

## Chaos und sensitive Abhängigkeit in ökonomischen Prozessen

Von Peter Stahlecker und Karsten Schmidt

Die Chaos-Theorie hat in jüngster Zeit auch im Bereich der dynamischen Wirtschaftstheorie an Bedeutung gewonnen. Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit Möglichkeiten, Chaos bei dynamischen Modellen sowie anhand von empirischen Zeitreihen festzustellen.

### 1. Einführung

Warum kommt es auf manchen Märkten immer wieder zu unerwartet starken Preisschwankungen? Wieso gelingt es häufig nicht einmal, die Wachstumsrate des Bruttosozialprodukts verlässlich vorherzusagen? In der Wirtschaftsforschung haben wir uns daran gewöhnt, unerwartete kurzfristige Entwicklungen dem Zufall bzw. exogenen Schocks zuzuschreiben. In der Hoffnung, daß sich diese im Zeitablauf ausgleichen, werden dennoch mittel- bis längerfristige Prognosen gewagt.

Die Chaos-Forschung stellt diese Denkweise in Frage. Selbst bei streng determinierten Vorgängen gibt es unter den Bedingungen des Chaos keine Chance zu treffsicheren Vorhersagen und zwar gerade auf mittlere und längere Frist. Naturwissenschaftliche Beispiele für Chaos reichen von der Unmöglichkeit längerfristiger Wetterprognosen bis zu chaotischen Bewegungen einiger Himmelskörper unseres Sonnensystems (vgl. Mallove 1989).

Beginnend mit *Benhabib* und *Day* suchen seit Anfang der achtziger Jahre verstärkt auch Ökonomen nach Chaos. Erst neuerdings weisen *Baumol / Benhabib* (1989) in einem Überblick auf die potentielle Bedeutung der Chaos-Forschung für die dynamische Wirtschaftstheorie hin.

Ziel des vorliegenden Beitrags ist eine Einführung in einige theoretische Grundlagen und Konsequenzen der Chaos-Forschung, wobei wir uns auf einen Aspekt konzentrieren, der uns für wirtschaftstheoretische und empirische Anwendungen besonders interessant erscheint: Die *sensitive Abhängigkeit* chaotischer Prozesse von den Anfangsbedingungen. Wenn bei Chaos winzige Störungen nach einigen Perioden zu vollkommen anderem Prozeßverhalten führen, kann man die Systemzustände wegen der unvermeidbaren Meßfehler bei der Bestimmung ökonomischer Größen sowie der endlichen Genauigkeit digitaler Rechner nicht zuverlässig bestimmen.

Der Aufbau dieses Beitrags ist wie folgt. Nach der Erläuterung einiger Grundlagen gehen wir der Frage nach, wie man sensitive Abhängigkeit erfassen kann. Schließlich werden verschiedene Methoden zur Abschätzung eines Indikators für Chaos vorgestellt.

## 2. Einige Grundlagen

Die Chaos-Forschung beschäftigt sich mit deterministischen nichtlinearen dynamischen Modellen, die im kontinuierlichen Fall durch ein System von Differentialgleichungen und im diskreten Fall durch ein System von Differenzgleichungen beschrieben werden können. Wir beschränken uns im weiteren auf den diskreten Fall.

Ein ökonomischer Prozeß sei durch ein System von Differenzgleichungen der Form

$$(2.1) \quad x_t = g(x_{t-1})$$

mit einer differenzierbaren Abbildung  $g: \mathfrak{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  beschrieben, wobei  $x_t$  den Zustand des Prozesses in  $t = 1, 2, \dots$  bezeichnet,  $\mathfrak{D}$  eine offene Menge sei und die Ausgangslage  $x_0$  gegeben ist. Wir setzen voraus, daß  $g(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}$  ist. Damit existiert für jede Ausgangslage  $x_0 \in \mathfrak{D}$  eine *Trajektorie* (Lösung der Differenzgleichung)

$$\gamma(x_0) := \{x_0, g(x_0), g(g(x_0)), \dots\}.$$

Man bezeichnet  $\gamma(x_0)$  auch als *Orbit*. Wenn man die Abbildung  $g^t: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$  nach dem Schema

$$\begin{aligned} g^0(x) &= x & \text{f. a. } x \in \mathfrak{D} \\ g^t(x) &= g(g^{t-1}(x)) & \text{f. a. } x \in \mathfrak{D} \text{ und } t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

erklärt, läßt sich eine Trajektorie durch

$$(2.2) \quad \gamma(x_0) = \{g^t(x_0) \mid t = 0, 1, \dots\}$$

darstellen.

Da häufig der Einfluß bestimmter exogener Größen (Parameter) interessiert, sollte anstelle von (2.1) ein Differenzgleichungssystem betrachtet werden, in dem explizit ein Parametervektor  $r \in \mathfrak{R} \subseteq \mathbb{R}^k$  auftaucht:

$$(2.3) \quad x_t = g(x_{t-1}, r),$$

wobei jetzt  $g: \mathfrak{D} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{D}$  sei. Wir können uns aber auf den einfachen Fall

(2.1) konzentrieren. Ist nämlich ein System der Form (2.3) gegeben, dann analysieren wir das erweiterte System

$$x_t = g(x_{t-1}, r_{t-1}), \quad r_t = r_{t-1} = r \quad (t = 1, 2, \dots),$$

das sich mit  $g_*(x, r) := (g(x, r), r)$  und  $y_t := (x_t, r_t)$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , wieder in der Form (2.1)

$$y_t = g_*(y_{t-1}) \quad (t = 1, 2, \dots)$$

darstellen läßt.

In der Chaos-Forschung wird untersucht, welche Wirkungen geringe Veränderungen der Ausgangslage  $x_0$  bzw. des Parametervektors  $r$  auf den Verlauf einer Trajektorie haben. Dies soll hier anhand der sogenannten *logistischen Abbildung*

$$(2.4) \quad x_t = r x_{t-1}(1 - x_{t-1}) \quad (t = 1, 2, \dots)$$

mit  $r \in [0, 4]$  und  $x_0 \in (0, 1)$  verdeutlicht werden. Diese einfache Differenzgleichung ist das prominenteste Beispiel der Chaos-Forschung (vgl. z.B. *May 1976*).

In Abbildung 1 ist die für den Parameterwert  $r = 4.0$  im Ausgangspunkt  $x_0 = 0.3$  startende Trajektorie über 50 Perioden hinweg als durchgezogene Linie dargestellt. Es zeigt sich ein irreguläres Punktemuster ohne erkennbare Tendenz zu einem Gleichgewichtswert oder zu periodischen Zyklen, aber auch ohne feststellbare Instabilität im Sinne sich selbst verstärkender Schwankungen.

Ein uninformierter Betrachter dürfte kaum in der Lage sein, dieses Muster von einer rein stochastischen Zeitreihe zu unterscheiden. Betrachtet man nun die gestrichelte Linie in Abbildung 1, in der lediglich die Ausgangslage auf  $x_0 = 0.29999999$  geändert wurde, so stellt man fest, daß sich nach einigen Perioden ein völlig anderer Orbit ergibt.

Ein ähnliches Bild zeigt sich, wenn man den Einfluß kleiner Veränderungen des Parameters  $r$  untersucht. Zu diesem Zweck wurden für 241 verschiedene Parameterwerte  $r = 3.4, 3.4025, \dots, 3.9975, 4.0$  mit dem Startwert  $x_0 = 0.3$  jeweils 115 Beobachtungen gemäß Gleichung (2.4) generiert. Um Einschwingvorgänge (vor allem im nicht-chaotischen Bereich) auszublenden, sind in Abbildung 2 nur die letzten 16 Beobachtungen für jeden einzelnen Wert des Parameters  $r$  vertikal abgetragen.

Für  $r \in [0, 3]$  strebt  $x_t$  gegen einen Gleichgewichtswert (Fixpunkt). Oberhalb dieses Bereichs erhalten wir in einer Kaskade von Periodenverdopp-

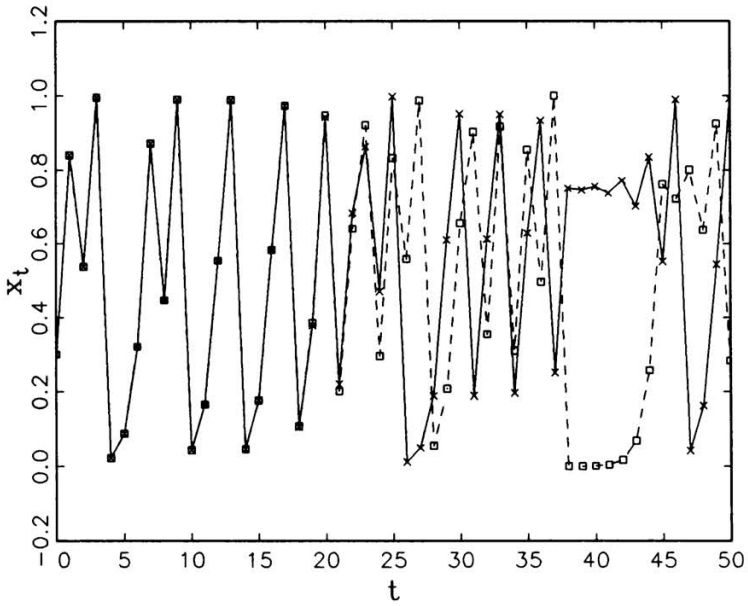


Abbildung 1

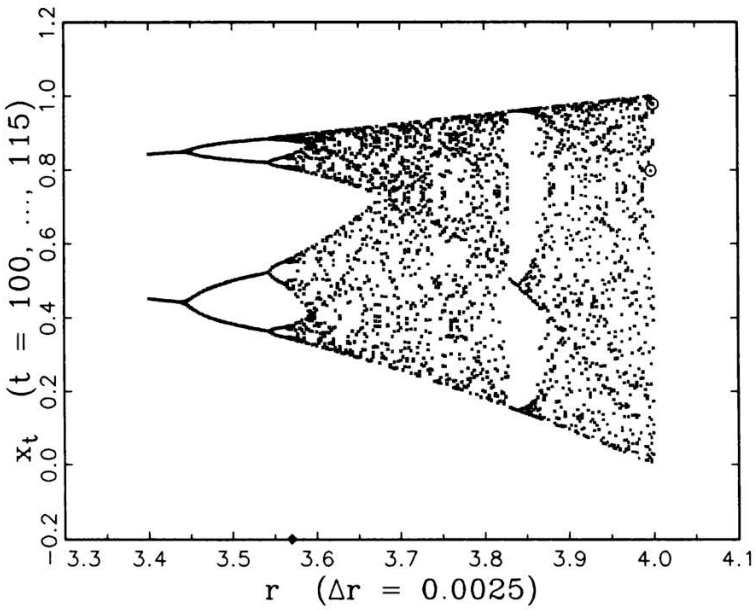


Abbildung 2



lungen periodische Punkte<sup>1</sup>. Ab einem kritischen Wert  $r_\infty \approx 3.57$  (in der Abbildung durch  $\blacklozenge$  markiert) wird aus dem periodischen ein chaotisches Verhalten.

Einem Vergleich der Endpunkte der beiden Trajektorien in Abbildung 1 entspricht die Betrachtung der eingekreisten Punkte, die jeweils den letzten Wert  $x_{115}$  für  $r = 3.9975$  und  $r = 4.0$  angeben. Winzige Parametervariationen verursachen also ähnlich dramatische Verschiebungen des Orbits wie Startwertänderungen. Man kann der Abbildung 2 außerdem entnehmen, daß auch Werte  $r \in [r_\infty, 4]$  existieren, bei denen periodisches Verhalten auftritt. Aus Ordnung kann Chaos entstehen und Chaos geht wieder in geordnete Zustände über.

Wir halten fest: In chaotischen Prozessen herrscht *sensitive Abhängigkeit* von Ausgangsbedingungen bzw. Parameterwerten. Das Prinzip der schwachen Kausalität gilt: gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen. Das Prinzip der starken Kausalität, nach dem ähnliche Ursachen ähnliche Wirkungen haben, gilt aber nicht, da winzige Störungen von  $x_0$  bzw.  $r$  erhebliche Änderungen von  $\gamma(x_0)$  nach sich ziehen.

Einige neuere Arbeiten zur dynamischen Wirtschaftstheorie (z.B. Day 1982, Artstein 1983) beschäftigen sich mit dem Aspekt der Aperiodizität chaotischer Prozesse auf der Grundlage des Theorems von Li / Yorke (1975)<sup>2</sup>. Der Nachweis von Chaos im Sinne sensitiver Abhängigkeit wird dagegen anhand des sogenannten *maximalen Lyapunov-Exponenten* geführt. Diese Maßzahl für Chaos stellt eine Verallgemeinerung des in der Stabilitätsanalyse linearer (bzw. linearisierter) dynamischer Systeme gebräuchlichen maximalen Eigenwerts dar.

In theoretischen Modellen kann Chaos auch dadurch diagnostiziert werden, daß man prüft, ob die dynamische Spezifikation in einen Typ transformiert werden kann, dessen chaotisches Verhalten für gewisse Parameterwerte bekannt ist.

Zur Illustration dieser Vorgehensweise sei bemerkt, daß schon ein simples lineares Überschußnachfragemodell chaotisch sein kann, wenn unterstellt wird, daß die Wachstumsrate des Preises proportional von der Überschußnachfrage abhängt:

$$\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \varrho (N_{t-1} - A_{t-1}), \quad \varrho > 0,$$

<sup>1</sup> Ein  $x \in \mathfrak{D}$  mit  $x = g^T(x)$  heißt *periodischer Punkt*. Der kleinste Wert  $T \geq 1$  mit  $x = g^T(x)$  heißt *Periode* von  $x$ . *Fixpunkte* von  $g$  sind periodische Punkte mit Periode 1.

<sup>2</sup> Einen Überblick über wirtschaftstheoretische Arbeiten, die sich mit der Möglichkeit von Chaos beschäftigen, findet man in Lorenz (1989), 119 - 129.

wobei

$$N_t = \alpha - \beta p_t, \quad \alpha, \beta > 0,$$

die Nachfragefunktion und

$$A_t = -\gamma + \delta p_t, \quad \gamma, \delta > 0,$$

die Angebotsfunktion bezeichnet. Man erhält dann

$$p_t = \varrho \left( \alpha + \gamma + \frac{1}{\varrho} - (\beta + \delta) p_{t-1} \right) p_{t-1}.$$

Wird nun gemäß

$$x_t := \frac{\beta + \delta}{\alpha + \gamma + \frac{1}{\varrho}} p_t \quad (t = 1, 2, \dots)$$

normiert und  $r := \varrho \left( \alpha + \gamma + \frac{1}{\varrho} \right)$  gesetzt, erhält man eine Differenzgleichung vom Typ der logistischen Abbildung:

$$x_t = r(1 - x_{t-1})x_{t-1}.$$

Wie wir bereits gesehen haben, existieren bei (2.4) chaotische Orbits für gewisse  $r \in [r_\infty, 4]$ . Auf unseren Fall übertragen bedeutet das, daß eine chaotische Entwicklung der Preise auftreten kann, falls

$$\frac{r_\infty - 1}{\alpha + \gamma} \leq \varrho \leq \frac{3}{\alpha + \gamma}$$

gilt.

Die eben demonstrierte Vorgehensweise hat den Nachteil, daß man wegen der „periodischen Fenster“ der logistischen Abbildung im Bereich  $r \in [r_\infty, 4]$  nicht sicher sein kann, ob für eine bestimmte Parameterkonstellation innerhalb des Intervalls tatsächlich Chaos auftritt.

### 3. Der maximale Lyapunov-Exponent als Maß für sensitive Abhängigkeit

Daher ist es wichtig, mit Hilfe von geeigneten Indikatoren Parameterkonstellationen zu erkennen, bei denen Chaos herrscht. Diese Indikatoren müssen auch bei mehrdimensionalen dynamischen Strukturen anwendbar sein<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Gaertner / Jungeilges (1988) z. B. beschäftigen sich mit der Möglichkeit von Chaos in einem zweidimensionalen Modell zum Konsumentenverhalten.

Nach der Kettenregel ist bei differenzierbarem  $g$  auch die iterierte Abbildung  $g^t$  für jedes  $t = 2, 3, \dots$  differenzierbar. Wir können somit die durch eine Störung  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_0 + v \in \mathfrak{D}$  erzeugte Veränderung des Orbits durch

$$g^t(x_0 + v) - g^t(x_0) = Dg^t(x_0)v + p_t(v) \quad (t = 1, 2, \dots)$$

beschreiben, wobei

$$(3.1) \quad Dg^t(x_0) = Dg(g^{t-1}(x_0)) \cdot Dg(g^{t-2}(x_0)) \cdot \dots \cdot Dg(x_0)$$

die Funktionalmatrix von  $g^t$  an der Stelle  $x_0 \in \mathfrak{D}$  bezeichnet, und das Restglied  $p_t(v)$  der Beziehung

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|p_t(v)|}{|v|} = 0$$

genügt<sup>4</sup>.

Im Sinne dieser Approximation kann also für Störungen  $v$  mit hinreichend kleiner Norm anstelle von

$$g^t(x_0 + v) - g^t(x_0) \quad \text{bzw.} \quad |g^t(x_0 + v) - g^t(x_0)|$$

der lineare Term

$$Dg^t(x_0)v \quad (t = 1, 2, \dots) \quad \text{bzw.} \quad |Dg^t(x_0)v| \quad (t = 1, 2, \dots)$$

betrachtet werden. Wenn man gerade die längerfristigen Wirkungen einer Störung im Auge hat, so ist das asymptotische Verhalten von  $Dg^t(x_0)v$  bzw.  $|Dg^t(x_0)v|$  für  $t \rightarrow \infty$  zu analysieren. Wir setzen voraus, daß für alle  $x_0, v \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda(x_0, v) := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |Dg^t(x_0)v|^{1/t} < \infty$$

gilt<sup>5</sup>. Diese Annahme ist z. B. erfüllt, wenn

$$\alpha := \sup_{x \in \mathfrak{D}} \|Dg(x)\| < \infty$$

ist, da wir dann unter Anwendung von (3.1) und Ausnutzung der Beziehung  $|ABv| \leq \|A\| \|B\| |v|$  (für  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ )

<sup>4</sup>  $\|\cdot\|$  bezeichnet eine Vektornorm, z. B. die euklidische Norm  $|x| = \sqrt{x'x}$ ; mit  $\|\cdot\|$  bezeichnen wir die induzierte Matrixform, bei der euklidischen Vektornorm also  $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A'A)}$ , wobei  $\lambda_{\max}(A'A)$  der maximale Eigenwert von  $A'A$  ist.

<sup>5</sup>  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} a_t$  bezeichnet den *limes superior* einer Folge  $(a_t)_{t \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen, d. h.  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} a_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{j \geq t} a_j$ .

$$| Dg^t(x_0) v | \leq \prod_{i=0}^{t-1} \| Dg(g^i(x_0)) \| | v | \leq \alpha^t | v |$$

erhalten und somit

$$| Dg^t(x_0) v |^{1/t} \leq \alpha | v |^{1/t} < \infty$$

ist. Die Größe  $\lambda(x_0, v)$  kann höchstens  $n$  verschiedene Werte annehmen, wenn  $v$  beliebig im  $\mathbb{R}^n$  variiert (vgl. Anhang A).

In der Literatur hat sich eingebürgert, anstelle von  $\lambda(x_0, v)$

$$\mu(x_0, v) := \ln \lambda(x_0, v) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

zu verwenden. Die (höchstens  $n$ ) verschiedenen Werte dieses Indikators werden als *Lyapunov-Exponenten* bezeichnet und bilden das *Lyapunov-Spektrum* des Differenzgleichungssystems (2.1). Von besonderem Interesse ist der *maximale Lyapunov-Exponent*

$$\mu(x_0) := \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \mu(x_0, v).$$

Er charakterisiert die Wirkungen *fast aller* Störungen  $v$ , d. h. es gilt für fast alle  $v \in \mathbb{R}^n$  (vgl. Anhang A)

$$(3.2) \quad \mu(x_0) = \mu(x_0, v).$$

Außerdem gilt (vgl. Anhang B)

$$(3.3) \quad \mu(x_0) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \| Dg^t(x_0) \|.$$

Wir definieren nun den Begriff der sensitiven Abhängigkeit:

#### DEFINITION

Der Prozeß (2.1) heißt sensitiv abhängig im Punkt  $x_0$ , wenn

$$\mu(x_0) > 0$$

ist.

Zur Interpretation dieser Definition betrachten wir eine Störung  $v$ , für die

(3.2) gilt. Dann strebt eine Teilfolge von  $\left( \frac{1}{t} \ln | Dg^t(x_0) v | \right)_{t \in \mathbb{N}}$  gegen

$\mu(x_0)$ . Bezeichnen wir diese Teilfolge mit  $\left( | Dg^{t_j}(x_0) v |^{1/t_j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$ , so gilt für hinreichend große  $t_j$

$$| Dg^{t_j}(x_0) v | \approx e^{\mu(x_0)t_j}$$



und somit für  $h = \lambda v$  mit  $\lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|g^{tj}(x_0 + h) - g^{tj}(x_0)|}{|h|} \approx e^{\mu(x_0)t_j}.$$

Für  $\mu(x_0) > 0$  wächst der Abstand von ursprünglich beliebig nahe beieinander liegenden Punkten im Zeitablauf exponentiell an, sofern man einmal die nicht zur obigen Teilfolge gehörenden Zeitabschnitte außer Acht läßt. Sensitive Abhängigkeit bedeutet somit, daß der Verlauf einer Trajektorie bei winzigen Störungen radikal verändert wird. Selbst wenn man die Bewegungsgesetze eines dynamischen Systems in Gestalt der Funktion  $g$  kennt, kann  $\gamma(x_0)$  wegen der unvermeidbaren Meßfehler beim Ausgangszustand  $x_0$  bzw. der numerischen Fehler bei der Berechnung von  $g^t(x_0)$  nicht zuverlässig bestimmt werden.

In der Tat sind dann sämtliche mit endlicher Rechengenauigkeit durchgeführte Computerberechnungen eines Orbits fragwürdig. Dies läßt sich sehr schön anhand der Trajektorie aus Abbildung 1 demonstrieren. Sie wurde mit einem *Gauss*-Programm auf einem IBM-kompatiblen PC berechnet. Zu Vergleichszwecken haben wir den Orbit mit dem Computer-Algebra-System *Derive* mit exakter Genauigkeit ermittelt. Da dies sehr schnell zu gigantischen Ausdrücken führt, war eine exakte Berechnung nur bis  $x_{12}$  möglich. Zu diesem Zeitpunkt war der *Gauss*-Wert nur noch auf zwölf (von sechzehn) Stellen genau. Darüber hinaus haben wir den Orbit  $\gamma(0.3)$  mit einem *Fortran*-Programm (wieder auf dem PC; bei einfacher und doppelter Genauigkeit) sowie mit einem programmierbaren Taschenrechner berechnet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3 dargestellt. Die beiden durchgezogenen Trajektorien (also die mit *Gauss* und *Double Precision Fortran* erzeugten) scheinen gleich zu verlaufen. Dies liegt daran, daß in beiden Fällen mit der gleichen Datenlänge gearbeitet wird (acht Bytes gegenüber vier Bytes bei *Real Fortran*). Dennoch stimmen die beiden  $x_{50}$ -Werte nur noch auf drei Stellen überein. Der in Abbildung 2 eingekreiste  $x_{115}$ -Wert ergab dann bei *Double Precision Fortran* 0.004 gegenüber 0.977 bei *Gauss*!

Was ermittelt wird, sind also offenbar *Pseudoorbits*. Man darf hoffen, daß sie *qualitativ* das Bild eines chaotischen Orbits vermitteln, ohne daß man jedoch den Einzelwerten  $x_t$  allzugroße Bedeutung beimessen kann.

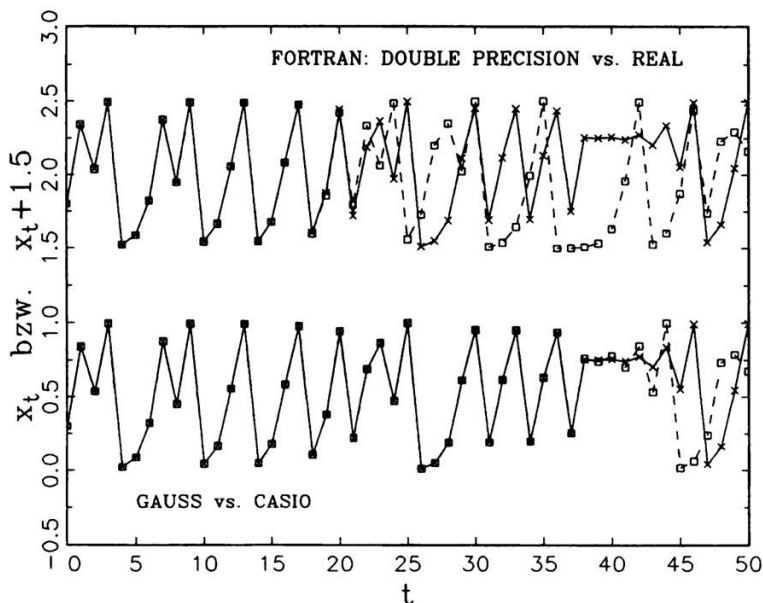


Abbildung 3

#### 4. Bestimmung des maximalen Lyapunov-Exponenten

Dies wirft die Frage auf, ob nicht auch die Bestimmung einer Maßzahl für sensitive Abhängigkeit problematisch ist. Häufig läßt sich nämlich der maximale Lyapunov-Exponent nicht analytisch bestimmen, so daß man auf Computerberechnungen angewiesen ist. Wir werden jedoch sehen, daß Aussagen über die Frage, ob Chaos im Sinne sensitiver Abhängigkeit vorliegt, unter recht allgemeinen Voraussetzungen möglich sind.

Die Chaos-Forschung hat hierzu Hilfsmittel entwickelt, die sowohl für die *theoretische* Analyse als auch für *empirische* Tests eingesetzt werden können. Unter theoretischer Analyse verstehen wir Fälle, in denen  $g$  bekannt ist (ggf. nach Schätzung einzelner Parameter). Damit beschäftigen wir uns im Abschnitt 4.1. Im Abschnitt 4.2 geht es dann um die Fälle, in denen  $g'$  unbekannt ist. Dort werden Zeitreihendaten untersucht.

##### 4.1 Bei Kenntnis der Systemfunktion $g$

In Tabelle 1 sind numerische Berechnungen des Lyapunov-Exponenten für die logistische Abbildung aufgeführt. Für jede  $(t,r)$ -Kombination haben wir  $\mu(x_0)$  mit 50 zufällig gewählten  $x_0$ -Werten gemäß

$$(4.1) \quad \frac{1}{t} \ln || Dg^t(x_0) || = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \ln | g'(x_j) |$$

abgeschätzt, wobei  $x_j = r x_{j-1}(1 - x_{j-1})$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , und  $g'(x) = r(1 - 2x)$  sind.

In der Tabelle findet man jeweils den Mittelwert und darunter (in Klammern) die Standardabweichung dieser Berechnungen. Wenn man die Ergebnisse mit Abbildung 2 vergleicht, so sieht man, daß chaotische Bereiche in der Tat durch positive numerische Werte für  $\mu(x_0)$  angezeigt werden. Außerdem erkennt man an den sinkenden Standardabweichungen, daß die Folge (4.1) offenbar *unabhängig* von  $x_0$  einem festen Grenzwert zustrebt. Sogar bei relativ kleinen  $t$  ergibt die Durchschnittsbildung über die verschiedenen  $x_0$  eine gute Annäherung an die mit größeren  $t$  ermittelten Lyapunov-Exponenten.

Diese Beobachtung legt die Vermutung nahe, daß der maximale Lyapunov-Exponent eine konstante Größe ist, mit der sich das asymptotische Verhalten *aller* Trajektorien eines Systems *global* charakterisieren läßt.

*Tabelle 1*  
**Numerische Bestimmung des Lyapunov-Exponenten**

$t$	$r = 3.4$	$r = 3.6$	$r = 3.8$	$r = 4.0$
5	-.137 ( $\approx 0$ )	.185 (.201)	.458 (.174)	.754 (.256)
15	-.137 ( $\approx 0$ )	.178 (.078)	.443 (.070)	.718 (.080)
50	-.137 ( $\approx 0$ )	.182 (.036)	.434 (.039)	.697 (.027)
150	-.137 ( $\approx 0$ )	.183 (.016)	.431 (.029)	.694 (.009)

Hier kommen Überlegungen aus der Theorie *ergodischer* Systeme ins Spiel, die ihren Ursprung in der Physik hat. Es geht grob gesagt darum, Bedingungen anzugeben, unter denen zeitliche Mittelwerte für bestimmte charakteristische Größen eines dynamischen Systems mit ihren „räumlichen“ Mittelwerten übereinstimmen. Betrachten wir wieder die logistische Abbildung, so könnte man z. B. fragen, ob das Zeitmittel

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln | g'(x_j) |$$

für fast alle  $x_0$  mit  $n \rightarrow \infty$  gegen

$$\int \ln |g'(x)| dm(x)$$

strebt. Hierbei wird das Wahrscheinlichkeitsmaß  $m(x)$  durch eine sogenannte *invariante* Dichtefunktion  $p(x)$  generiert. Im Fall  $r = 4$  kann man z. B. mit der Dichtefunktion

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$$

den Mittelwert

$$\int_0^1 \frac{\ln |4(1-2x)|}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx = \ln(2) \approx 0,693$$

bestimmen (man vergleiche mit den Ergebnissen in Tabelle 1).

Die Theorie ergodischer Systeme liefert eine generelle Begründung der Berechenbarkeit von Lyapunov-Exponenten bei Vorliegen von Chaos. Um nicht zu viele technische Details ausbreiten zu müssen, beschränken wir uns hier auf einige Aussagen zum *maximalen* Lyapunov-Exponenten, der wegen (3.2) und (3.3) für praktische Zwecke besonders relevant ist.

Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte, nichtleere Menge und  $h: U \rightarrow U$  eine stetige Funktion, so existiert (auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}(U)$  der Borel-Teilmengen von  $U$ ) ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $m$  mit folgender Eigenschaft (Walters 1982, 150 - 151):

Für jede stetige Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$(4.2) \quad \int f(x) dm(x) = \int f(h(x)) dm(x).$$

Das Maß  $m$  heißt dann *h-invariant*. Das Tripel  $(h, m, U)$  nennt man *ergodisch*, wenn für jede Menge  $C \in \mathfrak{B}(U)$  mit  $h^{-1}(C) = C$  gilt

$$m(C) = 0 \quad \text{oder} \quad m(C) = 1.$$

Zur Interpretation dieser Begriffe betrachten wir unser Differenzengleichungssystem (2.1) und setzen voraus, daß eine kompakte nichtleere Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $g(U) \subseteq U$  existiert, in die (fast) alle Trajektorien nach gewisser Zeit eintreten. Eine solche Menge nennen wir *Attraktor*<sup>6</sup>. Da wir zur Bestimmung des Lyapunov-Exponenten Differenzierbarkeit von  $g$  unterstellt haben, existiert ein  $g$ -invariantes Maß  $m_g$ . Die Bedingung (4.2) besagt nun, daß die „Raummittel“  $\int f(g^t(x)) dm_g(x)$  für  $t = 0, 1, \dots$  übereinstimmen, wenn  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige stetige Funktion ist.

<sup>6</sup> Hierbei ist vor allem an den interessanten Fall zu denken, daß  $U$  keine periodischen Punkte enthält.



Bei ergodischem  $(g, m_g, \mathbb{U})$  besitzt der Attraktor  $\mathbb{U}$  eine *Unzerlegbarkeits-eigenschaft*:

Ist  $\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}$  eine Teilmenge mit  $g^{-1}(\mathbb{U}_1) = \mathbb{U}_1$ , so daß also jede in  $\mathbb{U}_1$  beginnende oder einmündende Trajektorie dort verbleibt, dann ist  $m(\mathbb{U}_1) = 0$  oder  $m(\mathbb{U}_1) = m(\mathbb{U}) = 1$ .

Die theoretische Grundlage der Messung sensitiver Abhängigkeit liefert nun der folgende Satz, dessen Beweis aus dem subadditiven ergodischen Theorem von Kingman folgt. Der allgemeine Fall *aller* Lyapunov-Exponenten wird in *Ruelle* 1979, 277 - 278, sowie *Walters* 1982, 231 - 233, behandelt.

**Satz:** Es seien  $g: \mathfrak{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $\mathbb{U} \subset \mathfrak{D}$  mit  $g(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$  eine kompakte, nichtleere Menge. Dann existieren ein  $g$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $m$  und eine meßbare Funktion  $\mu: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) \quad \mu(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln || Dg^t(x) || \quad (m\text{-fast alle } x \in \mathbb{U})$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int \ln || Dg^t(x) || dm(x) = \int \mu(x) dm(x)$$

(3) Ist  $(g, m, \mathbb{U})$  ergodisch, so ist  $\mu(x)$  konstant für  $m$ -fast alle  $x \in \mathbb{U}$ .

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes kann man den maximalen Lyapunov-Exponenten numerisch mit Hilfe des Computers z.B. nach dem von *Benettin et al.* 1980 vorgeschlagenen Verfahren bestimmen.

Man wählt bei gegebenem  $x_0$  und  $p \geq 1$  zunächst  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $|v_0| = 1$  nach einem Zufallsverfahren aus. Nun ermittelt man

$$x_t = g^p(x_{t-1}) \text{ und } v_t = \frac{1}{|v_{t-1}|} Dg^p(x_{t-1}) v_{t-1},$$

sowie

$$(4.3) \quad \bar{\mu}_t(x_0) = \frac{1}{pt} \sum_{j=1}^t \ln |v_j| = \frac{1}{pt} \ln | Dg^{pt}(x_0) v_0 | \quad t = 1, 2, \dots$$

Nach Aussage (1) des Satzes in Verbindung mit (3.2) und (3.3) strebt  $\bar{\mu}_t(x_0)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\mu(x_0)$  für  $m$ -fast alle  $x_0 \in \mathbb{U}$  (ggf. kann jedoch  $\mu(x_0) = -\infty$  sein; um numerische Probleme zu vermeiden, sollte auch  $p$  nicht zu groß gewählt werden).

Nach Aussage (2) des Satzes können wir durch  $N$ -faches Wiederholen dieser Prozedur bei zufällig gewählten Startpunkten  $x_{0j}$  einen mittleren Lyapunov-Exponenten bestimmen, wobei wir

$$(4.4) \quad \bar{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \bar{\mu}(x_{0j})$$

als Approximation des „Raummittels“ verwenden ( $\bar{\mu}(x_{0j})$  sei der mit Hilfe von (4.3) geschätzte Wert für  $\mu(x_{0j})$ ).

Die Bestimmung eines Streuungsmaßes für  $\bar{\mu}(x_{0j})$  kann helfen, die Aussage (3) des Satzes experimentell zu testen. Für wachsendes  $t$  müßte die Streuung bei ergodischem  $(g, m, \mathbb{I})$  abnehmen.

Wir haben festgestellt, daß anstelle der Prozedur (4.3.) der direkte Weg über die Matrix-Norm

$$\sqrt{\lambda_{\max}(Dg^t(x)' Dg^t(x))}$$

in Verbindung mit einer Mittelung gemäß (4.4) zu brauchbaren Resultaten führt.

#### 4.2 Bei Unkenntnis der Systemfunktion $g$

Das im vorigen Abschnitt dargestellte Verfahren zur Berechnung des maximalen Lyapunov-Exponenten beruht auf der Kenntnis der Abbildung  $g$ . Es kann daher zur Analyse eines vollständig spezifizierten dynamischen Modells herangezogen werden, um zu prüfen, ob für plausible Parameterkonstellationen Chaos eintritt.

Häufig kennt man aber weder die spezielle Form noch die Dimension von  $g$ . Allein eine skalare Zeitreihe

$$z_t = f(x_t) \quad \text{mit} \quad x_t = g(x_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

liegt vor, wobei die Gestalt von  $f: \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls unbekannt ist. Anhand einer solchen Zeitreihe möchte man nun Rückschlüsse auf das dynamische Verhalten des  $n$ -dimensionalen Prozesses gewinnen, der sie erzeugt hat. Beispielsweise wollen Astrophysiker mit Hilfe einer Meßreihe der elektromagnetischen Strahlung der Sonne herausfinden, ob sich bestimmte Sonnenaktivitäten vorhersagen lassen; Kapitalanleger möchten wissen, ob man Kursänderungen auf Wertpapier-, Devisen- und Rohstoffmärkten auf Basis der bisherigen Kursentwicklung prognostizieren kann.

Bis vor wenigen Jahren gab es noch keine Möglichkeit, allein aus den Beobachtungen  $z_t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ) Rückschlüsse auf die sensitive Abhängigkeit des zugrundeliegenden Prozesses  $g$  zu ziehen. Erst das von *Wolf et al.* 1985 vorgestellte Verfahren erlaubt die Abschätzung des maximalen Lyapunov-Exponenten anhand von Zeitreihendaten. Wir erläutern hier allerdings ein von *Kurths / Herzel* 1987 entwickeltes Verfahren, das unseres Erachtens bei kleinen Beobachtungsumfängen dem Algorithmus von *Wolf et al.* vorzuziehen ist.

Zunächst wird ein  $m$ -dimensionaler *Pseudo-Zustandsraum* nach folgender Vorschrift erzeugt:

$$z_t = (z_t, z_{t+1}, \dots, z_{t+m-1}), \quad t = 1, 2, \dots, T - m + 1.$$

Dies ergibt  $T - m + 1$  Punkte im  $\mathbb{R}^m$ , die unter bestimmten Voraussetzungen (z.B. muß  $m > 2n$  sein) zur Abschätzung des maximalen Lyapunov-Exponenten verwendet werden können (vgl. Takens 1981).

Man bestimmt nun alle nahe beieinander liegenden Punktepaare  $(a_j, a_k)$ , für die

$$| a_j - a_k | < \varepsilon$$

ist, wobei wir im folgenden die Fälle ausschließen, in denen  $|\cdot| = 0$  ist. Sodann berechnet man für diese  $N$  Punktepaare den Abstand nach  $p$  Perioden und bestimmt

$$d_p^{(j,k)} = \frac{| a_{j+p} - a_{k+p} |}{| a_j - a_k |}.$$

Dieser Faktor beschreibt die nach  $p$  Perioden eingetretene Veränderung des Abstands der Punkte. Die Durchschnittsbildung über alle auf diese Weise ermittelten Faktoren ergibt die gewünschte Abschätzung für den maximalen Lyapunov-Exponenten:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{pN} \sum_{j,k} \left( \ln d_p^{(j,k)} \right).$$

Dieses Verfahren führt für  $n > 1$  tendenziell zu einer *Unterschätzung* des *maximalen* Lyapunov-Exponenten, da auch die anderen Lyapunov-Exponenten auf die Veränderung des Abstands Einfluß nehmen, so daß die Wirkung des maximalen Lyapunov-Exponenten teilweise kompensiert wird. Mit Hilfe dieses Verfahrens sind bereits einige Untersuchungen ökonomischer Zeitreihen vorgenommen worden<sup>7</sup>. Wir wollen an dieser Stelle einmal mehr die logistische Abbildung verwenden, um den Algorithmus zu demonstrieren. Wir erzeugen uns entsprechend der Abbildung (2.4) für  $r = 3.4, 3.6, 3.8, 4.0$  Zeitreihen mit jeweils  $T = 100$  Beobachtungen.

Tabelle 2 enthält Abschätzungen des maximalen Lyapunov-Exponenten anhand dieser Zeitreihen. Wenn man diese Werte mit den entsprechenden Ergebnissen in Tabelle 1 vergleicht, so zeigt sich eine recht gute Übereinstimmung. Berechnungen von  $\bar{\mu}$  für weitere  $(T,m,p)$ -Kombinationen wichen nur wenig von den in Tabelle 2 dargestellten Werten ab.

<sup>7</sup> Frank / Stengos (1988) überprüfen so die Stabilität einiger makroökonomischer Zeitreihen Kanadas; Schmidt / Stahlecker (1989) untersuchen mit diesem Verfahren die Stabilität von Preis- und Mengenanpassungen in verschiedenen Wirtschaftszweigen der Bundesrepublik Deutschland.

Tabelle 2

## Empirische Abschätzungen des Lyapunov-Exponenten

$T$	$m$	$p$	$r = 3.4$	$r = 3.6$	$r = 3.8$	$r = 4.0$
100	5	3	-.138	.228	.405	.732
100	5	5	-.138	.225	.394	.653
100	10	3	-.137	.208	.367	.708
100	10	5	-.137	.214	.376	.700

Bei höherdimensionalen Prozessen kann man wegen der schon erwähnten Kompensationseffekte natürlich nicht mehr erwarten, daß die Größenordnung des maximalen Lyapunov-Exponenten immer so gut abgeschätzt wird wie bei der logistischen Abbildung. Die Untersuchung einer Reihe von bekannten mehrdimensionalen chaotischen Abbildungen hat gezeigt, daß  $\bar{\mu}$  stets eine (mehr oder weniger scharfe) untere Grenze für den maximalen Lyapunov-Exponenten darstellt (vgl. auch Kurths / Herzel 1987, 169 - 170).

Wenn man also vor allem am Vorzeichen des maximalen Lyapunov-Exponenten interessiert ist, dann scheint das beschriebene Verfahren auch bei relativ kleinem Beobachtungsumfang gut geeignet zu sein. Der Grund dafür dürfte in der Durchschnittsbildung über die  $N$  ausgewählten Punktepaare liegen: Es wird über die Zeit *und* über den Raum gemittelt (vgl. Abschnitt 4.1).

Ein wesentlicher Gesichtspunkt des Kurths / Herzel-Verfahrens ist die Auswahl benachbarter Punkte, die dann systematisch um  $p$  Perioden verfolgt werden. Diese Idee kann man bei entsprechender Datenlage auch mit anderen Schätzverfahren verbinden. Liegt z.B. eine Zeitreihe der Originalwerte  $x_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) vor, so kann man zu einem Punkt  $x_k$  benachbarte Punkte  $x_j$  suchen, für die  $|x_j - x_k| < \varepsilon$  ist.

Man ermittelt nun die Differenzen

$$v^{(j,k)} = x_j - x_k \quad \text{und} \quad w_p^{(j,k)} = x_{j+p} - x_{k+p}$$

und faßt diese Vektoren zu den Datenmatrizen  $V_k = (v^{(j,k)})$  und  $W_k = (w_p^{(j,k)})$  der Ordnung  $n \times N_k$  zusammen, wobei  $N_k$  die Anzahl der zu  $x_k$  benachbarten Punkte ist. Approximativ gilt

$$w_p^{(j,k)} \approx Dg^p(x_k) v^{(j,k)}.$$

Daher ist es naheliegend, diese Funktionalmatrix durch eine Lösung von

$$\text{tr} [(W_k - XV_k)' (W_k - XV_k)] \rightarrow \min_x$$



zu approximieren<sup>8</sup>. Auf Basis von

$$\hat{X}_k = W_k V_k^+$$

kann man den maximalen Lyapunov-Exponenten mit

$$\bar{\mu}_p(x_k) = \frac{1}{2p} \ln \lambda_{\max}(\hat{X}_k' \hat{X}_k)$$

in Verbindung mit einer geeigneten Mittelung über verschiedene Ausgangspunkte  $x_k$  abschätzen. Durch dieses Verfahren, das unter bestimmten Bedingungen mit der Methode von Kurths / Herzel übereinstimmt, dürften sich auch weitere Lyapunov-Exponenten abschätzen lassen.

### Zusammenfassung

Ein wesentliches Merkmal chaotischer Prozesse ist deren sensitive Abhängigkeit von Anfangs- und Parameterwerten. Der vorliegende Beitrag liefert eine Einführung in die theoretischen Grundlagen der Messung sensitiver Abhängigkeit. Es wird gezeigt, wie man mit Hilfe des sogenannten maximalen Lyapunov-Exponenten chaotische Reaktionen festlegen kann. Liegt ein dynamisches ökonomisches Modell in Form eines (nichtlinearen) Differenzgleichungssystems vor, so können Parameterkonstellationen, bei denen Chaos eintritt, direkt erkannt werden. Darüber hinaus lassen sich anhand von Zeitreihen Abschätzungen des maximalen Lyapunov-Exponenten auch dann noch ermitteln, wenn die dynamische Struktur nicht oder nur unvollständig bekannt ist. Dies eröffnet empirischen Arbeiten zum Thema Chaos in ökonomischen Prozessen neue Wege.

### Summary

Sensitive dependence on initial conditions is a major characteristic of chaotic systems. This article provides an introduction to the concept of Lyapunov exponents, which characterize the behavior of a dynamic process by measuring its degree of sensitive dependence. If the largest Lyapunov exponent is positive, the system is called chaotic. Provided that an economic model can be expressed explicitly as a system of difference equations, numerical calculation of the largest Lyapunov exponent is possible. However, the dynamic specification is often unknown. In these cases, the largest Lyapunov exponent may be estimated from time series data.

<sup>8</sup>  $\text{tr}[A]$  bezeichnet die Spur einer quadratischen Matrix  $A$ .  $A^+$  bezeichnet die Moore-Penrose-Inverse einer  $n \times m$  Matrix  $A$ .

### Anhang: Einige Eigenschaften der Lyapunov-Exponenten

Wir erläutern hier einige Eigenschaften der Lyapunov-Exponenten. Weitere Details findet man z. B. bei *Benettin et al.* (1980) und *Eckmann / Ruelle* (1985).

#### Anhang A

Man überlegt sich zunächst, daß für alle  $\alpha \neq 0$  und  $v, w \in \mathbb{R}^n$  gilt:

- (i)  $\lambda(x_0, \alpha v) = \lambda(x_0, v);$   
 (ii)  $\lambda(x_0, v + w) \leq \max \{ \lambda(x_0, v), \lambda(x_0, w) \}.$

Die Menge

$$\mathfrak{S}_{x_0}(\xi) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(x_0, v) \leq \xi \}$$

bildet somit für jedes  $\xi \geq 0$  einen Unterraum in  $\mathbb{R}^n$ . Daher kann man  $m \leq n$  Zahlen  $\xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_m \geq 0$  und Unterräume  $\mathfrak{S}_{x_0}(\xi_j), j = 1, \dots, m$ , in der Weise bestimmen, daß

$$(A.1) \quad \mathfrak{S}_{x_0}(\xi_m) \subset \mathfrak{S}_{x_0}(\xi_{m-1}) \subset \dots \subset \mathfrak{S}_{x_0}(\xi_1)$$

mit

$$1 = \dim \mathfrak{S}_{x_0}(\xi_m) < \dim \mathfrak{S}_{x_0}(\xi_{m-1}) < \dots < \dim \mathfrak{S}_{x_0}(\xi_1) = n$$

Da man maximal  $n$  Unterräume auf diese Weise bilden kann, nimmt  $\lambda(x_0, v)$  höchstens  $n$  verschiedene Werte an.

Jeder Unterraum aus (A.1) mit positiver Kodimension hat in  $\mathbb{R}^n$  das Lebesgue-Maß Null. Folglich erhält man für fast alle  $v \in \mathbb{R}^n$

$$\mu(x_0) = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \mu(x_0, v).$$

#### Anhang B

Es gilt für alle  $v \in \mathbb{R}^n$

$$\mu(x_0) \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |Dg^t(x_0)v|,$$

also insbesondere

$$\mu(x_0) \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \max_{|v|=1} |Dg^t(x_0)v|.$$

Nun ist einerseits

$$\max_{|v|=1} |Dg^t(x_0)v| = \|Dg^t(x_0)\|$$

und somit

$$\mu(x_0) \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|Dg^t(x_0)\| .$$

Andererseits gilt

$$|Dg^t(x_0)v| \leq \|Dg^t(x_0)\| |v| ,$$

woraus insbesondere

$$\mu(x_0) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|Dg^t(x_0)\|$$

folgt. Damit erhalten wir

$$\mu(x_0) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|Dg^t(x_0)\| .$$

## Literatur

- Artstein, Z.* (1983), Irregular Cobweb Dynamics. *Economics Letters* 11, 15 - 17.
- Baumol, W. J. / Benhabib, J.* (1989), Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications. *Journal of Economic Perspectives* 3, 77 - 105.
- Benettin, G. / Galgani, L. / Giorgilli, A. / Strelcyn, J.-M.* (1980), Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems: A Method for Computing All of Them. *Meccanica* 15, 9 - 30.
- Day, R. H.* (1982), Irregular Growth Cycles. *The American Economic Review* 72, 406 - 414.
- Eckmann, J.-P. / Ruelle, D.* (1985), Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors. *Reviews of Modern Physics* 57, 617 - 656.
- Frank, M. / Stengos, T.* (1988), The Stability of Canadian Macroeconomic Data as Measured by the Largest Lyapunov Exponent. *Economics Letters* 27, 11 - 14.
- Gaertner, W. / Jungeilges, J.* (1988), A Non-Linear Model of Interdependent Consumer Behaviour. *Economics Letters* 27, 145 - 150.
- Kurths, J. / Herzel, H.* (1987), An Attractor in a Solar Time Series. *Physica* 25D, 165 - 172.
- Li, T. Y. / Yorke, J. A.* (1975), Period Three Implies Chaos. *American Mathematical Monthly* 82, 985 - 992.
- Lorenz, H.-W.* (1989), *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion* (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 334). Berlin.
- Mallove, E. F.* (1989), The Solar System in Chaos. *The Planetary Report* 9 (3), 4 - 7.

- May, R. M.* (1976), Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics. *Nature* 261, 459 - 467.
- Ruelle, D.* (1979), Ergodic Theory of Differentiable Dynamical Systems. *Publications Mathematiques IHES* 50, 275 - 306.
- Schmidt, K. / Stahlecker, P.* (1989), Gibt es Chaos im industriellen Sektor der Bundesrepublik Deutschland?. *Jahrbuch für Sozialwissenschaft* 40, 332 - 341.
- Takens, F.* (1981), Detecting Strange Attractors in Turbulence, in: D. Rand / L. Young (Hrsg.), *Dynamical Systems and Turbulence*. Berlin.
- Walters, P.* (1982), *An Introduction to Ergodic Theory* (Graduate Texts in Mathematics 79). New York.
- Wolf, A. / Swift, J. B. / Swinney, H. L. / Vastano, J. A.* (1985), Determining Lyapunov Exponents from a Time Series. *Physica* 16 D, 285 - 317.