(X)$ .

<sup>31</sup> In  $x = 0$  wird dabei  $L$  in stetiger Weise ergänzt.

d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Realisierung von  $X$  die Zielgröße  $z$  nicht überschreitet (**Shortfall-Wahrscheinlichkeit**  $SW_z$ ). Die mögliche Höhe der Unterschreitung hat dabei keine Bedeutung.

Für  $n = 1$  und damit  $L(x) = x$ , werden die möglichen Unterschreitungen von  $z$  proportional zu ihrer Höhe gewichtet und man erhält dann aus:

$$(7) \quad SE_z(X) := E(X_-) = \int_{-\infty}^z (z - y)f(y)dy .$$

Der Ausdruck (7) entspricht dem **Shortfall-Erwartungswert**  $SE_z$ , einem Maß für den mittleren Betrag der Unterschreitung der finanziellen Zielgröße  $z$ .

Wählt man schließlich eine quadratische Verlustfunktion  $L(x) = x^2$ , so werden größere Unterschreitungen von  $z$  entsprechend höher (im Verhältnis der quadrierten Abweichungen) bewertet als geringere. In diesem Falle resultiert:

$$(8) \quad SV_z(X) := E(X_-^2) = \int_{-\infty}^z (z - y)^2 f(y) dy .$$

Der Ausdruck (8) entspricht der **Shortfall-Varianz**  $SV_z$ , einem Maß für die mittlere quadratische Streuung der betragsmäßigen Unterschreitungen der Zielgröße  $z$ .

Alternativ zu Potenzfunktionen können auch andere Funktionen wie Exponential- oder logarithmische Funktionen angesetzt werden. Die Wahl  $L(x) = e^x$  etwa impliziert, daß hohe Unterschreitungen der Zielgröße besonders stark gewichtet werden<sup>32</sup>. Besitzt die Verlustfunktion  $L(x)$  eine Taylorentwicklung (Potenzreihendarstellung) der Form  $L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{(n)}(0)}{n!} x^n$ , so läßt sich<sup>33</sup> die Berechnung des Shortfall-Risikos zurückführen auf den Fall der Shortfall-Risikomaße des *LPM*-Typus durch

$$(9) \quad SR_z(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{(n)}(0)}{n!} LPM_n(X) .$$

Durch einen Abbruch der Taylorreihe nach einem endlichen Glied ergibt sich hieraus die Möglichkeit der Approximation des betreffenden Shortfall-

<sup>32</sup> Dies kann etwa dahingehend gedeutet werden, daß der Entscheidungsträger eine Furcht vor Katastrophenrisiken aufweist.

<sup>33</sup> Unter der weiteren Voraussetzung der Existenz aller unteren partiellen Momente.



Risikomaßes. Eine alternative Art der Approximation, die zu deutlich einfacher strukturierten Resultaten führt, besteht in der stückweise linearen Approximation der Verlustfunktion  $L$  selbst, wie etwa von *Cariño / Fan* (1993) betrachtet.

### 3. SR/E-Kalküle und ihre Beziehungen zum Bernoulli-Prinzip

Die Berücksichtigung von Shortfall-Risikomaßen  $SR_z(X)$  einerseits und Erwartungswert  $E(X)$  andererseits in Entscheidungsmodellen unter Risiko kann daran ansetzen, ob für die aus dem Kalkül resultierende optimale Handlungsalternative garantierbar ist, daß diese ein bestimmtes vorgegebenes Maß an Verlustpotential nicht überschreitet.

Betrachten wir zunächst die folgende Spezifikation eines Präferenzfunktionalen aus der Klasse aller zugelassenen Zufallsvariablen bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

$$(10) \quad \Phi(X) = H(SR_z(X), E(X)) .$$

Dabei quantifiziert die Funktion  $H(x, y)$ ,  $x \geq 0, y \in \mathbb{R}$  den vom Entscheidungsträger durchzuführenden Trade-off zwischen „Risiko“ – hier gemessen durch ein Shortfall-Risikomaß – und „Wert“ – hier quantifiziert durch den Erwartungswert der Zufallsgröße – zum Zwecke der Gewinnung einer Gesamtbewertung und der Ableitung einer optimalen Handlungsalternative. Die durch (10) spezifizierte Klasse von Entscheidungsmodellen kann einerseits als direkte Verallgemeinerung<sup>34</sup> des Ansatzes der *Markowitzschen* Portfolio-Theorie aufgefaßt werden und andererseits als Sub-Klasse der von *Sarin / Weber* (1993) untersuchten Risk-Value-Modelle. Risk-Value-Modelle basieren auf Präferenzfunktionalen der Form  $\Phi(X) = H[R(X), V(X)]$ , wobei  $R$  ein beliebiges Risikomaß und  $V$  ein beliebiges Wertmaß darstellt.

Ist die Funktion  $H(x, y)$  gemäß (10) vollständig spezifiziert, so führt eine Maximierung von (10) über der Menge der zulässigen finanziellen Ergebnisse  $X$  bzw. der zulässigen korrespondierenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Bestimmung der optimalen Alternative:

$$(11) \quad \Phi(X) \rightarrow \max !$$

Bleibt die Funktion  $H(x, y)$  unspezifiziert, so ist zumindest die Untersuchung von Dominanzeigenschaften und die Bestimmung eines „effizienten

<sup>34</sup> Der *Markowitz*-Ansatz selbst ergibt sich durch Wahl der Shortfall-Varianz (8) als Risikomaß unter Durchführung eines Grenzüberganges  $z \rightarrow \infty$ .

Randes“ der innerhalb einer bestimmten Menge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen nicht dominierten Verteilungen möglich. Die Funktion  $H(x, y)$  sollte dabei die Eigenschaft haben, daß sie monoton fallend in  $x$  und monoton steigend in  $y$  ist, und damit eine Risiko-Wert-Dominanzeigenschaft in der üblichen, auch intuitiv plausiblen Art und Weise gewährleistet ist.

Die Maximierung (11) gewährleistet nicht notwendigerweise, daß die optimale Alternative ein bestimmtes vorgegebenes Maß an Verlustpotential einhält. Dies ist problematisch vor allem in empirischen Anwendungsfällen im Bank- oder Versicherungsbereich, bei denen eingegangene Risiken durch Kapital zu unterlegen sind. Dies ist z. B. der Fall bei dem bereits angesprochenen Value-at-Risk-Ansatz oder bei den Solvabilitätsvorschriften für Versicherungsunternehmen. Bei begrenztem Kapital ist in diesen Fällen der Entscheidungsträger gezwungen, bei seiner Auswahlentscheidung ein vorgegebenes Maß an Risiko nicht zu überschreiten und kann somit einen Trade-off zwischen Risiko und Wert nicht beliebig durchführen<sup>35</sup>. In solchen Fällen erscheint es deshalb sinnvoll<sup>36</sup>, als Alternative zu (11) Entscheidungsmodelle der folgenden Form zu betrachten:

$$(12) \quad \begin{array}{l} \Phi(X) \rightarrow \max! \\ \text{unter der Bedingung} \\ SR_z(X) \leq C \end{array}$$

Durch die Nebenbedingung  $SR_z(X) \leq C$  wird hierbei das Verlustpotential – gemessen durch ein Shortfall-Risikomaß – direkt beschränkt. Innerhalb der verbleibenden Alternativen wird diejenige mit dem höchsten resultierenden Präferenzwert ausgewählt. Wählt man als Präferenzmaß  $\Phi(X) = E(X)$  sowie als relevantes Risikomaß die Shortfall-Wahrscheinlichkeit, d. h. betrachtet eine Wahrscheinlichkeitsnebenbedingung des Typus  $P(X \leq z) \leq \epsilon$ , so reduziert sich (12) auf das Safety-First-Prinzip:

$$(13) \quad \begin{array}{l} E(X) \rightarrow \max! \\ \text{unter der Bedingung} \\ P(X \leq z) \leq \epsilon . \end{array}$$

Es ist unmittelbar klar, daß ein Entscheidungsverhalten gemäß (12) bzw. (13) gegen das *Bernoulli*-Prinzip verstößt, da sowohl das Stetigkeits- als

<sup>35</sup> Zur Klarstellung ist hier anzumerken, daß hier nicht die Präferenzen eines individuellen Entscheidungsträgers gemeint sind, die natürlich schwerlich von den angeführten Vorschriften berührt werden. Interpretiert man hingegen  $\Phi(X)$  als die Zielfunktion des Unternehmens, so hat diese die bestehenden exogenen Rahmenbedingungen allerdings zu berücksichtigen.

<sup>36</sup> Vergleiche hierzu die Diskussion in Albrecht (1994 c).

auch das Substitutionsaxiom<sup>37</sup> verletzt sind. Trotzdem haben gerade angesichts der erwähnten empirischen Entscheidungssituationen solche Ansätze eine genuine Bedeutung als Alternative zum *Bernoulli*-Prinzip und haben dementsprechend Anwendungen sowohl in der Portfolio-Theorie<sup>38</sup> als auch in der versicherungsbetrieblichen Risikotheorie<sup>39</sup> erfahren. Eine eigenständige Axiomatisierung des Safety-First-Prinzips wurde von *Bawa* (1978) durchgeführt.

Schließlich ist noch eine weitere Variation denkbar, die zu einer Kontrolle des Verlustpotentials führt und entsprechend in Spezialfällen in der Literatur behandelt wird. Ausgangspunkt ist ein allgemeines Risk-Value-Modell der Form  $H[R(X), V(X)]$ , die Funktion  $H(x, y)$  bleibt unspezifiziert (genügt aber den bereits angesprochenen Dominanzeigenschaften) und wird unter Beachtung eines Risikokontrollkriteriums des Typus  $SR_z(X) \leq C$  maximiert. Formal bedeutet dies

$$(14) \quad \begin{aligned} & H[R(X), V(X)] \rightarrow \max! \\ & \text{unter der Bedingung} \\ & SR_z(X) \leq C. \end{aligned}$$

Voraussetzung für eine solche Vorgehensweise ist die Möglichkeit, den effizienten Rand, der durch das Präferenzfunktional induziert wird, berechnen zu können. Die uns bekannten Anwendungen betreffen alle den Spezialfall

$$(15) \quad \begin{aligned} & H[\text{Var}(X), E(X)] \rightarrow \max! \\ & \text{unter der Bedingung} \\ & P(X \leq z) \leq \epsilon, \end{aligned}$$

d. h. eine Verbindung des Erwartungswert-Varianz-Modells mit der Kontrolle der Shortfall-Wahrscheinlichkeit. Hierzu existieren im Rahmen der Portfolio-Theorie eine Reihe von Arbeiten, wobei entsprechende empirische Anwendungen sich vor allem mit dem Problem der *Asset Allocation*, d. h. der Aufteilung gegebener Mittel auf einzelne Anlageklassen unter Beachtung portfoliotheoretischer Prinzipien, beschäftigen<sup>40</sup>. Auch das Entscheidungsprinzip (14) verstößt aus denselben Gründen wie der Safety-First-Ansatz gegen das *Bernoulli*-Prinzip.

<sup>37</sup> Vgl. zu diesen Axiomen etwa *Bamberg / Coenenberg* (1996), S. 87.

<sup>38</sup> Vgl. etwa *Bawa* (1978).

<sup>39</sup> Vgl. etwa *Albrecht* (1994 c).

<sup>40</sup> Vgl. etwa *Leibowitz / Henriksson* (1989) oder *Leibowitz / Kogelman* (1991).

Hinsichtlich der Untersuchung einer Konsistenz zum *Bernoulli*-Prinzip verbleibt unter den vorgestellten *SR/E*-Kalkülen somit nur die Variante (11) auf der Grundlage eines Präferenzfunktional der Form  $\Phi(X) = H[SR_z(X), E(X)]$ . Die Frage lautet in präzisierter Form, unter welchen Bedingungen ein solches Präferenzfunktional eine identische Präferenzordnung generiert wie das *Bernoulli*-Prinzip, das bekannterweise auf einem Präferenzfunktional der Form  $\Phi(X) = E[u(X)]$  mit einer Risikonutzenfunktion  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  basiert. Generell sei dabei wiederum angenommen, daß  $H(x, y)$  monoton fallend in der ersten und monoton steigend in der zweiten Komponente sei. Gesucht sind mithin allgemein Anforderungen an  $H$  und  $u$ , die gewährleisten, daß für beliebige Zufallsvariable  $X$  und  $Y$  gilt:

$$(16) \quad H[SR_z(X), E(X)] > H[SR_z(Y), E(Y)] \Leftrightarrow E[u(X)] > E[u(Y)].$$

Für den Fall eines Präferenzfunktional vom Mittelwert-Varianz-Typus, d. h.  $\Phi(X) = H[\text{Var}(X), E(X)]$ , sind dabei eine Reihe von Kriterien bekannt, welche die Konsistenz des resultierenden  $\mu$ - $\sigma$ -Prinzips mit dem *Bernoulli*-Prinzip implizieren<sup>41</sup>.

Für den Fall von Shortfall-Risikomaßen des  $LPM_n$ -Typus (5) hat *Fishburn* (1977) hinreichende und notwendige Anforderungen an eine Nutzenfunktion  $u$  hergeleitet, die eine Konsistenz der beiden Konzepte im Sinne von (16) gewährleisten. Seien zur Normierung der Nutzenfunktion  $u$  gegenüber positiven linearen Transformationen die Werte  $u(z) = z$  und  $u(z+1) = z+1$  festgelegt, dann gilt:

*Satz 1 (Fishburn 1977)*: Sei  $H(x, y)$  eine Trade-off-Funktion, die monoton fallend im ersten und monoton wachsend im zweiten Argument ist. Genau dann sind das Entscheidungsprinzip auf der Grundlage des Präferenzfunktional  $\Phi(X) = H[LPM_n(X), E(X)]$  und das *Bernoulli*-Prinzip mit Nutzenfunktion  $u$  konsistent zueinander im Sinne von (16), wenn für  $u$  mit einem Parameter  $k > 0$  gilt:

$$(17) \quad u(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq z \\ x - k \cdot (z - x)^n & \text{für } x < z. \end{cases}$$

Durch Erwartungswertbildung folgt damit für den Erwartungsnutzen  $\Phi(X) = E[u(X)] = E(X) - kLPM_n(X)$ , d. h. die Trade-off-Funktion ist durch  $H(x, y) = y - kx$  gegeben. Der Parameter  $k$  kann als Risikoaversionsparameter interpretiert werden. *Fishburn* (1977, S. 124) nimmt einen Beweis des Satzes vor, indem er die notwendige Gestalt der Nutzenfunktion  $u(x)$  intervallweise durch Vergleich spezifischer Wetten in Form von 1-Punkt- bzw. 2-

<sup>41</sup> Vgl. etwa *Bamberg / Coenenberg* (1996), S. 89 ff.

Punkt-Zufallsvariablen herleitet. Allerdings hat schon *Schneeweiß* (1967, S. 89 f.) die Struktur des Zusammenhangs zwischen *Bernoulli*-Prinzip und Präferenzfunktionalen, die auf metrischen Parametern beruhen, d. h. der Form  $\alpha = E[h(X)]$ , geklärt. Definiert man (linear unabhängige) Funktionen  $h_1(x) = x$  und  $h_2(x) = \max(z - x, 0)^n$ , so ergeben sich als entsprechende metrische Parameter  $\alpha_1 = E(X)$  sowie  $\alpha_2 = LPM_n(X)$  und die Aussage des Satzes 1 ergibt sich aus Theorem 1 in *Schneeweiß* (1967, S. 89 f.) sowie der daran anschließenden Analyse.

Der Satz von *Fishburn* läßt sich nun direkt auf den allgemeinen Fall (16) erweitern, der auf einem Shortfall-Risikomaß der generellen Form  $SR_z(X) = E[L(X_-(z))]$  beruht.

Betrachtet man die Nutzenfunktion (mit einem Parameter  $k > 0$ )

$$(18) \quad u(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq z \\ x - kL(z - x) & \text{für } x < z. \end{cases}$$

so gilt  $E[u(X)] = E(X) - k \int_{-\infty}^z L(z - y)f(y)d(y)$ .

Offenbar ist also das *Bernoulli*-Prinzip unter der Annahme einer Nutzenfunktion  $u(x)$  vom Typus (18) konsistent mit dem Präferenzfunktional der Form

$$(19) \quad \Phi(X) = E(X) - kSR_z(X).$$

Der folgende Satz zeigt nun, daß die Gestalt (18) der Nutzenfunktion (und damit die Gestalt (19) des Präferenzfunktionals) auch eine notwendige Bedingung zur Gewährleistung der Konsistenz beider Konzeptionen im Sinne von (16) ist.

*Satz 2:* Sei  $H(x, y)$  eine Trade-off-Funktion, die monoton fallend im ersten und monoton wachsend im zweiten Argument ist. Genau dann sind das Entscheidungsprinzip auf der Grundlage des Präferenzfunktionals (10) und das *Bernoulli*-Prinzip mit Nutzenfunktion  $u$  konsistent im Sinne von (16), wenn  $u$  die Gestalt (18) mit einem Parameter  $k > 0$  hat (und damit  $H(x, y) = y - kx$  ist).

Definiert man linear unabhängige Funktionen  $h_1(x) = x$  und  $h_2(x) = L[\max(z - x, 0)]$ , so ergeben sich die metrischen Parameter  $\alpha_1 = E(X)$  sowie  $\alpha_2 = SR_z(X)$  und die Aussage des Satzes 2 ergibt sich wiederum aus Theorem 1 in *Schneeweiß* (1967, S. 89 f.).

#### 4. Excess-Chancemaße zur Messung des Gewinnpotentials einer Zufallsgröße

Wird in der entscheidungs- und finanzierungstheoretischen Literatur die Frage nach dem angemessenen Risikomaß schon seit langem intensiv diskutiert, besteht hinsichtlich der Evaluierung des Wertes einer Wahrscheinlichkeitsverteilung finanzieller Ergebnisse in Form des Erwartungswertes  $E(X)$  weitgehende Übereinstimmung<sup>42</sup>. Wenn jedoch sowohl Risiko als auch Wert relativ zu einem Referenzpunkt  $z$  gemessen werden sollen, dann ist die Verwendung des Erwartungswertes insoweit inkonsistent, als dann auch mögliche Unterschreitungen der Zielgröße in das Wertmaß eingehen, mithin auch Informationen enthalten sind, die bereits in die Risikomessung eingehen. Für den Erwartungswert als Wertmaß spricht allgemein, ähnlich wie für die Varianz als Risikomaß, dessen einfache rechentechnische Handhabung. Ein solches Argument ist jedoch für die Frage nach einer adäquaten Konzeptualisierung des Gewinnpotentials nicht befriedigend. Es besteht daher der Bedarf, hinsichtlich der eingeführten Klasse von Shortfall-Risikomaßen strukturell passende, insbesondere das Element der Finalität erfassende, Wertmaße im Sinne von Chancemaßen zu konstruieren.

In vollständiger Analogie zur Quantifizierung des Verlustpotentials kann das Gewinnpotential einer Zufallsgröße relativ zu einer Zielgröße  $z$  konzeptualisiert werden. Hierzu wird eine (nicht-negative, stetige und monoton wachsende) Gewinnfunktion  $G(x) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eingeführt, die eine Bewertung der möglichen Überschreitungen der Zielgröße  $z$  beinhaltet und zu dem Wertmaß

$$(20) \quad EC_z(X) := E[G(X_+(z))]$$

führt. Besitzt  $X$  eine Dichtefunktion  $f(x)$ , so ergibt sich mittels (2b) die folgende rechentechnische Darstellung<sup>43</sup> von (20):

$$(21) \quad \begin{aligned} EC_z(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f_+(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} G(y)f(y-z)dy = \int_z^{+\infty} G(y-z)f(y)dy . \end{aligned}$$

Verwendet man zur Bewertung der Excess-Position wiederum die Potenzfunktionen  $G(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  als Gewinnfunktionen, ergeben sich als Chan-

<sup>42</sup> Vgl. *Sarin / Weber* (1993), S. 136.

<sup>43</sup> Vorauszusetzen ist des weiteren  $G(0) = 0$ .

cemaße die oberen partiellen Momente (**Upper Partial Moments**) der Verteilung von  $X$ :

$$(22) \quad \begin{aligned} EC_z(X) &= E[\max(X - z, 0)^n] \\ &= \int_z^\infty (x - z)^n f(x) dx = UPM_z^n(X) . \end{aligned}$$

Für die Spezialfälle  $n = 0, 1, 2$  erhält man die Excess-Wahrscheinlichkeit, den Excess-Erwartungswert sowie die Excess-Varianz.

In *Albrecht / Maurer / Stephan* (1995) wurde gezeigt<sup>44</sup>, daß zwischen den Shortfall-Risiko- und Excess-Chancemaßen sowie weiteren Lage- bzw. Streuungsmaßen einer Zufallsgröße folgende Zusammenhänge bestehen: Offensichtlich gilt für die Shortfall- bzw. die Excess-Wahrscheinlichkeit ( $P(X = z) = 0$  vorausgesetzt):

$$(23) \quad UPM_z^0 = 1 - LPM_z^0 .$$

Im Fall  $P(X = z) \neq 0$  gilt allgemein  $UPM_z^0 = 1 - LPM_z^0 - P(X = z)$ , was dann relevant werden kann, wenn  $X$  eine nichtstetige Verteilung besitzt<sup>45</sup>. Für den Excess-Erwartungswert gilt des weiteren

$$(24) \quad UPM_z^1 = LPM_z^1 + E(X) - z .$$

Schließlich gilt für die Excess-Varianz

$$(25) \quad UPM_z^2 = \text{Var}(X) + (E(X) - z)^2 - LPM_z^2 .$$

## 5. SR/EC-Kalküle und ihre Beziehung zum Bernoulli-Prinzip

Wie im Falle des Abschnitts 3 können folgende Grundtypen von SR/EC-Entscheidungs-Kalkülen unterschieden werden. Zunächst zählen hierzu Kalküle auf der Basis von Präferenzfunktionalen des Typus

$$(26) \quad \Phi(X) = H[SR_z(X), EC_z(X)] ,$$

<sup>44</sup> Die angeführten Zusammenhänge werden in Abschnitt 6 bestätigt.

<sup>45</sup> Nichtstetige Verteilungen können beispielsweise im Kontext von Investment-Entscheidungen auftreten, wenn Aktienportefeuilles mit Optionspositionen kombiniert werden, vgl. beispielsweise *Möller* (1996), Kapitel Drei.

wobei die Funktion  $H(x, y), x \geq 0, y \geq 0$  wiederum den vom Entscheidungsträger durchzuführenden Trade-off zwischen „Risiko“ – hier gemessen durch ein Shortfall-Risikomaß – und „Wert“ – hier gemessen durch ein Excess-Chancemaß – quantifiziert. Die durch (26) spezifizierte Klasse von Entscheidungsmodellen ist somit wiederum eine Sub-Klasse der Risk-Value-Modelle des *Sarin / Weber*-Typus.

Alternativ können verallgemeinerte Safety-First-Kalküle des Typus

$$(27) \quad \begin{array}{l} EC_z(X) \rightarrow \max! \\ \text{unter der Bedingung} \\ SR_z(X) \leq C \end{array}$$

betrachtet werden. Diese gewährleisten eine direkte Kontrolle des Verlustpotentials. Eine Kompatibilität zum *Bernoulli*-Prinzip ist in diesem Falle nicht gegeben. Im weiteren konzentrieren wir uns deshalb auf Präferenzfunktionale des Typus (26) und deren Konsistenz zum *Bernoulli*-Prinzip.

Gesucht sind mithin allgemein Anforderungen an  $H$  und  $u$ , die gewährleisten, daß für beliebige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  gilt:

$$(28) \quad H[SR_z(X), EC_z(X)] > H[SR_z(Y), EC_z(Y)] \Leftrightarrow E[u(X)] > E[u(Y)] .$$

$H(x, y)$  werde hierbei wiederum als monoton fallend im ersten Argument und monoton steigend im zweiten Argument angenommen.

Betrachten wir die (normierte) Nutzenfunktion (mit einem Parameter  $k > 0$ )

$$(29) \quad u(x) = \begin{cases} G(x - z) & \text{für } x \geq z \\ -kL(z - x) & \text{für } x < z , \end{cases}$$

so gilt  $E[u(X)] = \int_z^\infty G(y - z)f(y)dy - k \int_{-\infty}^z L(z - y)f(y)d(y) .$

Offenbar ist also das *Bernoulli*-Prinzip unter der Annahme einer Nutzenfunktion  $u(x)$  vom Typus (29) konsistent mit dem Präferenzfunktional der Form

$$(30) \quad \Phi(X) = EC_z(X) - kSR_z(X) .$$

Daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, zeigt der folgende Satz.

*Satz 3:* Sei  $H(x, y)$  eine Trade-Off-Funktion, die monoton fallend im ersten und monoton wachsend im zweiten Argument ist. Genau dann sind das



Entscheidungsprinzip auf der Grundlage des Präferenzfunktional (26) und das *Bernoulli*-Prinzip mit Nutzenfunktion  $u$  konsistent im Sinne von (28), wenn  $u$  die Gestalt (29) mit einem Parameter  $k > 0$  hat (und damit  $H(x, y) = y - kx$  ist).

Zum Beweis des Satzes betrachten wir linear unabhängige Funktionen  $h_1(x) = G(\max(x - z, 0))$  und  $h_2(x) = L(\max(z - x, 0))$ . Die hieraus resultierenden Parameter sind  $\alpha_1 = EC_z(X)$  und  $\alpha_2 = SR_z(X)$  und die Aussage des Satzes ergibt sich wiederum aus Theorem 1 in *Schneeweiß* (1967, S. 89 f.).

## 6. Diskussion ausgewählter SR/EC-Kalküle

Im folgenden konzentrieren wir uns<sup>46</sup> auf SR/EC-Kalküle, die auf einem Präferenzfunktional des Typus ( $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0$ )

$$(31) \quad \Phi(X) = H[LPM_n(X), UPM_m(X)]$$

basieren. Als Maße für das Shortfall-Risiko werden somit Lower Partial Moments und als Excess-Chancemaße die Upper Partial Moments der Verteilung von  $X$  verwendet. Dabei diskutieren wir mögliche Verläufe der Nutzenfunktion  $u$ , wenn die Ordnung  $m$  des Excess-Moments und die Ordnung  $n$  des Shortfall-Moments variieren. Von besonderem Interesse ist dabei die Frage, inwiefern die jeweilige Risikonutzenfunktion risikoaverses, risikoneutrales oder risikofreudiges Entscheidungsverhalten abbildet. Global (strikt) risikoaverses Entscheidungsverhalten korrespondiert dabei mit einer (strikt) konkaven, global risikoneutrales mit einer linearen und global (strikt) risikofreudiges mit einer (streng) konvexen Risikonutzenfunktion<sup>47</sup>.

Der Einfachheit wegen sei bei den folgenden Betrachtungen die Zielgröße  $z$  stets gleich 0 gesetzt. Gemäß Satz 3 haben die betrachteten Nutzenfunktionen daher generell die Form

$$(32) \quad u(x) = \begin{cases} x^m & \text{für } x \geq 0 \\ k(-1)^{n+1}x^n & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

*Fall 1: Risikomaß  $LPM_0(X)$*

Betrachtet man zunächst die Konstellation  $m = n = 0$ , also die Wahl der Excess-Wahrscheinlichkeit als Chancemaß und der Shortfall-Wahrschein-

<sup>46</sup> Die nachfolgende Diskussion erfolgt aus analytischer Sicht. Sie ist zu ergänzen um entsprechende Analysen eines empirischen Entscheidungsverhaltens. Dies ist eine Fragestellung, der im bereits angesprochenen SFB-Projekt nachgegangen werden soll.

<sup>47</sup> Vgl. hierzu etwa *Huang / Litzenberger* (1988), S. 17 f.

lichkeit als Risikomaß, nimmt die Nutzenfunktion  $u$  nur drei Werte an: für  $x < 0$  ist sie konstant gleich  $-k$ , für  $x = 0$  ist sie 0 und für  $x > 0$  ist sie konstant gleich 1. Der zugemessene Nutzen richtet sich somit allein danach, ob die Realisation positiv oder negativ ist.

Für das korrespondierende Präferenzfunktional  $H$  gilt im Falle, daß  $X$  einer stetigen Verteilung folgt, wegen  $P(X > 0) = 1 - P(X < 0)$ :

$$(33) \quad \begin{aligned} H[R(X), V(X)] &= P(X > 0) - k \cdot P(X < 0) \\ &= 1 - (k + 1) \cdot P(X < 0) \\ &= (k + 1) \cdot P(X > 0) - k . \end{aligned}$$

$H$  beinhaltet daher lediglich eine Messung des Risikos *oder* der Chance, nicht aber einen Trade-Off zwischen diesen beiden Größen. Eine solche Wahl der Meßgrößen für Chance und Risiko erscheint ökonomisch somit wenig zweckmäßig.

Für  $m = 1$ , also bei Wahl des Excess-Erwartungswertes als Chancemaß, verläuft die Nutzenfunktion im Bereich der positiven Abszisse linear, aufgrund der vorgenommenen Normierung mit Steigung 1.

Für  $m = 2$ , der Wahl der Excess-Varianz als Chancemaß, verläuft die Nutzenfunktion im Bereich der positiven Abszisse quadratisch.

Abbildung 2 illustriert den jeweiligen Verlauf dieser Risikonutzenfunktionen, wenn der Parameter  $k = 1$  gesetzt wird.

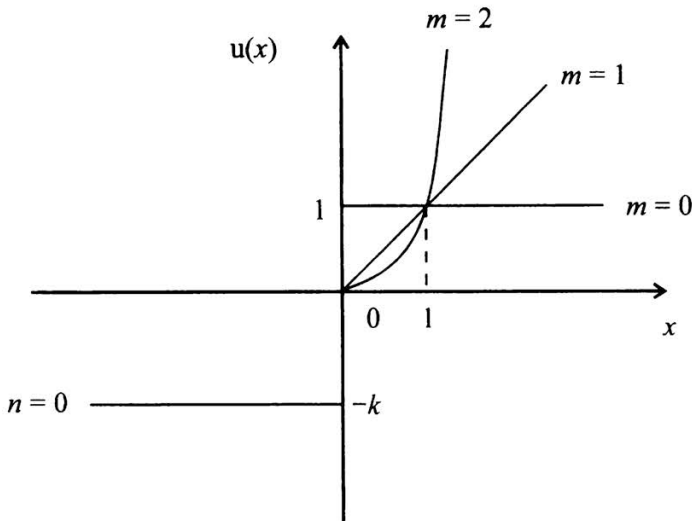


Abbildung 2: Verlauf der Risikonutzenfunktion für  $n = 0$  und  $m = 0, 1, 2$

Fall 2: Risikomaß  $LPM_1(X)$ 

Zunächst sei als Chancemaß wieder die Excess-Wahrscheinlichkeit  $m = 0$  betrachtet. In diesem Fall verläuft die Risikonutzenfunktion  $u$  links des Nullpunktes linear mit Steigung  $k$ , während sie rechts davon konstant den Wert 1 annimmt. Nun wird die Chance pauschal bewertet, während das Risiko mit seinem Ausmaß gewichtet wird.

Wählt man den Excess-Erwartungswert als Chancemaß ( $m = 1$ ), so verläuft die Risikonutzenfunktion in beiden Bereichen linear, für  $x > 0$  aufgrund der Normierung mit Steigung 1, für  $x < 0$  mit Steigung  $k$ . Die Konvexität oder Konkavität von  $u$  hängt daher von der getroffenen Wahl für den Risikoaversionsparameter  $k$  ab. Für  $k < 1$  besitzt die Nutzenfunktion eine konvexe Gestalt, eine solche Wahl repräsentiert demnach einen global risikofreudigen Entscheidungsträger. Wird  $k = 1$  gewählt, so verläuft  $u$  linear mit konstanter Steigung 1. Tatsächlich gilt aufgrund Beziehung (24) in diesem Fall

$$(34) \quad \begin{aligned} H[R(X), V(X)] &= UPM_2^1(X) - LPM_2^1(X) \\ &= E(X) - z, \end{aligned}$$

so daß hier keinerlei *Trade-Off* zwischen Risiko und Chance stattfindet, sondern allein der Erwartungswert zur Beurteilung herangezogen wird. Eine Wahl von  $k = 1$  impliziert daher global risikoneutrales Entscheidungsverhalten.

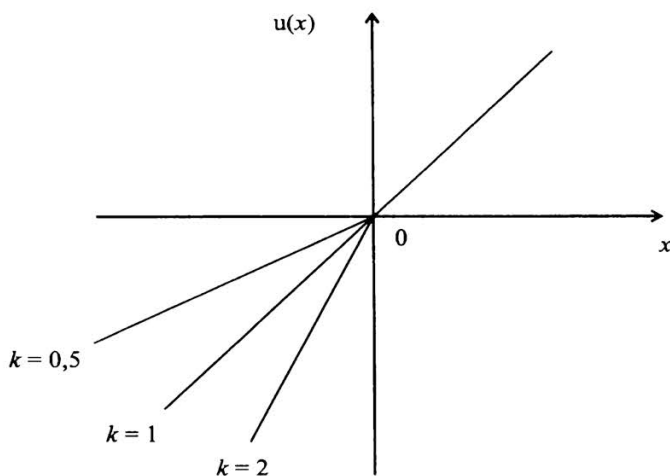


Abbildung 3: Verlauf der Risikonutzenfunktion für verschiedene Parameter  $k$  im Fall  $n = m = 1$ .

Schließlich resultiert für  $k > 1$  eine insgesamt konkave Gestalt der Risikonutzenfunktion, lediglich für diese Wahl also wird eine globale Risikoaversion abgebildet. Abbildung 3 illustriert nochmals die Abhängigkeit der Nutzenfunktion von  $k$  bei Verwendung der jeweils ersten unteren und oberen Momente.

Wird als Chancemaß die Excess-Varianz gewählt, so verläuft die Nutzenfunktion im positiven Bereich wie die Normalparabel, also konvex und repräsentiert dort risikofreudiges Entscheidungsverhalten, während für  $x < 0$  Risikoneutralität vorliegt. Abbildung 4 zeigt die entsprechenden Funktionsverläufe von  $u$  für unterschiedliche Excess-Momente, wobei der Risikoaversionsparameter  $k = 1$  gesetzt wurde.

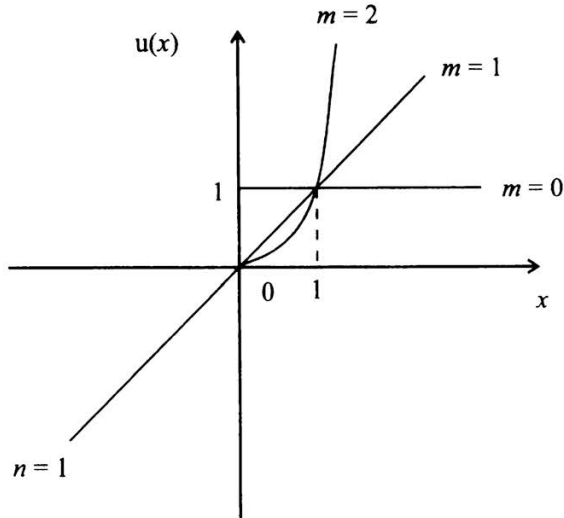


Abbildung 4: Verlauf der Risikonutzenfunktion für  $n = 1$  und  $m = 0, 1, 2$ .

### Fall 3: Risikomaß $LPM_2(X)$

Wird als Risikomaß die Shortfall-Varianz herangezogen, so verläuft die Nutzenfunktion  $u$  im Bereich der negativen Abszisse wie der linke Ast einer nach unten geöffneten Parabel, also konkav. Bei Kombination mit der Excess-Wahrscheinlichkeit können wieder ähnliche Aussagen wie bereits im Fall 2 ( $n = 1$  und  $m = 0$ ) getroffen werden, lediglich liegt für  $x < 0$  nun risikoaverses Verhalten vor. Bei Wahl des Excess-Erwartungswertes als Chancemaß spiegelt die Risikonutzenfunktion im negativen Bereich risikoaverses, im positiven Bereich risikoneutrales Entscheidungsverhalten wider.

Wählt man schließlich die Excess-Varianz als Chancemaß, so ist die Risikonutzenfunktion im positiven Abszissenbereich konvex und repräsentiert dort risikofreudiges Verhalten, während für negative Werte von  $x$  Risikoaversion vorliegt. Abbildung 5 illustriert dieses Verhalten der Risikonutzenfunktion wiederum für  $k = 1$ .

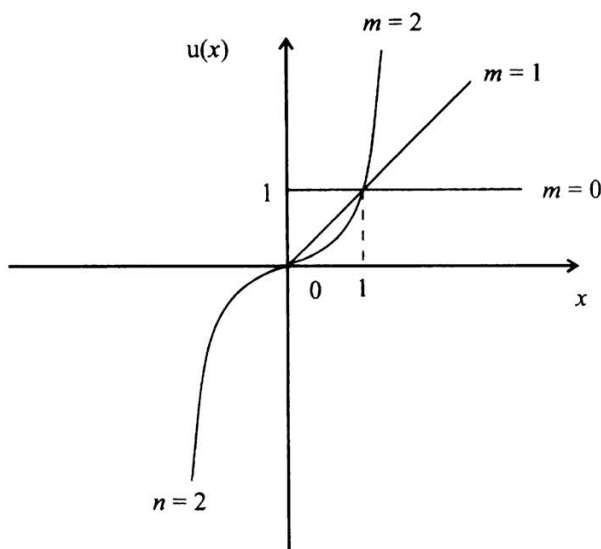


Abbildung 5: Verlauf der Risikonutzenfunktion für  $n = 2$  und  $m = 0, 1, 2$ .

## 7. Schlußbetrachtungen

In der vorliegenden Arbeit wurden  $SR/E$ - sowie  $SR/EC$ -Entscheidungskalküle zur Fundierung von Entscheidungen unter Risiko untersucht. Als Risikomaße wurden hierbei (generelle) Shortfall-Risikomaße relativ zu einer Zielgröße  $z$  betrachtet, als Wertmaß alternativ der Erwartungswert der zu bewertenden Verteilung sowie (generelle) Excess-Chancemaße. Zur Gewinnung der generellen Shortfall-Risikomaße wurden dabei die potentiellen Unterschreitungsbeiträge durch eine Verlustfunktion  $L$  bewertet und anschließend eine Erwartungswertbildung durchgeführt. Analog wurden zur Gewinnung der generellen Excess-Chancemaße die potentiellen Überschreitungsbeiträge durch eine Gewinnfunktion  $G$  bewertet und ebenfalls einer anschließenden Erwartungswertbildung unterzogen.  $SR/E$ - bzw.  $SR/EC$ -Entscheidungskalküle vom Typus des (verallgemeinerten) Safety First-Prinzips gewährleisten eine direkte Kontrolle des Verlustpotentials, sind

aber nicht kompatibel zum *Bernoulli*-Prinzip. Hingegen kann eine Konsistenz von SR/E- bzw. SR/EC-Kalkülen in Form von Risk/Value-Modellen des *Sarin/Weber*-Typus in Spezialfällen nachgewiesen werden. Der Trade-off zwischen Risiko  $R(X)$  und Wert  $V(X)$  muß dabei zwingend von der Form

$$(35) \quad H[R(X), V(X)] = V(X) - kR(X)$$

mit einem Risikoaversionsparameter  $k > 0$  sein.

In Verallgemeinerung von *Fishburn* (1977), der  $LPM_z^n/E$ -Kalküle betrachtet, wurden weiterhin  $LPM_z^n/UPM_z^m$ -Kalküle analysiert. Verlust- sowie Gewinnfunktionen entsprechen hier einfachen Potenzfunktionen. Verlangt man, daß die sich ergebenden Präferenzfunktionale im gesamten Bereich ein risikoaverses Entscheidungsverhalten abbilden, so reduziert sich die mögliche Auswahl auf Funktionale der Form

$$(36) \quad H[R(X), V(X)] = UPM_z^1(X) - k \cdot LPM_z^1(X)$$

mit  $k > 1$ .

Diese lassen sich jedoch aufgrund der Beziehung auch in der Form

$$(37) \quad H[R(X), V(X)] = E(X) - (k - 1) \cdot LPM_z^1(X) - z$$

schreiben und stellen damit einen Spezialfall der bereits in *Fishburn* (1977) betrachteten Funktionale dar, die den Erwartungswert als Wertmaß verwenden.

Unter der zusätzlichen Bedingung der globalen Risikoaversion lassen sich somit  $LPM_z^n/UPM_z^m$ -Modelle auf  $LPM_z^n/E$ -Modelle zurückführen.

Jedoch ist das Beharren auf der Eigenschaft der globalen Risikoaversion gerade im Kontext der Evaluation von Risiko- und Chancepotentialen zu hinterfragen. Hier ist unseres Erachtens eher ein Entscheidungsverhalten naheliegend<sup>48</sup>, das einerseits versucht, das Risikopotential möglichst gering zu halten, das Chancepotential jedoch möglichst groß zu gestalten. Aus dieser Charakterisierung resultiert ein Verlauf der Nutzenfunktion, der für  $x < z$  konkav (in diesem Bereich lokale Risikoaversion impliziert), für  $x > z$  jedoch konvex ist (in diesem Bereich lokale Risikofreude impliziert).

Es wäre somit etwa an die folgenden Präferenzfunktionale zu denken:

$$(38) \quad H[R(X), V(X)] = UPM_z^1(X) - k \cdot LPM_z^2(X)$$

<sup>48</sup> Diese intuitiv plausible These ist noch durch empirische Evidenz zu stützen. Auch dies ist eine der Teilfragestellungen, die im Rahmen des bereits angesprochenen SFB-Projekts untersucht werden sollen.

bzw.

$$(39) \quad H[R(X), V(X)] = UPM_z^2(X) - k \cdot LPM_z^2(X) .$$

Gemäß (25) läßt sich dabei (39) alternativ auch formulieren als

$$(40) \quad H[R(X), V(X)] = \text{Var}(X) + (E(X) - z)^2 - (k + 1) \cdot LPM_z^2(X) .$$

Sowohl bei (40) als auch bei (41) ergeben sich damit Entscheidungsprinzipien, die sich nicht unter die von *Fishburn* (1977) untersuchten  $LPM_z^n/E$ -Kalküle subsumieren lassen. Mit diesem Ausblick auf Fragestellungen, die im Rahmen weiterer Untersuchungen eingehender behandelt werden sollen, beschließen wir unsere Ausführungen.

### Literatur

- Albrecht, P.* (1982): Gesetze der großen Zahlen und Ausgleich im Kollektiv – Bemerkungen zu Grundlagen der Versicherungsproduktion, *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft* 71, S. 501 - 538.
- (1987): Ausgleich im Kollektiv und Verlustwahrscheinlichkeit, *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft* 76, S. 95 - 117.
  - (1992): Zur Risikotransformationstheorie der Versicherung: Grundlagen und ökonomische Konsequenzen, Karlsruhe.
  - (1994a): Zur Konzeptualisierung von Risiko und Chance mit Anwendungen in den Finanz- und Versicherungsmärkten, in: Hübner, U.; E. Helten, P. Albrecht (Hrsg.), *Recht und Ökonomie der Versicherung*, Karlsruhe, S. 1 - 22.
  - (1994b): Dimensionen des versicherungstechnischen Risikos, in: Hesberg, D., M. Nell, W. Schott (Hrsg.): *Risiko, Versicherung, Markt*, Karlsruhe, S. 325 - 339.
  - (1994c): Gewinn und Sicherheit als Ziele der Versicherungsunternehmung: Bernoulli-Prinzip vs. Safety first-Prinzip, in: Schwebler, R. (Hrsg.): *Dieter Farny und die Versicherungswirtschaft*, Karlsruhe, S. 1 - 18.
  - (1998): Risikoadjustierte Performancesteuerung in der Schadenversicherung, erscheint in: Oehler, A. (Hrsg.): *Credit Risk und VaR-Alternativen*, Stuttgart.
- Albrecht, P. / Bährle, H. W. F. / König, A.* (1997): Value-at-Risk: Eine risikothoretische Analyse der konzeptionellen Grundlagen mit Folgerungen für die Risikokontrolle der Kapitalanlage von Versicherungsunternehmen, *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft* 86, S. 81 - 101.
- Albrecht, P. / Maurer, R. / Stephan, T. G.* (1995a): Ertrag und Risiko rollierender Wertsicherungsstrategien mit Optionen, *Die Bank*, Heft 4, S. 238 - 241.
- (1995b): Shortfall-Performance rollierender Wertsicherungsstrategien, *Finanzmarkt und Portfolio Management* 9, S. 197 - 209.

- Arzac, E. R. / Bawa, V. S.* (1977): Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety-First Investors, *Journal of Financial Economics* 4, S. 277 - 288.
- Bamberg, G. / Coenenberg, A. G.* (1996): Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 9. Aufl., München.
- Basler Ausschuß für Bankenaufsicht (1996): Änderung der Eigenkapitalvereinbarung zur Einbeziehung der Marktrisiken, Basel, Januar.
- Bawa, V. S.* (1978): Safety first, stochastic dominance, and optimal portfolio choice, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, S. 255 - 271
- Bawa, V. S. / Lindenberg, E. B.* (1977): Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework, *Journal of Financial Economics* 5, S. 189 - 200.
- Berger, J. O.* (1985): Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, 2. Aufl., New York u. a.
- Bookstaber, R. / Clarke, R.* (1984): Option Portfolio Strategies: Measurement and Evaluation, *Journal of Business* 57, S. 469 - 492.
- (1985): Problems in Evaluating the Performance of Portfolios with Options, *Financial Analysts Journal*, January / February, S. 48 - 62.
- Fishburn, P. C.* (1977): Mean Risk Analysis with Risk Associated with Below Target Returns, *American Economic Review* 67, S. 116 - 126.
- Harlow, W. V.* (1991): Asset Allocation in a Downside-Risk Framework, *Financial Analysts Journal*, September / October, S. 28 - 40.
- Harlow, W. V. / Rao, R. K. S.* (1989): Asset Pricing in a Generalized Mean Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24, S. 285 - 311.
- Helten, E.* (1991): Die Erfassung und Messung des Risikos, in: Grosse, W. / Müller-Lutz, H. L. / Schmidt, R. (Hrsg.): *Versicherungszyklopädie*, Band 2, 4. Aufl., Wiesbaden, S. 125 - 197.
- Hogan, W. W. / Warren, J. M.* (1972): Computation of the Efficient Boundary in the E-S Portfolio Selection Model, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7, S. 1881 - 1897.
- (1974): Towards the Development of an Equilibrium Capital-Market Model Based on Semivariance, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 9, S. 1 - 11.
- Huang, C.-F. / Litzenberger, R. H.* (1988): *Foundations for Financial Economics*, New York u. a.
- Jorion P.* (1997): *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, Chicago.
- König, A. / Maurer, R. / Schradin, H. R.* (1997): Analyse und Bewertung des Ausfallrisikos bei nicht börsengehandelten bedingten Finanzderivaten, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Sonderheft Finanzierung*, S. 65 - 79.
- Laughunn, D. J. / Payne J. W. / Crum, R.* (1980): Managerial Risk Preferences for Below-Target>Returns, *Management Science* 26, S. 1238 - 1249.
- Lee, W. Y. / Rao, R. K. S.* (1988): Mean Lower Partial Moment Valuation and Lognormally Distributed Returns, *Management Science* 34, S. 446 - 453.



- Leibowitz, M. L. / Henriksson, R. D.* (1989): Portfolio Optimization with Shortfall Constraints: A Confidence-Limit Approach to Managing Downside Risk, *Financial Analysts Journal*, March / April, S. 34 - 41.
- Leibowitz, M. L. / Kogelman, S.* (1991): Asset Allocation under Shortfall Constraints, *Journal of Portfolio Management*, Winter 1991, S. 18 - 23.
- Levy, H. / Sarnat, M.* (1972): Safety First – An Expected Utility Principle, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7, S. 1829 - 1834.
- Mao, J. C. T.* (1970): Survey of Capital Budgeting: Theory and Practice, *Journal of Finance* 25, S. 349 - 360.
- Möller, M.* (1996): Analytische Auswertung und Steuerung von Optionspositionen, Dissertationsschrift, Universität Mannheim.
- Ramsay, C. M.* (1994): Percentile Pension Cost Methods: A New Approach to Pension Valuations, *Transactions of the Society of Actuaries* 46, S. 351 - 424.
- Roy, A. D.* (1952): Safety First and the Holding of Assets, *Econometrica* 20, S. 431 - 449.
- Sarin, R. K. / Weber, M.* (1993): Risk-value models, *European Journal of Operational Research* 70, S. 135 - 149.
- Schneeweiß, H.* (1967): Entscheidungskriterien bei Risiko, Berlin u. a.
- Schradin, H. R.* (1994): Erfolgsorientiertes Versicherungsmanagement, Karlsruhe.
- Stephan, T. G.* (1995): Strategische Asset Allocation von Lebensversicherungsunternehmen, Karlsruhe.
- Thurmayr, G.* (1992): Vorsichtsprinzip und Pensionsrückstellungen, Wiesbaden.
- Zimmermann, H.* (1994): Editorial: Reward-to-Risk, *Finanzmarkt und Portfolio Management* 8, S. 1 - 6.
- Zimmermann, J.* (1991): Zur Bewertung von Rückstellungen aus risikotheorietischer Sicht, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 43, S. 759 - 782.

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Entscheidungskalküle behandelt, die auf einer Quantifizierung des Shortfall-Risiko sowie der Excess-Chance relativ zu einer (monetären) Referenz-Zielgröße beruhen. Im Zentrum der Analyse steht dabei die Möglichkeit einer nutzentheoretischen Fundierung solcher Modelle auf der Grundlage des Bernoulli-Prinzips. Eine Reihe von Spezialfällen der allgemeinen Modellkonzeption werden eingehend untersucht und die in der Literatur dokumentierten ökonomischen Anwendungen dargestellt.

## Abstract

In the present paper decision models are examined which are based on the quantification of shortfall risk and as well excess chance with respect to a (financial) target.

The focus of the paper is on the utility theoretic foundation of the respective models on the basis of the von Neuman- Morgenstern approach. A number of special cases of the general model conception are analysed in detail and as well economic applications treated in the literature are presentetd.

*JEL-Klassifikation: D 81, M 23*