

## Ökonometrische Analyse dynamischer Anteilsgleichungen

Von Gerd Ronning\*

Anteilsmodelle sind dadurch charakterisiert, daß die abhängigen Variablen Anteile sind. Solche Modelle spielen vor allem in der ökonometrischen Nachfrageanalyse und im Marketing eine Rolle. Für die Modellformulierung ergeben sich aus der speziellen Art der abhängigen Variablen Probleme, die hier insbesondere für dynamische Anteilsgleichungen dargestellt werden.

### 1. Einleitung

Restriktionen auf Parameter, die vom Ökonometriker bewußt und zusätzlich ins Modell eingeführt werden, gehören heute zum Standardinstrumentarium der ökonometrischen Disziplin. Dagegen hat sich erst in jüngster Zeit das Bewußtsein für implizite, d.h. modellimmanente Parameterrestriktion entwickelt. Diese werden vor allem durch Identitäten des betrieblichen und volkswirtschaftlichen Rechnungswesens oder auch Budgetrestriktionen bewirkt.

Ferner spielen solche Restriktionen in sogenannten Anteilsmodellen, die das Thema dieses Aufsatzes sind, eine bedeutsame Rolle. Darauf wird in Abschnitt 2 eingegangen. An dieser Stelle sollen zwei Beispiele aus anderen Bereichen der Ökonometrie das Problem, das zuerst von *Brainard/Tobin* (1968) behandelt wurde, illustrieren.

Das erste Beispiel stammt aus dem neuen Ökonometriebuch von *Klein* (1983): In einem ökonometrischen Modell werde unter anderem eine Gleichung zur Erklärung der Abschreibung formuliert, wobei die Abschreibung  $D_t$  vom Investitionsvolumen  $I_t$  und den Abschreibungen in der Vorperiode abhängen sollen, und zwar linear:

$$(1.1) \quad D_t = \beta_1 I_t + \beta_2 D_{t-1} + u_t .$$

---

\* Die Arbeit basiert auf Vorträgen, die ich im Ökonometrischen Ausschuß des Vereins für Socialpolitik im April 1984 in Rauschholzhausen und an der Freien Universität Berlin im November 1984 gehalten habe. Sie steht im Zusammenhang mit einem Projekt, das von der Stiftung Volkswagenwerk finanziell unterstützt wird. Der Autor dankt einem anonymen Gutachter für hilfreiche Hinweise.

Diesem Ansatz liegt die Vorstellung zugrunde, daß die Abschreibungen proportional zum jeweiligen Kapitalstock sind:

$$(1.2) \quad D_t = \gamma \sum_{j=-\infty}^t (I_j - D_j) + \varepsilon_t.$$

Subtrahiert man  $D_{t-1}$  von dieser Gleichung, so erhält man:

$$(1.3) \quad D_t = \frac{\gamma}{1+\gamma} I_t + \frac{1}{1+\gamma} D_{t-1} + \frac{1}{1+\gamma} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}),$$

und ein Vergleich von (1.3) mit (1.1) zeigt, daß unter der genannten Hypothese  $\beta_1$  und  $\beta_2$  sich nur durch den Proportionalitätsfaktor  $\gamma$  unterscheiden.

Das zweite Beispiel habe ich dem Ökonometriebuch von *Theil* (1971) entnommen: Dort wird im Kapitel über Simultane Gleichungsmodelle das folgende einfache Modell präsentiert:

$$(1.4) \quad C_t = \beta Y_t + u_t$$

$$(1.5) \quad C_t + I_t = Y_t$$

wobei  $I_t$  die exogene Variable ist. Warum lassen wir in der Verhaltengleichung für  $C_t$  nicht auch  $I_t$  als Einflußgröße erscheinen? Oder warum erscheint keine zweite Verhaltengleichung für  $Y_t$ ? Die reduzierte Form zeigt, daß diese Abhängigkeiten bereits implizite in unserem Modell enthalten sind, denn bei Auflösung nach  $C_t$  und  $Y_t$  ergibt sich

$$(1.6) \quad C_t = \frac{\beta}{1-\beta} I_t + \frac{1}{1-\beta} u_t$$

$$(1.7) \quad Y_t = \frac{1}{1-\beta} I_t + \frac{1}{1-\beta} u_t.$$

Auch hier bewirkt die Identität (1.5) Parameterrestriktionen, die der strukturellen Form nicht direkt anzusehen sind.

Besonderes Interesse bezüglich solcher impliziter Restriktionen haben in der Ökonometrie sogenannte *Anteilsgleichungen* gefunden. Dies sind Modelle, bei denen die abhängigen Variablen Anteile sind. Da Anteile zu eins aufzufaddieren, ergeben sich auch hier implizite Restriktionen, die in der Literatur als Aufsummierbarkeitsbedingungen oder auch als Konsistenzbedingungen, letzteres im Marketing, bezeichnet werden. In diesem Bereich werden die Modelle zur Erklärung von Marktanteilen benutzt. Ferner verwendet man sie bei der Formulierung von ökonometrischen Nachfragesystemen.

men, die der Erklärung von Budgetanteilen dienen. In dieser Arbeit untersuche ich alternative *dynamische* Anteilstmodelle, die in den beiden genannten Bereichen Anwendung finden, während in einer anderen Arbeit<sup>1</sup> auf Probleme der stochastischen Spezifikation, insbesondere bei fehlerbehafteten Anteilen eingegangen wird.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Abschnitt 2 werden implizite Parameterrestriktionen für linear abhängige Einflußgrößen behandelt. Diese Situation ist sowohl für Marktanteilstmodelle im Marketing als auch für dynamische Nachfragesysteme in Anteilsform typisch: Sobald (verzögerte oder auch zeitgleiche) Anteile als Einflußgröße spezifiziert werden, ist die lineare Abhängigkeit gegeben. Die Abschnitte 3 bis 5 behandeln dann verschiedene Aspekte dynamischer Anteilstgleichungen, unter anderem auch die Frage der *Stabilität* dieser Modelle.

## 2. Anteilstgleichungen

### 2.1 Terminologie und Symbolik

Ich verwende folgende Symbolik:  $n$  ist die Anzahl der Kategorien (Güter, Firmen etc.),  $w_{it}$  sind die beobachteten (stochastischen) und  $s_{it}$  die nichtbeobachteten (deterministischen) Anteile für Kategorie  $i$  in  $t$ ,  $u_{it}$  ist eine Störgröße,  $x_{kt}$  der Wert der  $k$ -ten Einflußgröße in  $t$ ,  $k = 1, \dots, K$ .  $w(t)$  und  $u(t)$  sind  $n$ -dimensionale Vektoren,  $x(t)$  ist ein  $K$ -dimensionaler Vektor, wobei  $x_{1t} = 1$  gilt. Griechische Buchstaben bezeichnen die unbekannten Parameter des Modells. Ich gehe davon aus, daß die Anteile aus einem positiven Merkmal gebildet sind, das einer exakten linearen Restriktion unterliegt. Andernfalls ist die Verwendung von Anteilstgleichungen unnötig restriktiv<sup>2</sup>. Alle Ergebnisse lassen sich mit leichten Modifikationen auch auf sogenannte Umsatzmodelle (z. B. das Lineare Ausgabensystem in der Nachfrageanalyse) übertragen.

### 2.2 Das lineare Anteilstmodell

Ich unterstelle, daß die Anteile linear von  $K$  verschiedenen Einflußgrößen sowie einem Absolutglied abhängen:

$$(2.1) \quad w_{it} = \alpha_i + \sum_{k=1}^K \beta_{ik} x_{kt} + u_{it}, \quad i = 1, \dots, n.$$

---

<sup>1</sup> Vgl. Ronning (1985).

<sup>2</sup> Vgl. Ronning (1985).

Damit die Anteile zu 1 aufaddieren, d.h. damit

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^n w_{it} = 1$$

gilt, müssen – sofern die  $K + 1$  Regressoren linear voneinander unabhängig sind – folgende *Aufsummierbarkeitsrestriktionen* gelten<sup>3</sup>:

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^n \beta_{ik} = 0, \quad k = 1, \dots, K$$

Man beachte, daß die Regressoren für alle Kategorien identisch, also nicht vom Index  $i$  abhängend, formuliert wurden. Sie werden als „kategorienunabhängige“ Einflußvariablen bezeichnet.

Die Restriktionen (2.4) verlangen, daß für jede der  $K$  Einflußgrößen mindestens einer der Koeffizienten  $\beta_{ik}$  negativ ist, und schließen damit Modelle aus, die nur nichtnegative Koeffizienten zulassen. Das betrifft beispielsweise *Distributed-Lag-Modelle* mit Pascal-Lagverteilung oder ähnlichem. Solche Ansätze sind demnach in Anteilsmodellen nicht zulässig, was vor allem auch deshalb beachtenswert ist, weil bei verzögerten Anteilen als Einflußgrößen oft die Vorstellung von Distributed-Lag-Ansätzen im Hintergrund steht, so besonders die der Koyckschen Transformation.

### 2.3 Anteilsmodelle mit linear abhängigen Einflußgrößen

Ein Anteilsmodell mit linear abhängigen Einflußgrößen liegt beispielsweise vor, wenn ein voller Satz von Anteilen auf der rechten Seite auftritt, wobei es unerheblich ist, ob diese Anteile verzögerte endogene Anteile oder sonstige Anteile sind. Für den ersten Fall haben *Anderson/Blundell* (1982) die dadurch entstehenden Probleme behandelt. Andererseits tauchen dieselben Probleme auch in Marktanteilsmodellen auf, in denen beispielsweise die Anteile der einzelnen Firmen am Gesamtwerbeaufwand als Einflußgrößen

---

<sup>3</sup> Oft wird zusätzlich zu (2.3) und (2.4) die Restriktion  $\sum_{i=1}^n u_{it} = 0$  angegeben. Dies ist jedoch überflüssig, da diese Restriktion äquivalent zu den beiden Restriktionen (2.3) und (2.4) ist: Einsetzen von (2.3) und (2.4) in (2.2) ergibt die Residuen-Restriktion. Andererseits folgen aus dem Einsetzen der Residuen-Restriktion in (2.2) die beiden Aufsummierbarkeitsrestriktionen. Wesentlich bei dieser Argumentation ist, daß die Gleichung (2.2) als Bestandteil des Modells angesehen wird – entsprechend der Identität (1.5) im Beispiel von Theil.

spezifiziert werden. Die folgende Analyse ist deshalb allgemeiner als bei *Anderson/Blundell* (1982). Auf die spezifisch dynamischen Spezifikationen und damit zusammenhängende Probleme geht Abschnitt 3 dann ein.

Die Eigenschaft der linearen Abhängigkeit der Regressoren, die in üblichen linearen Regressionsmodellen stets als Mangel angesehen wird, ist in Anteilsmodellen nicht unbedingt von Nachteil. Dies soll für den in der Praxis besonders oft benutzten Fall

$$(2.5) \quad K \geq n$$

besprochen werden, bei dem die Anzahl der Einflußgrößen größer (nicht kleiner) als die Zahl der Kategorien der abhängigen Variablen ist. Sowohl in der Nachfrageanalyse als auch in Marketingmodellen ist dies der Normalfall.

Es wird angenommen, daß für  $n$  der Regressoren, die ich mit  $z_{jt}$  bezeichne, eine lineare Beziehung von der Form

$$(2.6) \quad \sum_{j=1}^n z_{jt} = c \quad (c \neq 0)$$

gilt. Im Fall von Anteilen als Einflußgrößen, d.h.  $z_{jt} = w_{jt}$ , würde  $c = 1$  gelten. In der folgenden Analyse ist wichtig, daß diese Restriktion mit der zusätzlichen Restriktion

$$(2.7) \quad \sum_{j=1}^n \delta_j z_{jt} = d, \quad d \text{ eine beliebige feste Zahl}$$

dann und nur dann verträglich ist, wenn für die Koeffizienten  $\delta_j$  gilt:

$$(2.8) \quad \delta_j = \delta, \quad j = 1, \dots, n.$$

Die  $i$ -te Anteilsgleichung lautet nun bei Unterscheidung in  $x$ - und  $z$ -Variable wie folgt:

$$(2.9) \quad w_{it} = \alpha_i + \sum_{k=1}^{K-n} \beta_{ik} x_{kt} + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} z_{jt} + u_{it}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Man könnte den Ansatz noch allgemeiner formulieren, indem man mehrere Sätze von  $z$ -Variablen mit jeweils einer Restriktion vom Typ (2.6) spezifiziert. Bei Anderson und Blundell geschieht das in der Weise, daß Anteile mit verschiedenen Verzögerungen in das Modell als Einflußgrößen eingehen. In Marketingmodellen werden Anteile verschiedener Merkmale (beispiels-

weise Werbeaufwand, Distribution, Preis sowie der verzögerte Marktanteil)<sup>4</sup> als mögliche Einflüsse berücksichtigt. Das Grundproblem dieser Art von Anteilstgleichungen läßt sich jedoch auch an dem einfacheren Ansatz (2.9) demonstrieren, für das sich bekanntlich die folgenden Aufsummierbarkeitsrestriktionen – zur Sicherstellung von (2.2) – ergeben<sup>5</sup>:

$$(2.10) \quad \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} = k/c, \quad j = 1, \dots, n$$

$$(2.11) \quad \sum_{i=1}^n \beta_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, K - n$$

$$(2.12) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 - k$$

Besonders bedeutsam ist die Restriktion (2.10): Wenn wir davon ausgehen, daß  $\gamma_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ , d.h.

$$(2.13) \quad w_{it} = \alpha_i + \sum_k \beta_{ik} x_{kt} + \gamma_{ii} z_{it} + u_{it},$$

dann muß

$$(2.14) \quad \gamma_{ii} = \gamma, \quad i = 1, \dots, n$$

gelten<sup>6</sup>. Unter anderem bedeutet dann eine Nullrestriktion in Form einer Ausschließung der  $z$ -Variablen in einer Gleichung die Ausschließung für alle  $n$  Anteilstgleichungen. Andererseits sichert die lineare Abhängigkeit der Regressoren in (2.6), daß überhaupt eine Formulierung wie in (2.13) möglich ist. Ich präsentiere später ein dynamisches AIDS-Modell, das diese Restriktion nicht besitzt und deshalb logisch inkonsistent ist. Siehe dazu Abschnitt 2.4.

Da die Linearkombination der  $z$ -Variablen gemäß (2.6) nicht linear unabhängig vom Einsvektor (Absolutglied) ist, sind die Parameter in den Anteilstgleichungen (2.9) nicht schätzbar. Jedoch erreicht man durch Elimination der Variablen  $z_{it}$  die folgende schätzbare Form:

---

<sup>4</sup> Siehe Ghosh u.a. (1984), 204. Ungewöhnlich ist die Benutzung eines „Preisannteils“, denn der Preis ist ein intensives Merkmal!

<sup>5</sup> Die Aufsummierbarkeitsrestriktionen für den Ansatz von Anderson/Blundell (1982) werden in (3.5) angegeben. – Die Restriktion (2.10) basiert auf dem allgemeinen Ergebnis (2.8).

<sup>6</sup> Für autoregressive Prozesse der Störvariablen haben Berndt/Savin (1975) bereits auf dieses Resultat hingewiesen. Klevmarken (1979) spezifiziert ein AR (1)-Modell für Anteile, ohne die Restriktion zu beachten.

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad w_{it} &= \alpha_i + \sum_{k=1}^{K-n} \beta_{ik} x_{kt} + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_{ij} z_{jt} + \gamma_{in} \left( c - \sum_{j=1}^{n-1} z_{jt} \right) + u_{it} \\
 &= (\alpha_i + c \gamma_{in}) + \sum_{k=1}^{K-n} \beta_{ik} x_{kt} + \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_{ij} - \gamma_{in}) z_{jt} + u_{it} \\
 &= \alpha_i^* + \sum_{k=1}^{K-n} \beta_{ik} x_{kt} + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_{ij}^* z_{jt} + u_{it}
 \end{aligned}$$

Wie man schnell nachprüfen kann, sind die Aufsummierbarkeitsrestriktionen in diesem Modell, die sich nach (2.3) und (2.4) bestimmen, konsistent mit den Aufsummierbarkeitsrestriktionen des ursprünglichen Modells, (2.10) bis (2.12). Eine weitere Frage ist, ob die Parameter  $\alpha_i$  und  $\gamma_{ij}$  aus den geschätzten Parametern  $\alpha_i^*$  und  $\gamma_{ij}^*$  bestimmt werden können. Diese Frage ist zu verneinen, denn die geschätzten  $n + (n - 1)n = n^2$  Koeffizienten unterliegen  $n$  Restriktionen, so daß  $n(n - 1)$  unabhängige schätzbare Parameter vorliegen. Dagegen haben wir  $n(n + 1)$  ursprüngliche Koeffizienten, die  $n + 1$  Restriktionen unterliegen; folglich gibt es  $(n + 1)n - (n + 1) = (n + 1)(n - 1) > n(n - 1)$  unabhängige ursprüngliche Koeffizienten.

Wir erhalten also das folgende Ergebnis, das auch ein Teilergebnis bei *Anderson/Blundell* (1982) ist:

Im Anteilsmodell (2.9) unter der Restriktion (2.6) sind nur die zu den unrestrictierten Einflußgrößen gehörenden Koeffizienten  $\beta_{ik}$  identifiziert. Für das Modell von Anderson/Blundell lautet das Fazit: “... Lack of identification on the lag structure of the dependent variable does not hamper the identification of the parameters associated with economic theory” (1982, S. 1566).

## 2.4 Ein unzulässiges dynamisches AIDS-Modell

*Blanciforti/Green* (1983) haben das folgende „dynamische AIDS-Modell“ analysiert:

$$(2.16) \quad w_{it} = \alpha_i + \gamma_i q_{i,t-1} + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \log(p_{jt}) + \beta_{i,n+1} \log(M_t/P_t) + u_i$$

wobei  $q_{i,t-1}$  als Indikator für die Gewohnheitsbildung im Konsumverhalten („habit persistence“) angesehen wird. Offensichtlich ist  $q_{i,t-1}$  eine kategorienabhängige Einflußgröße. Andererseits gibt es keine (ökonomischen) Gründe, um für diese Variable eine Restriktion von der Form (2.6) zu fordern. Dies führt jedoch dazu, daß man entweder  $\gamma_i$  nicht mehr als zeitinvarianten Parameter betrachten kann oder überhaupt auf die Identifikation

des Terms  $\alpha_i + \gamma_i q_{i,t-1}$  verzichtet. Denn die Aufsummierbarkeitsrestriktion (2.2) fordert

$$(2.17) \quad \text{für alle } t: \sum_{i=1}^n \gamma_i q_{i,t-1} = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Die Schätzwerte für  $\gamma_1$ , die in der Arbeit angegeben werden, sind also eigentlich nicht interpretierbar. Da sie zudem die Berechnung der Elastizitäten beeinflussen, sind auch diese Werte nicht sinnvoll.

## 2.5 Dynamische Marktanteilsmodelle

Im Journal of Marketing läuft seit längerem eine Diskussion über sinnvolle Spezifikationen zur Erklärung von Marktanteilen eines Gutes, das von verschiedenen Firmen als Marke („brand“) angeboten wird. Beispielsweise benutzen Ghosh u. a. (1984) das folgende lineare Anteilsmodell:

$$(2.18) \quad w_{it} = \alpha_i + \sum_{k=1}^K \beta_{ik} x_{ikt}^* + u_{it}$$

wobei  $K = 4$  und

$w_{it}$  Marktanteil der Marke  $i$  in  $t$

$x_{i1t}$  Werbeausgaben für  $i$  in  $t$

$x_{i2t}$  Preis per Unze für  $i$  in  $t$

$x_{i3t}$  Distribution von  $i$  in  $t$  (= 1 falls Distribution, = 0 sonst)

$x_{i1t} = w_{i,t-1}$  verzögerter Marktanteil

sowie

$$x_{ikt}^* = \frac{x_{ikt}}{\sum_{j=1}^n x_{jkt}} \quad (\text{„Anteil“})$$

Auf der rechten Seite erscheinen also neben dem Absolutglied ausschließlich *Anteile als Einflußgrößen*, wobei jeweils nur die eigene Marke berücksichtigt wird. Obwohl in der Marketing-Literatur das Problem der impliziten Restriktionen bereits sehr viel länger als in der Literatur der Nachfrage-theorie diskutiert wird und insbesondere bekannt ist, daß – entsprechend (2.14) – die Parameter-Restriktionen

$$(2.19) \quad \beta_{ik} = \beta_k, \quad k = 1, \dots, K$$

gelten müssen<sup>7</sup>, schätzen die Autoren das Modell alternativ (!) mit und ohne Restriktion und sprechen im zweiten Fall von „erweiterter Parametrisierung“, die aus Gründen der geringen Verzerrung und besseren Interpretation Vorteile besitze<sup>8</sup>.

Nach meiner Meinung ist dies schlichter Unsinn. Allenfalls kann man die Mißachtung der Restriktionen dann billigen, wenn man an der Prognose der Anteile interessiert ist. Jedoch geht es diesen Autoren, ebenso wie Blanciforti und Green beim dynamischen AIDS-Modell, vorrangig um die Bestimmung von Elastizitäten, also um die Parameterschätzwerte.

### 3. Kurz- und langfristige Beziehungen im Anteilsmodell

In den letzten Jahren hat sich in ökonometrischen Zeitreihenmodellen ein Ansatz herauskristallisiert, der vor allem mit dem Namen David Hendry verbunden ist, der jedoch in der Wirtschaftstheorie seit langem genutzt wird: Man postuliert eine langfristige statische Steady State- oder Gleichgewichts-Lösung, die unbeobachtbar ist, und modelliert die kurzfristigen Zusammenhänge durch ein relativ flexibles Zeitreihenmodell, meistens vom autoregressiven Typ. Gleichzeitig wird unterstellt, daß dieses Zeitreihenmodell mit der Parametrisierung der langfristigen Beziehung konsistent ist<sup>9</sup>.

Es ist der Verdienst von *Anderson/Blundell* (1982), daß sie diesen ursprünglich für einzelne Gleichungen entwickelten Ansatz auf Systeme von Anteilsgleichungen übertragen haben. Gleichzeitig haben sie damit eine Anregung von *Deaton/Muellbauer* (1980) aufgegriffen, die eine Dynamisierung ihres AIDS-Modells als Erweiterung vorgeschlagen haben. Dabei muß beachtet werden, daß das AIDS-Modell nur in der – in der Praxis benutzten – approximativen Form ein lineares Modell ist.

Ich möchte den Ansatz hier ganz kurz skizzieren. Zwischen dem Anteilsvektor  $w(t)$  und einen Vektor von Einflußgrößen,  $x(t)$ , soll folgende Gleichgewichtsbeziehung bestehen:

$$(3.1) \quad w(t) = \Pi x(t) \quad (\text{Langfristige Beziehung})$$

$$(n \times 1) \quad (n \times K) (k \times 1)$$

Da  $x(t)$  als erstes Element eine 1 besitzt, gilt die Aufsummierbarkeitsrestriktion

<sup>7</sup> Siehe *Naert/Weverbergh* (1981) und die dort genannte Literatur.

<sup>8</sup> Siehe *Ghosh* u.a. (1984), 204.

<sup>9</sup> Siehe dazu beispielsweise *Davidson* u.a. (1978), 680 ff.

$$(3.2) \quad e' \Pi = (1, 0, \dots, 0)$$

wobei  $e = (1, 1, \dots, 1)'$ .

Nun wird angenommen, daß kurzfristige Veränderungen in  $x(t)$  und ihre Wirkung auf  $w(t)$  durch den folgenden Ansatz modellierbar seien:

$$(3.3) \quad \begin{array}{ll} B^*(L) w(t) = \Gamma^*(L) x(t) + u(t) & \text{(Kurzfristige Beziehung)} \\ (n \times n) & (n \times K) \end{array}$$

Dabei bezeichnet  $L$  den Lag-Operator, und die Lag-Polynom-Matrizen haben folgende Form:

$$(3.4) \quad \begin{array}{l} B^*(L) = I + B_1^* L + \dots + B_p^* L^p \\ \Gamma^*(L) = \Gamma_0^* + \Gamma_1^* L + \Gamma_2^* L^2 + \dots + \Gamma_q^* L^q \end{array}$$

Für die Parameter müssen folgende Aufsummierbarkeitsrestriktionen gelten:

$$(3.5) \quad \begin{array}{ll} e' B_j^* = k_j e', & j = 1, \dots, p \\ \sum_j k_j = k, & j = 1, \dots, p \\ e' \Gamma_0^* = ((1 - k), 0, \dots, 0) \\ e' \Gamma_j^* = 0, & j = 1, \dots, q \end{array}$$

Diese Restriktionen sind eine Erweiterung der Ergebnisse in (2.10) bis (2.12).

Falls  $B^*(L)$  regulär ist, können wir anstelle von (3.3) auch schreiben:

$$(3.6) \quad w(t) = [B^*(L)]^{-1} \Gamma^*(L) x(t) + [B^*(L)]^{-1} u(t)$$

Ein Vergleich der Erwartungswerte von (3.6) und (3.1) ergibt:

$$(3.7) \quad \Pi = [B^*(1)]^{-1} \Gamma^*(1).$$

Demnach ist die Bestimmung der langfristigen Beziehung aus der Schätzung des kurzfristigen Modells zwar möglich, jedoch stellt (3.7) eine „unangenehme Parametrisierung“<sup>10</sup> zur Bestimmung der langfristigen Beziehung dar.

---

<sup>10</sup> Anderson/Blundell (1982), 1561.

Statt dessen kann man jedoch die äquivalente Form

$$(3.8) \quad \Delta w(t) = -B(L)\Delta w(t) + \Gamma(L)\Delta \tilde{x}(t) \\ - A[w(t-p) - \Pi x(t-q)] + u(t)$$

betrachten, in der – für  $p = q$  – die langfristige Beziehung in großen Klammern enthalten ist. Dabei sind  $\Delta$  der Differenzenoperator und  $B(L)$ ,  $\Gamma(L)$  und  $A := B(1)$  Polynom-Matrizen, ferner ist  $\tilde{x}(t)$  der Vektor  $x(t)$  ohne das Eins-Element.

Die Formulierung (3.8) birgt jedoch (ebenso wie (3.3)) noch das Problem der Identifikation bzw. der exakten Multikollinearität durch die Berücksichtigung verzögerter Anteile. Darauf bin ich bereits in Abschnitt 2.3 eingegangen. Deshalb genügt hier der Hinweis, daß die Koeffizienten der langfristigen Beziehung, also die Koeffizienten der Matrix  $\Pi$ , auch in der schätzbaren Form, auf deren Wiedergabe für dieses Modell hier verzichtet wird, identifizierbar sind<sup>11</sup>. Daneben besteht jedoch – wie in jedem Zeitreihenmodell – das Problem, die maximalen Verzögerungen (Lags) für  $w$  und  $x$  festzulegen. Vorausgesetzt, es stehen genügend lange Zeitreihen zur Verfügung und die Annahme der zeitlichen Strukturkonstanz ist nicht zu heroisch, dann kann man in univariaten Zeitreihenmodellen oder auch in bivariaten Zeitreihenmodellen ein Informationsmaß vom Akaike-Typ benutzen, um die maximalen Lag festzulegen<sup>12</sup>.

In unserem Fall haben wir es jedoch mit einem Zeitreihenvektor von der Dimension  $n + K$  (bzw.  $n + K - 1$ ) zu tun. Selbst wenn wir die endogenen Variablen allein betrachten, handelt es sich um einen  $n$ -varianten Zeitreihenvektor. Ferner haben die Aufsummierbarkeitsrestriktionen Konsequenzen für die Bestimmung der maximalen Verzögerung in den einzelnen Anteilsgleichungen. Beispielsweise müssen im Fall  $n = 2$  beide Anteilsgleichungen identische Lag-Länge aufweisen<sup>13</sup>. Auch *Anderson/Blundell*<sup>14</sup> weisen dar-

<sup>11</sup> Siehe auch *Anderson/Blundell* (1982), 1566.

<sup>12</sup> Siehe dazu beispielsweise *Wolters* (1984) und *Kirchgässner/Wolters* (1985).

<sup>13</sup> Für  $n = 2$  und Vernachlässigung der exogenen Variablen außer dem Absolutglied lautet der Ansatz (3.3):

$$w_{it} = \alpha_i + \sum_{j=0}^p (\beta_{i1}^{(j)} w_{1,t-j} + \beta_{i2}^{(j)} w_{2,t-j}) + u_{it}, \quad i = 1, 2.$$

Gemäß (3.5) gilt

$$\beta_{11}^{(j)} + \beta_{21}^{(j)} = \beta_{12}^{(j)} + \beta_{22}^{(j)} = k_j, \quad j = 1, \dots, p.$$

Sofern der  $p$ -te Lag in der Gleichung 1 ausgeschlossen wird, gilt

$$\beta_{21}^{(p)} = \beta_{22}^{(p)} = k_p.$$

Dann erhalten wir für Gleichung 2 die folgende Form:

$$w_{2t} = (\alpha_2 + k_p) + \sum_{j=1}^{p-1} (\beta_{11}^{(j)} w_{1,t-j} + \beta_{12}^{(j)} w_{2,t-j}) + u_{2t}$$

d.h. beide Anteilsgleichungen haben maximale Verzögerung  $p - 1$ .

auf hin, daß es sehr „irreführend“ (misleading) wäre, wenn die Lag-Länge für jede Anteilstgleichung separat bestimmt würde, ohne jedoch konkret anzugeben, welche Methoden man anwenden soll. In ihren eigenen Arbeiten (*Anderson/Blundell* (1982), (1983), (1984)) fixieren sie die maximale Verzögerung mit 1 bzw. 4 Perioden unabhängig vom Datenbefund. Dagegen haben *Veal/Zimmermann* (1986) das Akaike-Informationsmaß verwendet. Wegen der großen Anzahl von Parametern beschränken aber auch sie sich auf Verzögerungen zwischen 1 und 4 Perioden<sup>14</sup>.

#### 4. Stabilität dynamischer linearer Anteilstgleichungen

Ich beginne mit dem autoregressiven Anteilstmodell, wie es beispielsweise von *Klevmarken* (1979) in der Nachfrageanalyse verwendet wurde:

$$(4.1) \quad w_{it} = \alpha_i + \beta_i w_{i,t-1} + u_{it}$$

Allerdings berücksichtigt Klevmarken nicht die Aufsummierbarkeitsrestriktionen

$$(4.2) \quad \beta_i = \beta, \quad i = 1, \dots, n.$$

Um Stationarität zu sichern, wird im allgemeinen angenommen, daß

$$(4.3) \quad 0 < \beta < 1$$

gilt. Dazu sind im Fall von Anteilstgleichungen jedoch zwei Bemerkungen notwendig:

- (a) Streng genommen kann  $u_{it}$  kein „weißes Rauschen“ sein, da wegen der Variation in einem abgeschlossenen Intervall keine Homoskedastizität möglich ist.
- (b) Die Bedingung (4.3) sichert nicht, daß  $E(w_{it})$  zwischen Null und 1 liegt. Verwenden wir die übliche Formel für *AR* (1)-Prozesse, so gilt nämlich  $E(w_{it}) = \alpha_i / (1 - \beta)$ . Demnach ist das (0,1)-Intervall verletzt, sofern die  $\alpha_i$  nicht alle positiv sind. Die Aufsummierbarkeit ist dagegen immer gesichert.

Betrachten wir nun die allgemeine Formulierung für einen *AR* (1)-Vektor-Prozeß der Anteile, also

$$(4.4) \quad w(t) = \underline{a} + B_1 w(t-1) + u(t),$$

---

<sup>14</sup> *Anderson/Blundell* (1982), 1561.

<sup>15</sup> Veal und Zimmermann berechnen das Informationsmaß für *identische* Lag-Länge in allen  $n$  Anteilstgleichungen für unterschiedlichen maximalen Lag und wählen diejenige Spezifikation aus, für die sich das größte Gesamt-Informationsmaß (= Summe der Informationsmaße in den einzelnen Gleichungen) ergibt.

so ist Stationarität gesichert, wenn die Eigenwerte von  $B_1$  alle absolut kleiner als 1 sind. Außerdem müssen die folgenden Aufsummierbarkeitsrestriktionen erfüllt sein:

$$(4.5) \quad e' B_1 = k_1 e$$

d.h. die Spaltensummen in  $B_1$  sind alle identisch groß. Aber man kann (4.5) auch als Eigenwertaufgabe für  $B_1$  interpretieren. Dann sieht man, daß die Spaltensummen  $k_1$  wegen der Stationarität absolut genommen kleiner als 1 sein müssen. Man erkennt daran, daß Stationaritäts- und Aufsummierbarkeitsrestriktionen nicht unabhängig voneinander sind.

## 5. Nichtlineare dynamische Anteilstgleichungen

Tabelle 5/1 listet einige nichtlineare dynamische Anteilstmodelle auf, die in der ökonometrischen Nachfrageanalyse und im Marketing zur Zeit verwendet werden. In allen aufgeführten Ansätzen drückt die verzögerte endogene Variable  $w_{i,t-1}$  oder eine Transformation davon ( $q_{i,t-1}$ ) die Idee aus, daß die zu erklärenden Anteile auch durch das Verhalten der Anteile in den vorhergehenden Perioden beeinflußt werden. Im Englischen spricht man in diesem Zusammenhang von „habit persistence“. In der Nachfrageanalyse steht die verzögerte Variable oft auch als Ersatz für nicht beobachtbare Zustandsvariable wie etwa die Ausstattung der Haushalte oder deren Konsumgewohnheiten. In der Tabelle 5/1 habe ich keine Ansätze berücksichtigt, die verzögerte *exogene* Variable einschließen.

Man beachte, daß für nichtnegative Einflußgrößen das Attraktionsmodell als einziges stets das Intervall (0,1) für die Anteile einhält. Ferner ist bemerkenswert, daß nur bei zwei der fünf Ansätze Aufsummierbarkeitsrestriktionen für Parameter auftreten, die zudem nicht alle Parameter im jeweiligen Modell betreffen.

Das Modell (3) ergibt sich aus (2), zweite Zeile, wenn man die Einflußgrößen  $\log(p_{jt}/M_t)$  als (bezüglich  $j$ ) konstant annimmt und  $w_{i,t-1}$  statt  $q_{i,t-1}$  benutzt. Obwohl dieses Modell für die Praxis sicher nicht relevant ist, habe ich es wegen der Verwandtschaft mit dem Translog-Modell aufgeführt, um mit seiner Hilfe Aussagen über die Stabilität des Modells zu bekommen. Vernachlässigt man in (3) den Störterm  $u_{it}$  und setzt

$$(5.1) \quad w_{it} = w_{i,t-1} = w_i,$$

dann ergibt sich im Fall  $n = 2$  folgende quadratische Gleichung für  $w_1$ :

$$(5.2) \quad (\gamma_1 - \gamma_2) w_1^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 - (\gamma_1 - \gamma_2)) w_1 - \alpha_1 = 0.$$

Tabelle 5/1: Nichtlineare dynamische Anteilsgleichungen

No. Bezeichnung	Spezifikation	Aufsummierbarkeitsrestriktion	Quelle
(1) LES mit Gewohnheitsbildung	$w_{it} = \gamma_i p_{it} q_{i,t-1} / M_t$ + $\alpha_i \left( 1 - \sum_j \gamma_j p_{jt} q_{j,t-1} / M_t \right) + u_{it}$	$\sum_j \alpha_j = 1$	Klevmarken (1979)
(2) Translog mit Gewohnheitsbildung	$w_{it} = \delta_i w_{i,t-1} + (1 - \delta_i) \frac{\alpha_i + \sum_j \beta_{ij} \log(p_{jt}/M_t)}{\sum_k (\alpha_k + \sum_j \beta_{kj} \log(p_{jt}/M_t))} + u_{it}$	$\delta_i = \delta$	Kirchgäßner (1979)
	$w_{it} = \frac{\alpha_i + \sum_j \beta_{ij} \log(p_{it}/M_t) + \gamma_i q_{i,t-1}}{\sum_k (\alpha_k + \sum_j \beta_{kj} \log(p_{jt}/M_t) + \gamma_k q_{k,t-1})} + u_{it}$		Conrad (1977)

<p>(3) Dynamisches Anteilsmodell</p> $w_{it} = \frac{\alpha_i + \gamma_i w_{i,t-1}}{\sum_k (\alpha_k + \gamma_k w_{k,t-1})} + u_{it}$	<p>(4) Multiplikatives Marktanteilsmodell</p> $w_{it} = \alpha_i \prod_{k=1}^K (x_{ikt}^* \beta_{ik}) \exp(u_{it}),$ $x_{ikt}^* = x_{ikt} / \sum_{j=1}^n x_{jkt}$	<p>(5) Attraktionsmodell</p> $w_{it} = \frac{A_{it}}{\sum_j A_{jt}}, \quad A_{it} = \alpha_i \prod_{k=1}^K (x_{it} \beta_{ik}) \exp(u_{it})$
---	---	--

**Bemerkungen:** Für die Marktanteilsmodelle wurde nicht die Originalliteratur angegeben.  
 In diesen Modellen ist  $x_{ikt} = w_{i,t-1}$ .  
 $M_t$  gibt die Gesamtausgaben (= „Einkommen“) an.

Für  $\gamma_1 = \gamma_2$  erhalten wir daraus

$$(5.3) \quad w_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

als langfristige Lösung, während im allgemeinen zwei reelle Lösungen für  $w_1$  bestehen, sofern *beide*  $\alpha_i$  negativ sind, wie dies in Translogmodellen als sinnvoll unterstellt wird<sup>16</sup>.

Diese wenigen Bemerkungen können nur andeutend darauf hinweisen, daß die Aspekte der Stationarität bzw. Stabilität in dynamischen Anteilstgleichungen bisher kaum beachtet wurden. Mir ist allerdings klar, daß hier, wenn überhaupt, nur im linearen Fall bald Ergebnisse zu erwarten sind, auf den in Abschnitt 4 ebenfalls kurz eingegangen wurde.

### Zusammenfassung

In linearen dynamischen Anteilstgleichungen vom autoregressiven Typ sind umfangreiche modellimmanente Parameterrestriktionen zu beachten, die auch auf die Stabilitätsanalyse und die Auswahl eines optimalen Modells Einfluß haben.

### Summary

Linear dynamic share equations of autoregressive type have to recognize a huge amount of implicit restrictions on the structural parameters. The paper shows that stability analysis and the choice of an optimal model cannot be treated independently of those restrictions.

### Literatur

- Anderson, G. J. / Blundell, R. W. (1982), Estimation and Hypothesis Testing in Singular Equations Systems. Econometrica 50, 1559 - 1571.*
- / - (1983), Testing Restrictions in a Flexible Dynamic Demand System: An Application to Consumers' Expenditure in Canada. Review of Economic Studies 50, 397 - 410.*
- / - (1984), Consumer Non-Durables in the U.K.: A Dynamic Demand System. Economic Journal, Conference Papers 94, 35 - 44.*
- Berndt, R. E. / Savin, N. E. (1975), Estimation and Hypothesis Testing in Singular Equations Systems with Autoregressive Errors. Econometrica 43, 937 - 957.*

<sup>16</sup> Siehe z. B. *Kirchgäßner* (1979), S. 2 - 32.

- Blanciforti, L. / Green, R.* (1983), An Almost Ideal Demand System Incorporating Habits: An Analysis of Expenditures on Food and Aggregate Commodity Groups. *Review of Economics and Statistics* 65, 511 - 515.
- Brainard, W. C. / Tobin, J.* (1968), Pitfalls in Financial Model Building. *American Economic Review, Papers and Proceedings* 58, 99 - 122.
- Conrad, K.* (1977), Gewohnheitsbildung und dynamische Nutzen- und Nachfragefunktionen. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik* 191, 464 - 491.
- Davidson, J. E. H. / Hendry, D. F. / Srba, F. / Yeo, St.* (1978), Econometric Modelling of the Aggregate Time-Series Relationship between Consumers' Expenditure and Income in the United Kingdom. *Economic Journal* 88, 661 - 692.
- Deaton, A. / Muellbauer, J.* (1980), An Almost Ideal Demand System. *American Economic Review* 70, 312 - 326.
- Ghosh, A. / Neslin, S. / Shoemaker, R.* (1984), A Comparison of Market Share Models and Estimation Procedures. *Journal of Marketing Research* 21, 202 - 210.
- Kirchgässner, G.* (1979), Systeme von Konsumnachfragefunktionen. ZENCAP Working Paper 6, August 1979.
- Kirchgässner, G. / Wolters, J.* (1985), Der Zusammenhang zwischen der Zinsentwicklung in den Vereinigten Staaten, der Bundesrepublik Deutschland und der Schweiz, in: H. Giersch (Hrsg.), *Probleme und Perspektiven der weltwirtschaftlichen Entwicklung*. Berlin.
- Klein, L.* (1983), *Lectures in Econometrics*. Amsterdam.
- Klevmarken, N. A.* (1979), A Comparative Study of Complete Systems of Demand Functions. *Journal of Econometrics* 10, 165 - 191.
- Naert, P. / Weverbergh, M.* (1981), On the Prediction Power of Market Share Attraction Models. *Journal of Marketing Research* 18, 146 - 153.
- Ronning, G.* (1985), Probleme bei der Schätzung fehlerbehafteter Anteilsgleichungen. Manuskript, erscheint demnächst in den Jahrbüchern für Nationalökonomie und Statistik.
- Theil, H.* (1971), *Principles of Econometrics*. Amsterdam.
- Veall, M. R. / Zimmermann, K. F.* (1986), A Monthly, Dynamic Expenditure System for Germany with Different Kinds of Households. *Review of Economics and Statistics* 68, 256 - 264.
- Wolters, J.* (1984), Ökonometrische Analyse von Inflationserwartungen. Ansätze, Probleme und eine empirische Untersuchung für Investitionsgüterpreise. *Allgemeines Statistisches Archiv* 68, 307 - 331.