

## **Chaos und Stabilität in einem Beschäftigungsmodell mit rationalen Erwartungen<sup>1</sup>**

Von Carsten Lange und Markus Pasche

Der folgende Beitrag untersucht das dynamische Verhalten eines nichtlinearen Beschäftigungsmodells mit rationalen Erwartungen. Im Gegensatz zu linearisierten Modellen tritt bei bestimmten Parameterkonstellationen chaotisches Verhalten auf. Vor diesem Hintergrund werden Grundlagen der Chaostheorie skizziert und Schlußfolgerungen für die ökonomische Theoriebildung abgeleitet. Dabei wird soweit wie möglich auf Verfahren der höheren Mathematik verzichtet. Stattdessen wird die Modellodynamik mit Hilfe von Computer-Simulationen transparent gemacht.

### **1. Problemstellung**

In der ökonomischen Analyse wird häufig mit linearisierten Modellen gearbeitet. Werden jedoch Nichtlinearitäten berücksichtigt, so kann im Gegensatz zu linearen Modellen ein dynamisches Phänomen auftreten, das in der aktuellen Diskussion zunehmend Bedeutung gewinnt: das Chaos. Für die Behandlung chaotischer Phänomene in ökonomischen Modellen seien *Baumol / Benhabib* 1989, *Lorenz* 1989, *Day* 1982 und *Stahlecker / Schmidt* 1991 genannt.

In diesem Beitrag soll beispielhaft anhand eines einfachen nichtlinearen Beschäftigungsmodells mit rationalen Erwartungen demonstriert werden, was sich hinter dem Begriff Chaos verbirgt, unter welchen Bedingungen es auftritt und welche Probleme sich daraus für die ökonomische Theoriebildung ergeben. Bereits *Lipsey* vermutete eine nichtlineare Beziehung der ökonomischen Variablen des Arbeitsmarktes, verwendete jedoch ein linearisiertes Modell, da er der Meinung war, daß dadurch „. . . all of the observed phenomena . . .“ (*Lipsey* 1960, 13) erklärt werden können. Daß linearisierte Modelle längst nicht allen beobachtbaren Phänomenen gerecht werden können, soll im folgenden gezeigt werden. Im Vordergrund steht dabei nicht die Trade-Off-Diskussion, sondern die Analyse des Zeitpfades, welcher mit Hilfe von Simulationen nachvollzogen wird.

---

<sup>1</sup> Die Verfasser danken einem anonymen Referee für wertvolle Hinweise zu einer ersten Fassung dieses Beitrags.

## 2. Simulation eines nichtlinearen Beschäftigungsmodells

### 2.1 Das Modell

Bevor die Simulationsergebnisse diskutiert werden, soll hier das zugrunde liegende Modell<sup>2</sup> kurz vorgestellt werden. Das Modell besteht aus vier Verhaltensgleichungen:

$$(1) \quad \hat{w}_t = \hat{q}_t + \gamma \hat{P}_t^e + \beta (u^* - u_{t-1})^3 \text{ mit } \beta > 0, 0 < \gamma < 1 \text{ (Lohngleichung).}$$

Durch die Lohngleichung wird zum Ausdruck gebracht, daß die Lohnsteigerungsrate der Periode  $t$  ( $\hat{w}_t$ ) determiniert ist durch die Summe aus der relativen Änderung der Arbeitsproduktivität ( $\hat{q}_t$ ), der mit einem Proportionalitätsfaktor ( $\gamma$ ) gewichteten erwarteten Inflationsrate ( $\hat{P}_t^e$ ), sowie der mit 3 potenzierten und mit  $\beta$  gewichteten Differenz aus natürlicher Arbeitslosenquote<sup>3</sup> ( $u^*$ ) und der in der zurückliegenden Periode realisierten Arbeitslosenquote ( $u_{t-1}$ ). Wie die Gleichung zeigt, können die Arbeiter bzw. die Gewerkschaften als ihre Vertreter c. p. bei einer Erhöhung der Arbeitsproduktivität eine vollständige Lohnanpassung durchsetzen. Der Einfluß der erwarteten Inflationsrate ( $\hat{P}_t^e$ ) auf die Lohnfindung verdeutlicht, daß die Gewerkschaften auf inflationsbedingte Reallohnsenkungen nicht ex post reagieren, sondern ihnen durch entsprechende Nominallohngleichungen zuvorzukommen versuchen (vgl. *Geigant* 1985, 158). Eine vollständige Umsetzung von Inflationserwartungen in Lohnsteigerungen gelingt ihnen aber hier annahmegemäß nicht ( $\gamma < 1$ ), was u. a. auf institutionelle Hemmnisse zurückzuführen sein kann<sup>4</sup>. Im letzten Summanden wird der Einfluß der Arbeitsmarktlage der abgelaufenen Periode auf die Lohnsteigerungsrate der beginnenden Periode deutlich. Überschußnachfrage nach Arbeit ( $(u^* - u_{t-1}) > 0$ ) führt c. p. aufgrund größerer Verhandlungsmacht der Gewerkschaften<sup>5</sup> zu einem überproportionalen Anstieg der Lohnsteigerungsrate, während es umgekehrt ( $(u^* - u_{t-1}) < 0$ ) c. p. zu überproportionalen Lohnsenkungen kommt. Der Proportionalitätsfaktor ( $\beta$ ) und der Exponent<sup>6</sup> bestimmen die Intensität dieses Einflusses.

<sup>2</sup> Ähnliche, aber linearisierte Beschäftigungsmodelle finden sich z. B. bei *Fischer* 1977, 191 ff., *Pohl* 1981, 155 ff., *Lange* 1989, 216 ff.

<sup>3</sup> Die natürliche Arbeitslosenquote soll hier der Einfachheit halber i. S. von *Lipsey* als friktionelle Arbeitslosigkeit interpretiert werden, bei der „... the number of unemployed will be matched by an equal number of unfilled vacancies.“ (*Lipsey* 1960, 14). D. h., wenn die Differenz zwischen  $u^*$  und  $u$ , gleich Null ist, sind Angebot und Nachfrage am Arbeitsmarkt gerade ausgeglichen.

<sup>4</sup> *Fischer* zeigt in einem Beschäftigungsmodell, daß bei mehrperiodigen Arbeitskontrakten mit unterschiedlichen Restlaufzeiten die erwartete Inflationsrate nur unvollständig in Lohnerhöhungen umgesetzt werden kann (vgl. *Fischer* 1977, 191 ff.).

<sup>5</sup> Diese Argumentation ist auf die Collective-Bargaining-Hypothese zurückzuführen (vgl. z. B. *Lipsey* 1960, 1 ff.).

<sup>6</sup> Als Exponent wurde hier 3 gewählt, da dies der kleinste ganzzahlige Exponent ist, durch den der oben unterstellte überproportionale Einfluß des Arbeitsmarktes auf  $\hat{w}_t$  sichergestellt wird.

Die hier unterstellte überproportionale Reaktion der Lohnsteigerungsrate auf eine Änderung der Arbeitsmarktlage<sup>7</sup> ist nicht abwegig. Durch geringfügige Arbeitsangebotsüberschüsse werden die Gewerkschaften kaum zu größeren Zugeständnissen bei den Lohnverhandlungen bewegt werden, zumal ihre Mitglieder in erster Linie aus Beschäftigten und nicht aus Arbeitslosen bestehen. Wird der Arbeitsangebotsüberschuß jedoch größer, so könnten die Gewerkschaften schon wegen des zunehmenden sozialen Drucks gezwungen sein, deutliche Lohnzugeständnisse zu machen. Umgekehrt werden sich Unternehmen bei einem Nachfrageüberschuß gegenseitig mit immer höheren Lohnangeboten übertreffen. Je stärker die Abweichungen von der natürlichen Arbeitslosigkeit sind, desto intensiver wird der Wettbewerbsdruck sein. Dadurch können in Abhängigkeit vom Arbeitsnachfrageüberschuß überproportionale Erhöhungen der Lohnsteigerungsrate ausgelöst werden (vgl. *Phillips* 1958, 283; *Rose* 1967, 158).

$$(2) \quad \hat{P}_t = \hat{w}_t - \hat{q}_t \text{ (Preisgleichung).}$$

Die Preisgleichung zeigt, daß die Unternehmer einen Lohndruck abfangen können, indem sie ihre Preise mit einer Rate, die der Differenz zwischen Nominallohnerhöhung und Produktivitätswachstum entspricht, erhöhen. Dadurch bleibt die Relation zwischen Lohnsatz und Wertgrenzprodukt der Arbeit stets gleich.

$$(3) \quad \Delta u_t = -\zeta (\hat{M}_t^{ex} - \hat{P}_t) \text{ mit } \zeta > 0 \text{ (Nachfragegleichung).}$$

Durch die Nachfragegleichung wird zum Ausdruck gebracht, daß in diesem Modell eine Geldmengenwachstumsrate  $\hat{M}_t^{ex}$ , die größer als die Inflationsrate  $\hat{P}_t$  ist, zu einer Erhöhung der Nachfrage auf den Gütermärkten (*Real-kasseneffekt*) und so zur Verringerung der Arbeitslosenquote führt. Die Geldmengenwachstumsrate  $\hat{M}_t^{ex}$  ist exogen und fungiert hier als Instrumentvariable der Wirtschaftspolitik.

$$(4) \quad \hat{P}_t^e = \hat{P}_t \text{ für alle } t \text{ (Inflationserwartungen).}$$

Als Inflationserwartungshypothese sollen hier rationale Erwartungen i. S. von *Muth* unterstellt werden. D.h. rationale Erwartungen sind „... essentially the same as the predictions of the relevant economic theory“. (*Muth* 1961, 316). Es läßt sich zeigen, daß unter Annahmen, die zum Gedankengut fast aller Modelle mit rationalen Erwartungen geworden sind, die Inflationsrate immer korrekt<sup>8</sup> erwartet wird (vgl. z.B. *Pohl* 1981, 152 f.).

<sup>7</sup> Eine ähnliche Beziehung zwischen Lohnsteigerungsrate und Arbeitslosenquote wird auch von *Rose* angenommen (vgl. *Rose* 1967).

<sup>8</sup> Üblicherweise wird bei rationalen Erwartungen ein Zufallsterm berücksichtigt (vgl. z.B. auch *Muth* 1961, 317). Hier wurde darauf verzichtet, damit die zu analysierenden deterministischen Einflüsse auf die Modelldynamik nicht von stochastischen Elementen überlagert werden.

$$(5) \quad \hat{P}_t = \frac{\beta}{1 - \gamma} (u^* - u_t)^3 \text{ (Menu of Choice).}$$

Wird in Gleichung (1)  $\hat{w}_t$  gemäß Gleichung (2) sowie  $\hat{P}_t^e$  gemäß Gleichung (4) ersetzt, und wird zusätzlich berücksichtigt, daß im Steady-State-Gleichgewicht  $u_{t-1} = u_t$  ist, so ergibt sich aufgelöst nach  $\hat{P}_t$  Gleichung (5). Sie stellt für die Wirtschaftspolitik das Menu of Choice dar, aus dem diese eine ihr genehme  $(u_t, \hat{P}_t)$ -Kombination auswählen kann. Die Auswahl vollzieht sich in diesem Modell über die Instrumentvariable  $\hat{M}_t^{ex}$ , die annahmegemäß exogen von der Wirtschaftspolitik gesetzt werden kann. Da im Steady-State-Gleichgewicht  $\Delta u_t = 0$  gilt, und damit gemäß Gleichung (3)  $\hat{P}_t = \hat{M}_t^{ex}$  ist, wird durch das Setzen einer bestimmten Geldmengenwachstumsrate auch die Steady-State-Inflationsrate und dadurch auch die Steady-State-Arbeitslosenquote ausgewählt.

Gleichung (5) stellt aber nur dann das Menu of Choice für die Wirtschaftspolitik dar, wenn das angestrebte Steady-State-Gleichgewicht auch tatsächlich erreicht wird, das Modell also stabil ist. Bei linearen Modellen kann dies durch einfache mathematische Verfahren allgemein überprüft werden (vgl. z.B. Lange 1989, 224). Bei nichtlinearen Modellen ist eine allgemeine Stabilitätsanalyse wesentlich aufwendiger oder unmöglich, deshalb wird im folgenden das dynamische Verhalten durch Simulationen untersucht.

## 2.2 Simulation expansiver Geldpolitik bei alternativen Randbedingungen

Um eine Simulation des Modells zu ermöglichen, wird es durch einfache arithmetische Operationen in ein Gleichungssystem transformiert, mit dem die sukzessive Bestimmung aller endogenen Variablen leicht möglich ist. Dabei wird  $\hat{q}_t$ , weil es weder Einfluß auf die Steady-State-Lösung gemäß Gleichung (5) noch auf den Verlauf des Zeitpfades hat, gleich Null gesetzt, um die verbale Argumentation zu vereinfachen<sup>9</sup>.

$$(6) \quad u_t = \frac{\beta \zeta}{1 - \gamma} (u^* - u_{t-1})^3 - \zeta \hat{M}_t^{ex} + u_{t-1} \text{ (Bestimmungsgleichung für } u_t),$$

$$(7) \quad \hat{w}_t = \frac{\beta}{1 - \gamma} (u^* - u_{t-1})^3 \text{ (Bestimmungsgleichung für } \hat{w}_t),$$

$$(8) \quad \hat{P}_t = \hat{w}_t \text{ (Bestimmungsgleichung für } \hat{P}_t),$$

$$(4) \quad \hat{P}_t^e = \hat{P}_t \text{ (Bestimmungsgleichung für } \hat{P}_t^e).$$

<sup>9</sup>  $\hat{q}_t$  determiniert lediglich die Differenz zwischen  $\hat{w}_t$  und  $\hat{P}_t$ , so daß  $\hat{w}_t$  auch als die über das Arbeitsproduktivitätswachstum hinausgehende Lohnsteigerungsrate interpretiert werden könnte.

Für analytische Zwecke wird außerdem noch die Differenzgleichung  $u_{t+1} = \Phi(u_t)$  benötigt, die sich durch Periodenverschiebung aus Gleichung (6) ergibt:

$$(9) \quad u_{t+1} = \frac{\beta \zeta}{1 - \gamma} (u^* - u_t)^3 - \zeta \hat{M}_{t+1}^{ex} + u_t.$$

Wenn die natürliche Arbeitslosenquote ( $u^*$ ), die Parameter ( $\beta$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ ), die Anfangsbedingungen ( $u_0$ ,  $\hat{w}_0$ ,  $\hat{P}_0$ ,  $\hat{P}_0^e$ ) sowie die Geldmengenwachstumsrate  $\hat{M}_1^{ex}$  gegeben sind, lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (6), (7), (8) und (4) die endogenen Variablen der Periode 1 berechnen. Auf diese Weise kann iterativ für weitere Perioden vorgegangen werden. Eine Simulation des Modells ist möglich<sup>10</sup>.

Für die grafische Darstellung der Simulationsergebnisse wird der Phasenraum (vgl. *Leven et al. 1989, 32 f.*) verwendet. Darunter ist hier ein kartesisches  $(u_t, \hat{P}_t)$ -Koordinatensystem zu verstehen, in dem der Zustand des Systems zu einem Zeitpunkt  $t$  als Phasenpunkt abgebildet wird. Bei einem gegebenen Anfangszustand erhält man im Zeitablauf eine Menge von Punkten, die spezielle Lösungen des Systems darstellen. Diese Punktmenge wird als Trajektorie (vgl. *Leven et al. 1989, 32 f.*) bezeichnet. Auf diese Weise wird einerseits das dynamische Verhalten des Systems geometrisch anschaulich, andererseits können Veränderungen des Trajektorienverlaufs bei Variation der Anfangswerte oder der Parameter beobachtet werden. In den Abbildungen 1, 2 (oben) und 3a ist außer den Trajektorien noch das jeweils zugehörige Menu of Choice dargestellt. Es ist aber zu beachten, daß letzteres im Gegensatz zu den Trajektorien kein Verhalten abbildet, sondern lediglich den geometrischen Ort aller  $(u_t, \hat{P}_t)$ -Kombinationen darstellt, bei denen ein Steady-State-Gleichgewicht herrscht.

### 2.2.1 Simulation 1 (Punktattractor)

Ausgangspunkt der Simulation 1 (vgl. Tabelle 1 sowie Abbildung 1) ist ein Steady-State-Gleichgewicht mit:  $u_0 = u^* = 4\%$ , und  $\hat{P}_0^e = \hat{P}_0 = \hat{w}_0 = \hat{M}_0^{ex} = 0\%$ . Die folgende Parameterkonstellation ist unterstellt<sup>11</sup>:  $\beta = 0.3$ ,  $\zeta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.5$ .

Es wird angenommen, daß die Geldpolitik die Arbeitslosenquote durch einen expansiven monetären Impuls ( $\hat{M}_{1,2,3...}^{ex} = 2.5\% > \hat{M}_0^{ex}$ ) senken will und bereit ist, dafür eine dem Menu of Choice entsprechende höhere Infla-

<sup>10</sup> Die Gleichungen sind so formuliert, daß sämtliche Wachstumsraten und Quoten als Prozentpunkte eingesetzt werden können.

<sup>11</sup> Die Parameter und die natürliche Arbeitslosenquote sind, um die charakteristischen Eigenschaften des Modells deutlich zu machen, hier und in den folgenden Simulationen unter dem Gesichtspunkt einer möglichst großen Transparenz ausgewählt. Ein empirischer Anspruch wird nicht erhoben.

Tabelle 1

**Simulation expansiver Geldpolitik  
– Punkttaktor –**

(alle Tabellenwerte in v.H.)

$t$	$\widehat{M}_t^{ex}$	$\widehat{P}_t$	$\widehat{P}_t^e$	$u_t$	$\widehat{w}_t$
0	0.00	0.00	0.00	4.00	0.00
1	2.50	0.00	0.00	3.00	0.00
2	2.50	0.60	0.60	2.24	0.60
3	2.50	3.27	3.27	2.55	3.27
4	2.50	1.84	1.84	2.28	1.84
5	2.50	3.04	3.04	2.50	3.04
6	2.50	2.03	2.03	2.31	2.03
7	2.50	2.89	2.89	2.47	2.89
8	2.50	2.16	2.16	2.33	2.16
9	2.50	2.79	2.79	2.45	2.79
10	2.50	2.25	2.25	2.35	2.25
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
25	2.50	2.53	2.53	2.40	2.53
26	2.50	2.48	2.48	2.39	2.48
27	2.50	2.52	2.52	2.39	2.52
28	2.50	2.48	2.48	2.39	2.48
29	2.50	2.52	2.52	2.39	2.52
30	2.50	2.49	2.49	2.39	2.49
31	2.50	2.51	2.51	2.39	2.51
32	2.50	2.49	2.49	2.39	2.49
33	2.50	2.51	2.51	2.39	2.51
34	2.50	2.49	2.49	2.39	2.49
35	2.50	2.51	2.51	2.39	2.51
36	2.50	2.49	2.49	2.39	2.49
37	2.50	2.50	2.50	2.39	2.50
38	2.50	2.50	2.50	2.39	2.50
39	2.50	2.50	2.50	2.39	2.50
40	2.50	2.50	2.50	2.39	2.50

tionsrate in Kauf zu nehmen. Die erhöhte Geldmengenwachstumsrate der 1. Periode führt zu einem Anstieg der Realkasse ( $\widehat{M}_1^{ex} > \widehat{P}_1$ ). Dies hat ein Sinken der Arbeitslosenquote ( $u_1$ ) auf 3 % zur Folge<sup>12</sup>. Die Lohnsteigerungsrate und damit auch die Inflationsrate<sup>13</sup> sind wie in der Vorperiode 0 %, da die Veränderung der Arbeitsmarktsituation mit einem Timelag auf die Lohnsteigerungsrate wirkt<sup>14</sup>. Da die Inflationserwartungen der Wirtschaftssubjekte bei der unterstellten Erwartungshypothese immer korrekt sind, ist

<sup>12</sup> Vgl. Gleichung (3).

<sup>13</sup> Vgl. Gleichung (8).

<sup>14</sup> Vgl. Gleichung (7).

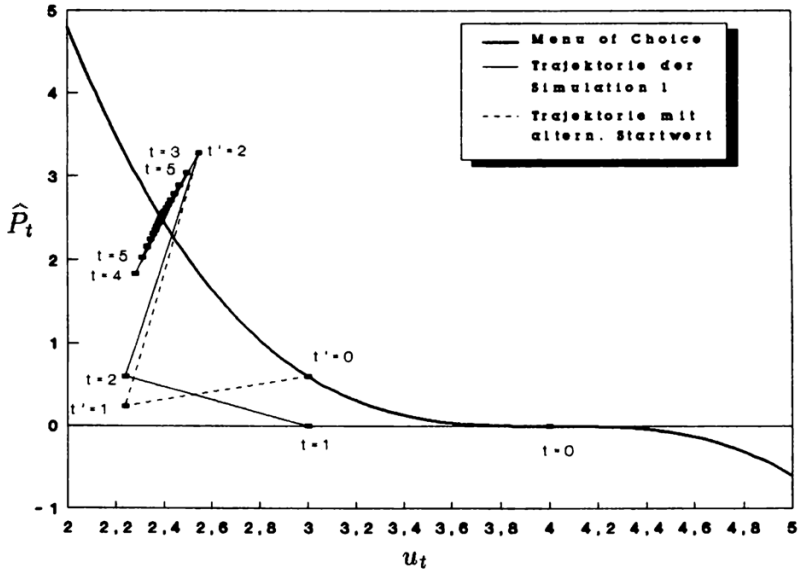


Abbildung 1: Grafische Darstellung der Simulation 1

auch die erwartete Inflationsrate 0%. Obwohl die erwartete Inflationsrate nicht vollständig in Lohnerhöhungen umgesetzt werden kann ( $\gamma < 1$ ), zeigt Tabelle 1, daß in allen Perioden  $\hat{P}_t^e = \hat{w}_t$  ist. Dieser scheinbare Widerspruch ist dadurch zu erklären, daß  $\hat{w}_t$  nicht nur durch  $\gamma \hat{P}_t^e$ , sondern auch durch den Einfluß des Arbeitsmarktes  $\beta (u^* - u_{t-1})^3$  bestimmt wird. D.h. der Teil der Inflationserwartung, der nicht in Lohnsteigerungen umgesetzt werden kann  $[(1 - \gamma) \hat{P}_t^e]$ , entspricht genau  $\beta (u^* - u_{t-1})^3$ . Dies läßt sich durch Umformung der Gleichungen (4) und (5) zeigen.

In Periode 2 führt die gestiegene Inflationserwartung ( $\hat{P}_t^e = 0.60\%$ ) zusammen mit der in Periode 1 verbesserten Arbeitsmarktsituation zu einer Erhöhung der Lohnsteigerungsrate.

$$(1) \quad \hat{w}_2 = 0 + 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot (4 - 3)^3 = 0.6$$

Auch die Inflationsrate und die erwartete Inflationsrate steigen auf 0.6%<sup>15</sup>. Da die Geldmengenwachstumsrate aber mit 2.5% immer noch größer als die Inflationsrate ist, steigt die Realkasse erneut und die Situation am Arbeitsmarkt verbessert sich:

$$(3) \quad \Delta u_2 = -0.4 \cdot (2.5 - 0.6) = -0.76.$$

<sup>15</sup> Vgl. Gleichung (8) und (4).

In Periode 3 haben die Arbeitsmarktsituation und die Inflationserwartung zu einer Lohnsteigerungs- und damit zu einer Inflationsrate geführt, die größer ist als die Geldmengenwachstumsrate. Die Realkasse sinkt ( $\hat{M}_3^{ex} < \hat{P}_3$ ), und es werden negative Beschäftigungseffekte ausgelöst. Die Arbeitslosenquote steigt auf 2.55 %.

In der 4. Periode führt die Arbeitslosenquote der Vorperiode (2.55 %) zusammen mit der gesunkenen erwarteten Inflationsrate (1.84 %) zu einer Lohnsteigerungsrate von 1.84 % und einer gleich hohen Inflationsrate. Letztere liegt wieder unterhalb der Geldmengenwachstumsrate. Folglich steigt die Realkasse, die Arbeitslosenquote sinkt erneut.

Die folgenden Perioden sind durch abwechselnd steigende und sinkende ( $u_t, \hat{P}_t$ )-Kombinationen gekennzeichnet. Die Amplituden der Schwankungen nehmen jedoch nach jeder Iteration ab, so daß ab Periode 37 approximativ ein neues Gleichgewicht bei  $u_{37} \approx 2.39\%$ ,  $\hat{P}_{37} \approx 2.50\%$  erreicht ist.

Das realisierte Gleichgewicht entspricht dem aus der Steady-State-Analyse, also dem durch das Menu of Choice vorgegebenen Gleichgewicht:

$$(5) \quad \hat{P}_\infty = \frac{0.3}{1 - 0.5} (4 - 2.39)^3 = 2.5 .$$

Ein solches Gleichgewicht wird als Punktattraktor bezeichnet. Allgemein ist ein Attraktor ein Unterraum des Phasenraums, von dem alle Trajektorien<sup>16</sup> im Einzugsbereich des Attraktors angezogen werden (vgl. Lorenz 1989, 32 ff.). Im vorliegenden Fall besteht der Attraktor nur aus einem einzelnen stabilen Fixpunkt  $\bar{u}$ , dem sich die Trajektorien asymptotisch nähern. Für  $\bar{u}$  gilt (vgl. Lorenz 1989, 35; Li / Yorke 1975, 987):

$$\bar{u} = \Phi(\bar{u}) \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi^{(t)}(u_0) - \bar{u}| = 0$$

$\Phi^{(t)}$  sei die  $t$ -fache Anwendung der Rekursionsgleichung  $\Phi$  [Vgl. Gleichung (9)].

Die Stabilität des Attraktors  $\bar{u}$  ist hier jedoch nur lokal, d. h. bei hinreichend großer Entfernung des Startwertes vom Attraktor konvergieren die Trajektorien nicht mehr zu  $\bar{u}$  (vgl. Lorenz 1989, 33 f.). Auch die Attraktoren der folgenden Simulationen 2 und 3 sind nur lokal stabil.

Sollte bei allen Parameterkonstellationen ein stabiler Fixpunkt existieren, so würde dies für die Wirtschaftspolitik bedeuten, daß sich die aus dem Menu of Choice ausgewählten ( $u_t, \hat{P}_t$ )-Kombinationen tatsächlich einstellen. Über die Dauer des Anpassungsprozesses kann weder die Steady-State-Analyse noch die oben durchgeführte Simulation Aufschluß geben. Denn die Steady-State-Analyse berücksichtigt lediglich die partikuläre Lösung eines Gleichungssystems und vernachlässigt die komplementäre, während bei der

<sup>16</sup> Vgl. z. B. (----) in Abbildung 1.



Simulation keine Annahmen über die Länge einer Periode  $t$  getroffen werden können.

Die folgenden Simulationen werden aber ohnehin zeigen, daß die hier verwendete Parameterkonstellation einen Idealfall darstellt.

### 2.2.2 Simulation 2 (Zyklischer Attraktor)

Die Simulation 2 unterscheidet sich von der Simulation 1 nur durch die veränderte Parameterkonstellation:  $\beta = 0.3$ ,  $\zeta = 0.5$ ,  $\gamma = 0.6$ .

Es wird dasselbe Ausgangsgleichgewicht unterstellt wie in Simulation 1, wieder wird angenommen, daß von der Wirtschaftspolitik durch eine expansive Geldpolitik ( $\hat{M}_{1,2,3\dots}^{ex} = 2.5\% > \hat{M}_0^{ex}$ ) eine durch das Menu of Choice vorgegebene  $(u_t, \hat{P}_t)$ -Kombination mit höherer Inflationsrate und niedrigerer Arbeitslosenquote (hier:  $\hat{P}_\infty = 2.5\%$ ,  $u_\infty \approx 2.51\%$ ) angestrebt wird.

Die ersten beiden Perioden (vgl. Tabelle 2 und Abbildung 2 oben) sind, ausgelöst von einem Anstieg der Realkasse ( $\hat{M}_{1,2}^{ex} > \hat{P}_{1,2}$ ), durch eine gesunkene Arbeitslosenquote gekennzeichnet. In den Perioden 2 und 3 kommt es durch die in der jeweils vorhergehenden Periode gesunkenen Arbeitslosenquote zu einem Anstieg der Lohnsteigerungsraten und so zu einem Anstieg von tatsächlichen und erwarteten Inflationsraten<sup>17</sup>. Dies führt in Periode 3 zu einem Sinken der Realkasse ( $\hat{M}_3^{ex} < \hat{P}_3$ ) und damit zu einem Anstieg der Arbeitslosenquote. In den folgenden Perioden kommt es wie schon in Simulation 1 zu Schwankungen der Arbeitslosenquote und der Inflationsrate. Anders als im vorangegangenen Fall nehmen die Amplituden der Schwankungen jedoch nicht kontinuierlich ab, sondern es stellt sich ein Zustand ein, bei dem im Wechsel vier bestimmte  $(u_t, \hat{P}_t)$ -Kombinationen realisiert werden (vgl. Tabelle 2, Periode 90 ff. sowie Abbildung 2 oben). Auch bei anderen Startwerten  $(u_0, \hat{P}_0)$  stellt sich in dem hier simulierten System langfristig dieser Viererzyklus ein (vgl. Abbildung 2 oben (----)).

Der dargestellte Fall ist keinesfalls ein Spezialfall, sondern wird bei einer Vielzahl von Parameterkonstellationen realisiert<sup>18</sup>. Je nach Parameterwahl kann der Attraktor nicht nur aus einem Punkt wie in Simulation 1, sondern auch aus einem Zyklus mit zwei, vier, acht ...  $(u_t, \hat{P}_t)$ -Kombinationen bestehen. Man spricht daher von einem zyklischen Attraktor. Da jeder Punkt eines zyklischen  $n$ -periodigen Attraktors nach  $n$  Perioden wieder erreicht wird, gilt allgemein für diese Punkte (vgl. Li / Yorke 1975, 986):

$$(10) \quad u_t = u_{t+n} \text{ mit } u_t \neq u_{t+k} \quad (1 \leq k < n) \text{ und } t \rightarrow \infty .$$

<sup>17</sup> Vgl. Gleichung (7), (8) und (4).

<sup>18</sup> Vgl. Abschnitt 4.

Tabelle 2  
**Simulation expansiver Geldpolitik**  
**- Zyklischer Attraktor -**  
 (alle Tabellenwerte in v. H.)

$t$	$\widehat{M}_t^{ex}$	$\widehat{P}_t$	$\widehat{P}_t^e$	$u_t$	$\widehat{w}_t$
0	0.00	0.00	0.00	4.00	0.00
1	2.50	0.00	0.00	2.75	0.00
2	2.50	1.46	1.46	2.23	1.46
3	2.50	4.14	4.14	3.05	4.14
4	2.50	0.64	0.64	2.12	0.64
5	2.50	4.97	4.97	3.36	4.97
6	2.50	0.20	0.20	2.21	0.20
7	2.50	4.32	4.32	3.12	4.32
8	2.50	0.51	0.51	2.13	0.51
9	2.50	4.94	4.94	3.35	4.94
10	2.50	0.21	0.21	2.20	0.21
11	2.50	4.37	4.37	3.14	4.37
12	2.50	0.49	0.49	2.13	0.49
13	2.50	4.92	4.92	3.34	4.92
14	2.50	0.22	0.22	2.20	0.22
15	2.50	4.39	4.39	3.14	4.39
16	2.50	0.47	0.47	2.13	0.47
17	2.50	4.91	4.91	3.33	4.91
18	2.50	0.22	0.22	2.19	0.22
19	2.50	4.41	4.41	3.15	4.41
20	2.50	0.46	0.46	2.13	0.46
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
90	2.50	0.24	0.24	2.19	0.24
91	2.50	4.47	4.47	3.17	4.47
92	2.50	0.43	0.43	2.13	0.43
93	2.50	4.87	4.87	3.32	4.87
94	2.50	0.24	0.24	2.19	0.24
95	2.50	4.47	4.47	3.17	4.47
96	2.50	0.43	0.43	2.13	0.43
97	2.50	4.87	4.87	3.32	4.87
98	2.50	0.24	0.24	2.19	0.24
99	2.50	4.47	4.47	3.17	4.47
100	2.50	0.43	0.43	2.13	0.43
101	2.50	4.87	4.87	3.32	4.87

Im vorliegenden Fall ist  $n = 4$ . Für  $t \rightarrow \infty$  gilt folglich  $u_t - u_{t+4} = 0$ . Da  $u_{t+4} = \Phi^{(4)}(u_t)$  ist, gilt für  $t \rightarrow \infty$ :  $u_t - \Phi^{(4)}(u_t) = 0$ . D.h. die Funktion  $\Psi(u_t) = u_t - \Phi^{(4)}(u_t)$  muß an den Stellen, an denen die Attraktorpunkte des 4er-Attraktors vorliegen, Nullstellen aufweisen. Dies ist in Abbildung 2 (unten) ersichtlich, wo  $\Psi(u_t)$  grafisch dargestellt ist. Bei den übrigen Nullstellen handelt es sich bei der mittleren um den instabilen Fixpunkt des

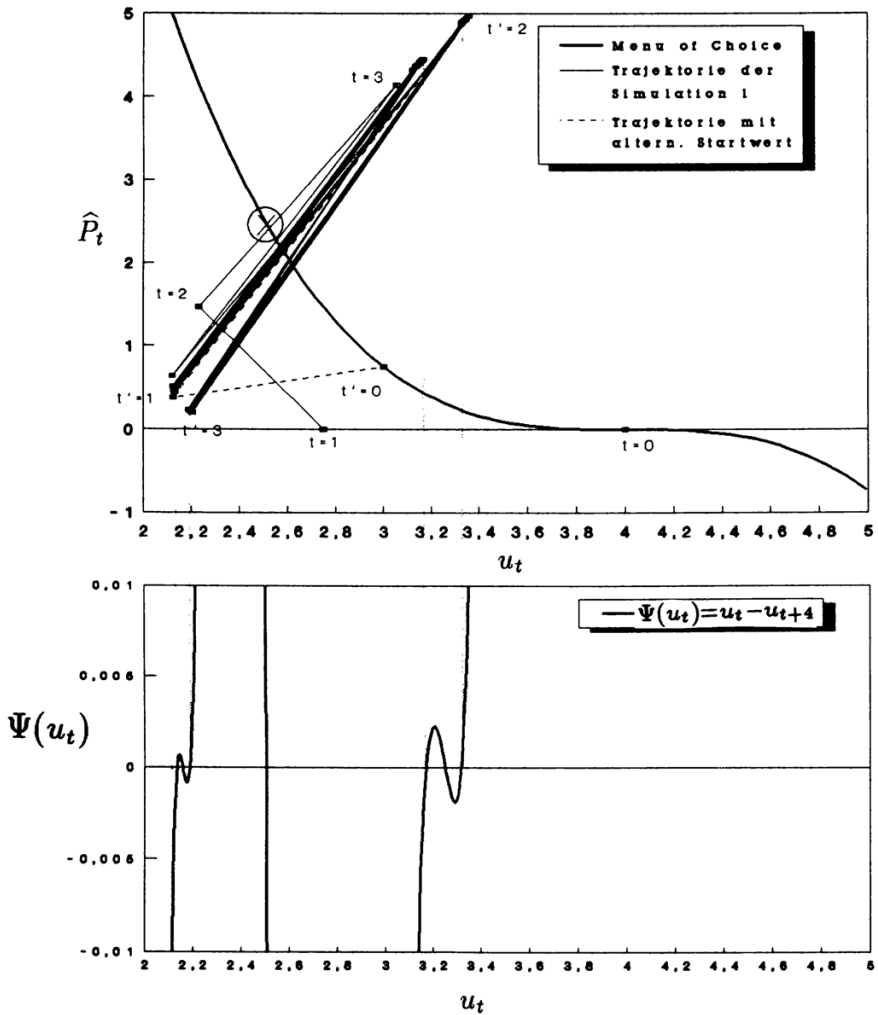


Abbildung 2: Grafische Darstellung der Simulation 2

Systems. Die anderen beiden Nullstellen sind instabile Punkte eines 2er-Zyklus. Instabil bedeutet in diesem Zusammenhang, daß diese Punkte ihre Attraktoreigenschaft verloren haben, d.h. bei geringsten Abweichungen stellt sich wieder der 4er-Zyklus ein (vgl. *Baumol / Benhabib* 1989, 86 ff.). Der Übergang von einem Punkt- zu einem 2er-Attraktor, von einem 2er- zu einem 4er-Attraktor usw., bei der jeweils die vorhergehenden Attraktorpunkte instabil werden, wird als Bifurkation bezeichnet (vgl. *Baumol / Benhabib* 1989, 84; *Devanay* 1989, 80 ff.). Der Bereich, in dem Bifurkationen vorkommen, heißt Bifurkationsbereich.

Obwohl das Steady-State-Gleichgewicht<sup>19</sup> – der instabile Fixpunkt des Systems – berechenbar ist ( $\hat{P}_\infty = 2.5$ ,  $u_\infty \approx 2.51\%$ ) wird es im Gegensatz zur vorherigen Simulation von der Trajektorie nie erreicht. Die wirtschaftspolitische Maßnahme hat ihr Ziel verfehlt.

Das abgeleitete Ergebnis könnte zu der Annahme verleiten, die Wirtschaftspolitik sei in der Lage, wenn sie schon die durch das Menu of Choice vorgegebene  $(u_t, \hat{P}_t)$ -Kombinationen nicht verwirklichen kann, einen ihr genehmen zyklischen Attraktor zu realisieren. Die folgende Simulation wird jedoch zeigen, daß Trajektorien bei bestimmten Parameterkonstellationen erstens einen fast zufällig erscheinenden Verlauf haben und zweitens dieser Verlauf nicht prognostizierbar ist.

### 2.2.3 Simulation 3 (Seltsamer Attraktor)

In der folgenden Simulation wird dasselbe Ausgangsgleichgewicht unterstellt wie in den vorangegangenen. Lediglich die Parameter des Modells werden verändert:  $\beta = 0.3$ ,  $\zeta = 0.5$ ,  $\gamma = 0.7$ . Es wird erneut eine expansive Geldpolitik ( $\hat{M}_{1,2,3\dots}^{ex} = 2.5\% > \hat{M}_0^{ex}$ ) simuliert. Ein neues Steady-State-Gleichgewicht ist gemäß Gleichung (5) bei  $\hat{P}_\infty = 2.5\%$  und  $u_\infty \approx 2.64\%$  gegeben<sup>20</sup>. Ob dieses erreicht wird, soll mit Hilfe der Simulation 3 untersucht werden.

Die expansive Geldpolitik führt wie schon in Simulation 2 in den ersten beiden Perioden zu einer Abnahme der Arbeitslosenquote sowie in Periode 2 und 3 zu einem Anstieg der Inflationsrate (vgl. Tabelle 3). In Periode 3 ist die Inflationsrate größer als die Geldmengenwachstumsrate. Dadurch werden kontraktive Beschäftigungseffekte ausgelöst, die Arbeitslosenquote steigt. Die folgenden Perioden sind wie schon bei den beiden vorangegangenen Simulationen durch Schwankungen der Arbeitslosenquote und der Inflationsrate gekennzeichnet. Die Trajektorie bewegt sich hier aber weder auf das Steady-State-Gleichgewicht zu noch wird ein zyklischer Attraktor wie in Simulation 2 erreicht (vgl. Abbildung 3a). Auch eine Explosion des Systems, wie sie bei entsprechender Parameterwahl von linearen Modellen bekannt ist, findet nicht statt.

Die Trajektorie wird von einem bestimmten Bereich des Phasenraums angezogen, der in der Literatur seltsamer Attraktor genannt wird (vgl. *Baumol/Benhabib* 1989, 91f.; *Leven et al.* 1989, 42). Innerhalb dieses Bereiches, den die Trajektorie nicht verläßt, bewegt sie sich aperiodisch, so daß die Dynamik dem Beobachter als zufällig erscheint, obwohl das Modell determini-

<sup>19</sup> Vgl. ⊗ in Abbildung 2 (oben).

<sup>20</sup> Vgl. ⊗ in Abbildung 3a.

Tabelle 3

**Simulation expansiver Geldpolitik  
– Seltsamer Attraktor –**

(alle Tabellenwerte in v. H.)

$t$	$\widehat{M}_t^{ex}$	$\widehat{P}_t$	$\widehat{P}_t^c$	$u_t$	$\widehat{w}_t$
0	0.00	0.00	0.00	4.00	0.00
1	2.50	0.00	0.00	2.75	0.00
2	2.50	1.95	1.95	2.48	1.95
3	2.50	3.54	3.54	2.99	3.54
4	2.50	1.02	1.02	2.25	1.02
5	2.50	5.33	5.33	3.67	5.33
6	2.50	0.04	0.04	2.44	0.04
7	2.50	3.81	3.81	3.09	3.81
8	2.50	0.74	0.74	2.22	0.74
9	2.50	5.68	5.68	3.81	5.68
10	2.50	0.01	0.01	2.56	0.01
11	2.50	2.99	2.99	2.80	2.99
12	2.50	1.71	1.71	2.41	1.71
13	2.50	4.02	4.02	3.17	4.02
14	2.50	0.57	0.57	2.21	0.57
15	2.50	5.77	5.77	3.84	5.77
16	2.50	0.00	0.00	2.60	0.00
17	2.50	2.77	2.77	2.73	2.77
18	2.50	2.04	2.04	2.50	2.04
19	2.50	3.36	3.36	2.93	3.36
20	2.50	1.22	1.22	2.29	1.22
21	2.50	4.99	4.99	3.54	4.99
22	2.50	0.10	0.10	2.34	0.10
23	2.50	4.60	4.60	3.39	4.60
24	2.50	0.23	0.23	2.25	0.23
25	2.50	5.33	5.33	3.67	5.33
26	2.50	0.04	0.04	2.44	0.04
27	2.50	3.81	3.81	3.09	3.81
28	2.50	0.74	0.74	2.22	0.74
29	2.50	5.68	5.68	3.81	5.68
30	2.50	0.01	0.01	2.56	0.01
31	2.50	2.99	2.99	2.80	2.99
32	2.50	1.71	1.71	2.41	1.71
33	2.50	4.02	4.02	3.17	4.02
34	2.50	0.57	0.57	2.21	0.57
35	2.50	5.77	5.77	3.84	5.77
36	2.50	0.00	0.00	2.60	0.00
37	2.50	2.77	2.77	2.73	2.77
38	2.50	2.04	2.04	2.50	2.04
39	2.50	3.36	3.36	2.93	3.36
40	2.50	1.21	1.21	2.29	1.21
41	2.50	5.00	5.00	3.54	5.00
42	2.50	0.10	0.10	2.34	0.10
43	2.50	4.59	4.59	3.38	4.59
44	2.50	0.23	0.23	2.25	0.23
45	2.50	5.35	5.35	3.68	5.35

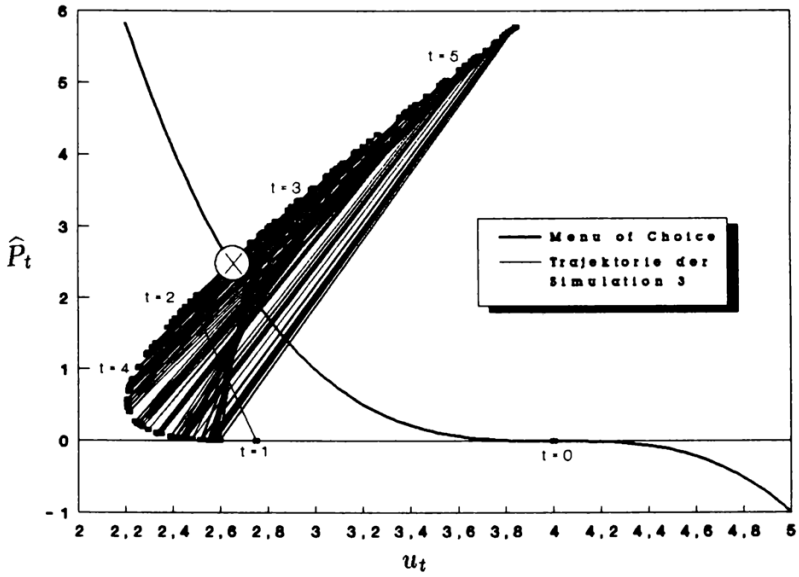


Abbildung 3a: Grafische Darstellung der Simulation 3

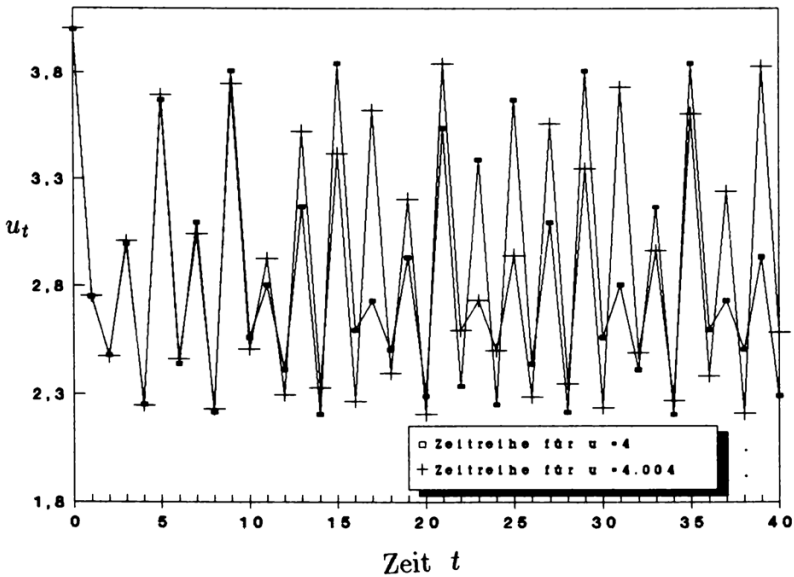


Abbildung 3b: Zeitreihendiagramm für  $u_t$

stisch ist<sup>21</sup>. Dieses dynamische Verhalten wird in der Literatur als deterministisches Chaos bezeichnet (vgl. *Seifritz* 1987, 92). Der Unterschied zwischen dem hier dargestellten seltsamen Attraktor und einem zyklischen Attraktor mit z.B. 1024 oder 2048 Zykluspunkten wäre nur graduell, wenn der Verlauf der Trajektorie prognostizierbar wäre. Genau dies ist aber nicht der Fall. Zwar führen exakt gleiche Ursachen (gleiches Modell, gleiche Parameter und gleiche Startwerte) zu immer wieder derselben Trajektorie, das Modell ist also deterministisch, d.h. das schwache Kausalitätsprinzip<sup>22</sup> ist erfüllt. Schwach ist es deshalb, weil eine Situation in der Realität nicht exakt wiederholbar ist. Das starke Kausalitätsprinzip erfordert dagegen, daß ähnliche Ursachen zu ähnlichen Wirkungen führen (vgl. *Seifritz* 1987, 90f.). Dieses Prinzip ist hier verletzt, da geringfügige Abweichungen in den Startwerten langfristig im Gegensatz zu den Simulationen 1 und 2 zu völlig anderen Trajektorien führen. Dies wird in Abbildung 3b deutlich. Dort ist zum einen die Arbeitslosenquote im Zeitverlauf dargestellt, wie sie sich aus der Simulation 3 ergibt. Zum anderen wird die Arbeitslosenquote im Zeitverlauf bei einem um 0.1 % erhöhten Startwert dargestellt. Es ist zu beobachten, daß sich beide Trajektorien nach einem anfänglichen Gleichlauf auseinanderbewegen, ohne jedoch das durch den seltsamen Attraktor vorgegebene Band zu verlassen. D.h. eine geringfügige Variation des Anfangswertes (gleiches gilt auch für Parametervariationen) führt langfristig zu einer Trajektorie, die zwar den Bereich des seltsamen Attraktors nicht verläßt, aber einen im Vergleich zur Referenztrajektorie völlig anderen Verlauf hat. In der Literatur wird diese Eigenschaft als sensitive Abhängigkeit von den Anfangs- und Randbedingungen bezeichnet (vgl. *Baumol / Benhabib* 1989, 92; *Stahlecker / Schmidt* 1991, 191).

Reagiert ein System chaotisch, so sind die Konsequenzen wirtschaftspolitischer Maßnahmen langfristig nicht mehr prognostizierbar, denn in der empirischen Forschung können weder die Anfangsbedingungen noch die Parameter exakt geschätzt werden (vgl. *Crutchfield et al.* 1989, 18).

In den vorangegangenen Abschnitten wurde eine einmalige und dauerhafte Erhöhung der Geldmengenwachstumsrate simuliert. Aber auch eine einmalige nicht-dauerhafte, z.B. durch exogene Störungen verursachte Änderung von  $\hat{M}_t^{ex}$  kann zu Chaos führen. D.h. selbst wenn die Geldmengenwachstumsrate in der darauffolgenden Periode wieder auf ihren alten Wert zurückgesetzt wird, stellt sich das Ausgangsgleichgewicht nicht wieder ein<sup>23</sup>.

<sup>21</sup> Um den deterministischen Charakter des Modells nicht zu verfälschen, wurde bei der Hypothese rationaler Erwartungen auf die Verwendung eines Zufallsterms verzichtet.

<sup>22</sup> Das schwache Kausalitätsprinzip besagt, exakt gleiche Ursachen haben exakt gleiche Wirkungen (vgl. *Seifritz* 1987, 85f.).

<sup>23</sup> Dies zeigt z.B. eine Simulation, bei der als Ausgangspunkt das in Simulation 3 angestrebte Steady-State-Gleichgewicht ( $u_t = 2.64\%$ ,  $\hat{P}_t = 2.5\%$ ) verwendet wird.

Offen blieb bisher die Frage: Wie kann ein chaotisches System als solches identifiziert werden? Dieser Frage soll im nächsten Abschnitt nachgegangen werden.

### 3. Stabilitätsanalyse anhand von Ljapunov-Exponenten

Bei der Identifikation chaotischer Parameterkonstellationen wird die oben beschriebene sensitive Abhängigkeit der Trajektorien von den Anfangsbedingungen ausgenutzt. Während im Steady-State-Bereich (Punktattraktor) sowie im Bifurkationsbereich (zyklischer Attraktor) zwei Trajektorien mit verschiedenen Startwerten sich langfristig annähern und zum selben Attraktor konvergieren (vgl. Abbildung 1 und 2 oben), verlaufen im chaotischen Regime zwei Trajektorien mit nur geringfügig verschiedenen Startpunkten langfristig zwar auf denselben Bereich zu, eine systematische Annäherung findet jedoch nicht statt.

Das dynamische Verhalten des Modells wird durch Gleichung (9), die Differenzgleichung des Modells, determiniert. Sie ist vom Typ  $x_{t+1} = f(x_t)$ . Der Abstand zweier Trajektorien ( $\Delta x_t$ ) verringert sich nach einer Iteration, wenn gilt:<sup>24</sup>

$$(11) \quad |f(x_t + \Delta x_t) - f(x_t)| < |\Delta x_t| \Leftrightarrow \left| \frac{f(x_t + \Delta x_t) - f(x_t)}{\Delta x_t} \right| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\Delta x_{t+1}}{\Delta x_t} \right| < 1$$

bzw. für  $\Delta x_t \rightarrow 0 \quad \left| \frac{\partial f(x_t)}{\partial x_t} \right| = |f'(x_t)| < 1.$

Eine Abweichung in den Startwerten stirbt im Verlauf der Iteration aus, wenn der Abstand der Trajektorien im geometrischen Mittel der Iterationen kleiner wird:

$$(12) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{|f'(x_0)| \cdot |f'(x_1)| \cdot |f'(x_2)| \cdot \dots \cdot |f'(x_N)|} < 1.$$

Durch Logarithmieren der Gleichung (12) erhält man den Ljapunov-Exponenten<sup>25</sup>  $L$ . Da der Logarithmus eines geometrischen Mittels gleich dem arithmetischen Mittel der logarithmierten Werte ist, gilt für konvergierende Trajektorien:

$$(13) \quad L = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \ln |f'(x_n)| < 0.$$

Eine einmalige Störung in Periode 1 von nur 0.01 %-Punkten ( $\hat{M}_1^{ex} = 2.49\%$ ), die sofort rückgängig gemacht wird ( $\hat{M}_{2,3,4,\dots}^{ex} = 2.5\%$ ), führt zu chaotischem Verhalten, wobei die Inflationsrate im Bereich von 0% - 5.8% und die Arbeitslosenquote im Bereich von 2.2% - 3.8% schwankt.

<sup>24</sup> Da es unerheblich ist, ob eine Abweichung positiv oder negativ ist, wird lediglich deren Betrag betrachtet.

<sup>25</sup> Ausführliche mathematische Grundlagen zur Stabilitätsanalyse mit Hilfe von Ljapunov-Exponenten finden sich u. a. bei Lorenz 1989, 186 ff.



Bei der Transformation von (12) in (13) wird lediglich die Grenze zwischen Stabilität und Chaos von 1 auf 0 verschoben. D. h. der Ljapunov-Exponent ist gerade so konstruiert, daß sein Vorzeichen immer dann negativ ist, wenn zwei Trajektorien mit unterschiedlichen Startwerten langfristig konvergieren. Im chaotischen Fall dagegen ist  $L > 0$ . Trotzdem laufen dann die Trajektorien nicht etwa exponentiell auseinander, denn chaotische Attraktoren sind ein kompakter Unterraum des Phasenraums, der von den Trajektorien nicht verlassen wird<sup>26</sup>. Jeder Punkt des Attraktionsbereichs wird aber von jeder Trajektorie nur einmal erreicht; andernfalls würde es sich um einen geschlossenen Attraktor handeln, der zwar durch ein u. U. kompliziertes, jedoch zyklisches Verhalten gekennzeichnet wäre.

Im untersuchten Modell errechnet sich der Ljapunov-Exponent wie folgt:

$$(14) \quad L = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \ln \left| \frac{\zeta \beta}{1 - \gamma} (6 u^* u_t - 3 u_t^2 - 3 u^{*2}) + 1 \right|.$$

Die Grenze zwischen Chaos und Stabilität hängt offensichtlich von  $\beta$ ,  $\zeta$  und  $\gamma$  ab. Aber auch die Geldpolitik hat implizit Einfluß auf den Ljapunov-Exponenten, da die Geldmengenwachstumsrate  $\hat{M}_t^{ex}$  in der Bestimmungsgleichung für  $u_t$  enthalten ist<sup>27</sup>. Bei den vorliegenden Simulationen wurden die Ljapunov-Exponenten approximiert. Die iterative Berechnung wurde nach jeweils 500 Perioden abgebrochen und der Ljapunov-Exponent als Mittelwert aus den letzten 100 Werten berechnet. Tests zeigten, daß diese Periodenanzahl hinreichend genaue Ergebnisse liefert<sup>28</sup>. Die Standardabweichungen ( $\sigma$ ) der Perioden 401 - 500 sind im folgenden jeweils mitaufgeführt.

Bei Simulation 1 ergibt sich ein Ljapunov-Exponent von  $L \approx -0.15$  ( $\sigma = 0.0002$ ). Abweichungen in den Anfangsbedingungen sterben im Verlauf der Anpassung aus; die Trajektorien konvergieren gegen den Punktattraktor  $\hat{P}_t = 2.5\%$ ,  $u_t \approx 2.39\%$ .

In Simulation 2 (Bifurkationsbereich) ist  $L \approx -0.05$  ( $\sigma = 0.0014$ ). D. h. die Politik ist, obwohl das angestrebte Steady-State-Gleichgewicht nicht erreicht wird, insofern *robust*, als ähnliche Ausgangslagen zu einem ähnlichen und damit prognostizierbaren Verlauf der Trajektorien führen. Langfristig wird derselbe zyklische Attraktor erreicht.

<sup>26</sup> Die Operation, die die Beschränkung der Trajektorie auf den Attraktionsbereich sicherstellt, wird im geometrischen Sinn als Faltung bezeichnet (vgl. *Crutchfield et al.* 1989, 14).

<sup>27</sup> Eine Variation von  $u^*$ , das ebenfalls Einfluß auf  $L$  hat, wird hier nicht betrachtet.

<sup>28</sup> Eine Variation der Anfangswerte im Intervall [3.5; 4.5] und eine Verlängerung der Periodenanzahl auf 600 bzw. 700 führt nur zu vernachlässigbaren Veränderungen der Mittelwerte.

Bei der in Simulation 3 gewählten Parameterkonstellation tritt chaotisches Verhalten auf, was analytisch durch einen positiven Ljapunov-Exponenten von  $L \approx 0.25$  ( $\sigma = 0.0023$ ) bestätigt wird.

Eine weitere Eigenschaft des Ljapunov-Exponenten soll hier noch erwähnt werden. Sind die Parameter gerade so gewählt, daß es zu einer Periodenverdoppelung kommt (Bifurkation), so ist der Ljapunov-Exponent gerade gleich Null (vgl. *Seifritz* 1987, 58). Diese Eigenschaft wird im folgenden Abschnitt eine Rolle spielen.

#### 4. Einfluß der Randbedingungen und der Geldpolitik auf die Modelldynamik

##### 4.1 Systematische Parametervariation

In den vorangegangenen Simulationen wurden jeweils verschiedene Parameter-Tripel ( $\beta$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ ) herausgegriffen, um das dynamische Verhalten des Modells zu analysieren. Hier soll nun der Einfluß einer systematischen Variation eines einzelnen Parameters (hier:  $\beta$ ) auf die Stabilität des Modells untersucht werden.

Zu diesem Zweck wird  $\beta$  im Intervall  $(0, 1)$  in kleinen Schritten variiert, wobei alle anderen Werte bis auf  $\zeta$  ( $\zeta = 0.4$ ) aus Simulation 2 übernommen

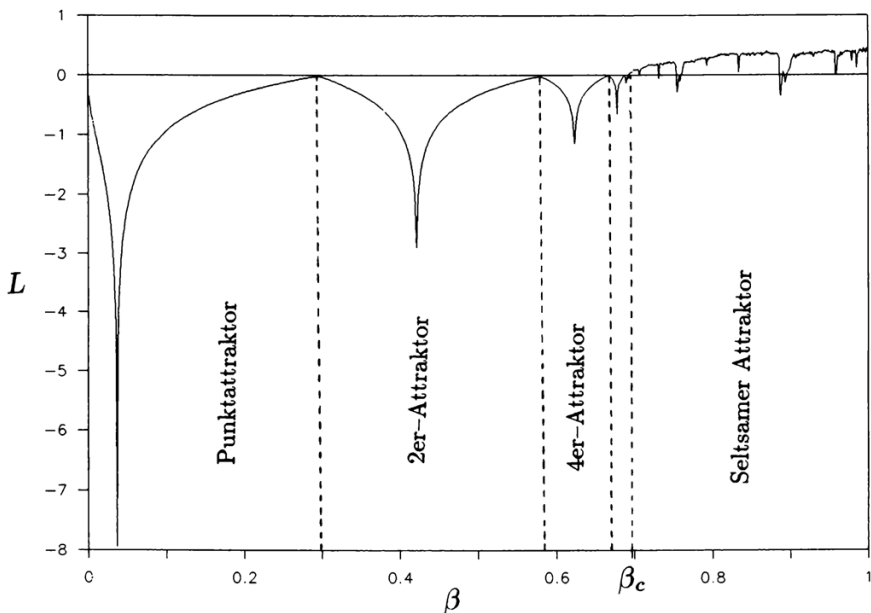


Abbildung 4: Der Ljapunov-Exponent in Abhängigkeit von  $\beta$

werden. Für jedes  $\beta$  wird der Ljapunov-Exponent wie in den vorangegangenen Simulationen approximativ berechnet.

Das Ergebnis dieser Simulation wird in Abbildung 4 wiedergegeben. Wegen der im vorigen Abschnitt erwähnten Eigenschaft des Ljapunov-Exponenten, in Bifurkationspunkten gleich Null zu sein, lassen sich einzelnen  $\beta$ -Bereichen Attraktoren verschiedener Periodizität zuordnen. Die Grafik zeigt, daß in Abhängigkeit von  $\beta$  punktstabiles, periodisch stabiles und chaotisches Verhalten des Modells auftritt. Mit zunehmendem  $\beta$  wird der Abstand zwischen zwei Bifurkationspunkten immer kleiner, d. h. der Prozeß der Periodenverdoppelung beschleunigt sich, bis bei einem kritischen Wert  $\beta_c$  das System ins Chaos übergeht.

Jedoch sind auch im Chaos Strukturen zu erkennen. So gibt es Bereiche mit Ljapunov-Werten kleiner Null. Diese Bereiche vorübergehender Stabilität im Chaos werden als periodische Fenster bezeichnet (vgl. *Leven et al. 1989, 125 ff.*).

Ähnliche Ergebnisse lassen sich auch bei systematischer Variation von  $\zeta$  und  $\gamma$  ableiten.

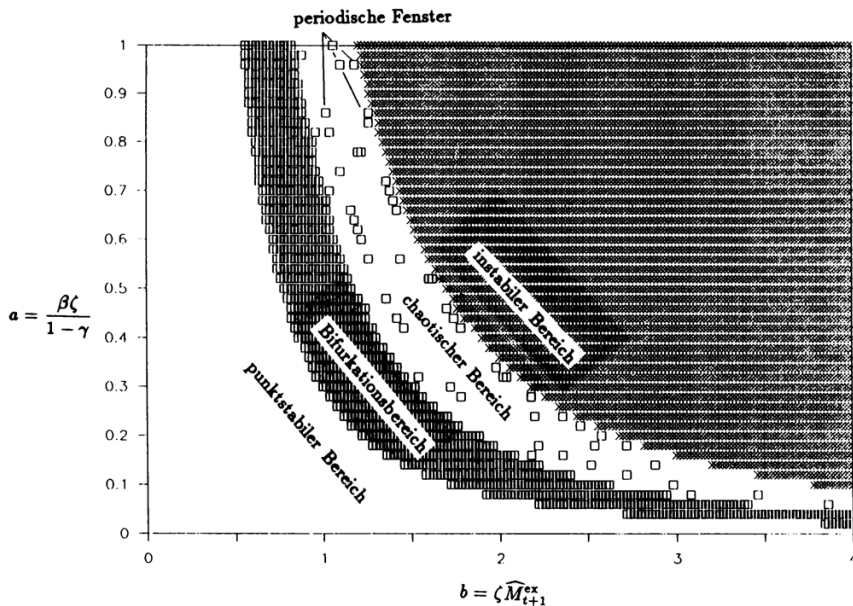


Abbildung 5: Stabilitätsbereiche des Modells

#### 4.2 Systematische Variation der Geldpolitik

Im folgenden wird die Bedeutung der Geldpolitik für die Stabilität des Modells aufgezeigt. Das dynamische Verhalten wird, wie bereits erwähnt, durch die Differenzgleichung des Modells beschrieben. Durch Umbenennung der Variablen läßt sich diese wie folgt vereinfachen:

$$(9') \quad u_{t+1} = a(u^* - u_t)^3 - b + u_t \quad \text{mit} \quad a = \frac{\beta \zeta}{1 - \gamma}, \quad b = \zeta \hat{M}_{t+1}^{ex}.$$

In einer Serie von Simulationen wurde das Stabilitätsverhalten des Modells bei alternativen  $(a, b)$ -Kombinationen analysiert. In Abbildung 5 ist dieses in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  dargestellt. Gut zu erkennen sind die periodischen Fenster im chaotischen Bereich.

Wie wirkt nun eine Variation der Geldpolitik auf die Modelldynamik? Bei jeder Parameterkonstellation führt c.p. eine Änderung der Geldmengenzunahme  $\hat{M}_{t+1}^{ex}$  nur zu einer Änderung von  $b$  (horizontale Bewegung in der Grafik). Abbildung 5 zeigt, daß in einem breiten Band von Parameterkonstellationen ( $a \geq 0.1$ ) allein durch eine Variation von  $\hat{M}_{t+1}^{ex}$  punktstabiles, periodisch stabiles, chaotisches oder instabiles Verhalten (Explosion) induziert werden kann. D.h. selbst in einer stabilen Ausgangslage kann c.p. schon allein eine Variation der Geldpolitik zu chaotischem Verhalten führen.

### 5. Konsequenzen für die ökonomische Modellbildung

In der Realität dominieren nichtlineare Beziehungen zwischen Variablen. Dadurch treten viele Phänomene auf, die durch linearisierte Modelle verdeckt werden. Dazu gehören das Auftreten von Chaos und zyklischen Attraktoren. Zwar können auch in linearen Modellen regelmäßige Zyklen mit konstanten Amplituden entstehen, aber dort stellen sie nur einen Spezialfall dar. Nichtlineare Modelle sind dagegen in der Lage, auch komplexere Strukturen abzubilden, die bisher in linearisierten Modellen mit Hilfskonstrukten wie z.B. Störtermen bzw. Rauschen (vgl. z.B. *Wagner* 1990, 365) oder Ceilings in der Konjunkturtheorie (vgl. *Hicks* 1950, 83 ff.) erklärt wurden.

Nichtlineare Modelle markieren aber auch eine Grenze der Verwendbarkeit ökonomischer Theorien. Wegen der sensitiven Abhängigkeit von den Anfangs- und Randbedingungen im chaotischen Bereich ist eine langfristige Prognose ökonomischer Prozesse potentiell nicht gegeben (vgl. *Stahlecker / Schmidt* 1991, 187), denn die konkreten Anfangs- und Randbedingungen sind nie exakt schätzbar. Dies markiert eine fundamentale Grenze empirischer Forschung, da es keine vernachlässigbaren Meßfehler mehr gibt (vgl.

*Crutchfield et al. 1989, 14; Seifritz 1987, 85 ff., 161 ff.*). Minimale Fehler wirken sich u. U. drastisch aus; dies gilt auch schon für geringfügige Fehldosierungen wirtschaftspolitischer Instrumente.

Auch ist ein Test auf Chaos insofern wenig hilfreich, da Abschnitt 4.2 gezeigt hat, daß ein an sich stabiles System allein durch den Instrumenteneinsatz vom stabilen in das chaotische Regime übergehen kann.

Neben den angesprochenen Grenzen zeichnen sich aber auch konstruktive Entwicklungen in der Theoriebildung ab. Die Chaosforschung hat sich als eigener Wissenschaftszweig etabliert. Sie weist enge Beziehungen zur Theorie dissipativer Systeme, zur Synergetik und zur Theorie der Selbstorganisation auf (vgl. *Ebeling 1989; Haken 1984; Leven et al. 1989*). Es ist zu vermuten, daß von diesen Ansätzen wichtige Impulse für die Ökonomie ausgehen werden.

### Zusammenfassung

Im Rahmen eines Beschäftigungsmodells mit rationalen Erwartungen werden Auswirkungen eines expansiven monetären Impulses auf den Zeitpfad von Inflationsrate und Arbeitslosenquote untersucht. Das Modell unterscheidet sich im wesentlichen nicht von gängigen Trade-Off-Modellen, allerdings wird eine unvollständige Antizipation der Inflationserwartung sowie ein nichtlinearer Einfluß des Arbeitsmarktes auf die Lohnsteigerungsrate angenommen.

Simulationen mit unterschiedlichen Parameterkonstellationen zeigen, daß im Gegensatz zu linearisierten Modellen auch zyklische oder irreguläre Schwankungen (Chaos) von Inflationsrate und Arbeitslosenquote auftreten können, was anhand von Ljapunov-Exponenten überprüft wird. Obwohl das Modell in den o.g. Fällen nicht instabil ist, wird nach dem monetären Impuls kein Steady-State-Gleichgewicht erreicht, d. h. eine komparativ-statische Analyse ist wenig hilfreich.

Außerdem wird gezeigt, daß im Fall irregulärer Schwankungen geringfügige Abweichungen in den Anfangsbedingungen einen völlig anderen Verlauf des Zeitpfades generieren, was die langfristige Prognostizierbarkeit in Frage stellt.

### Summary

Using a nonlinear macroeconomic employment model with rational expectations, the impact of an expansive monetary impulse on the timepath of inflation and unemployment rates is analyzed. Simulations with different parametrizations generate cyclical or irregular motions (chaos) of the inflation and unemployment rates. The results are confirmed by using Ljapunov exponents. Although the model is not unstable in these cases, it doesn't come up to a steady-state-equilibrium, so that a comparative-static approach might not be very helpful. In addition it is shown, that in the irregular case minimal deviations in the initial conditions lead to a totally different timepath, thus making forecasting questionable.

### Literatur

- Baumol, W. J. / Benhabib, J.* (1989), Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications: *Journal of Economic Perspectives* 3, 77 - 105.
- Crutchfield, J. P. et al.*, (1989), Chaos: Spektrum der Wissenschaft, Sonderband Chaos und Fraktale, 8 - 20.
- Day, R. H.* (1982), Irregular Growth Cycles, *American Economic Review* 72, 406 - 414.
- Devanay, R. L.* (1989), Chaotic Dynamical Systems. Redwood City et al.
- Ebeling, W.* (1989), Chaos – Ordnung – Information. Selbstorganisation in Natur und Technik. Frankfurt a.M.
- Fischer, S.* (1977), Long-Term Contracts, Rational Expectations, and the Optimal Money Supply Rule: *Journal of Political Economy* 85, 191 - 205.
- Geigant, F.* (1985), Inflationstheorie als Systemtheorie. *Das Wirtschaftsstudium* 3, 152 - 159.
- Haken, H.* (1984), Synergetik. Eine Einführung. Berlin.
- Hicks, J. R.* (1950), A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. Oxford et al.
- Lange, C.* (1989), Statische und rationale Erwartungen in einem Beschäftigungsmodell, in: Roithmayer, F. (Hrsg.), *Der Computer als Instrument der Forschung und Lehre in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften*. Wien / München, 216 - 227.
- Leven, R. W. et al.* (1989), Chaos in dissipativen Systemen. Braunschweig / Wiesbaden.
- Li, T. Y. / Yorke, J. A.* (1975), Period Three Implies Chaos. *American Mathematical Monthly* 82, 985 - 992.
- Lipsey, R. G.* (1960), The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1862 - 1957: A Further Analysis. *Economica* 27, 1 - 31.
- Lorenz, H.-W.* (1989), Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. Berlin.
- Muth, J. F.* (1961), Rational Expectations and the Theory of Price Movements. *Econometrica* 7, 315 - 335.
- Phillips, A. W.* (1958), The Relationship between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861 - 1957. *Economica* 25, 283 - 299.
- Pohl, R.* (1981), Theorie der Inflation. Grundzüge der monetären Makroökonomik. München.
- Rose, H.* (1967), On the Non-Linear Theory of the Employment Cycle. *Review of Economic Studies* 34, 153 - 173.
- Seifritz, W.* (1987), Wachstum, Rückkopplung und Chaos. München.
- Stahlecker, P. / Schmidt, K.* (1991), Chaos und sensitive Abhängigkeit in ökonomischen Prozessen, in: *Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften* 111, 187 - 206.
- Wagner, H.* (1990), Demokratie und Inflation. Eine „rationale“ wahlpolitische Theorie eines Inflationsbias. *Jahrbuch für Nationalökonomie und Statistik* 207, 356 - 373.