

## Modelle zur Planung von Zinsänderungsrisiken und Zinsänderungschancen

Von Bernd Rudolph und Bernhard Wondrak\*

Zunehmende Zinsfluktuationen haben in den letzten Jahren zu wachsenden Rendite- und Vermögensrisiken aus Anlagen in festverzinslichen Wertpapieren geführt. Anlagestrategien, die die mittlere Kapitalbindungsdauer als Portefeuilleauswahlkriterium benutzen (sog. Duration-Strategien), können eine Immunisierung des Wertpapierportefeuilles gegen Zinsänderungsrisiken bewirken. Solche Immunisierungsstrategien implizieren aber eine extreme Risikoaversion des Investors. Der hier vorgestellte Ansatz vermeidet diese Annahme und ermöglicht die Entwicklung von Instrumenten zur flexiblen Chancen-Risiken-Steuerung von Festzinsportefeuilles.

### A. Problemstellung

Obwohl Anlagen in festverzinslichen Wertpapieren gemeinhin als besonders risikoarm angesehen werden, unterliegen sie bestimmten Risiken.

Gegenstand des vorliegenden Beitrags ist ausschließlich das Zinsänderungsrisiko als das für festverzinsliche Wertpapiere typische Risiko. Bei der Berücksichtigung dieses Risikos in der Portefeuilleplanung wird davon ausgegangen, daß der Anleger keine zuverlässigen Informationen über die zukünftige Marktzinsentwicklung hat. Dieser unvollkommene Informationsstand wird in der Annahme präzisiert, daß der Anleger bei seinen Dispositionen keine speziellen Zinsprognosen berücksichtigt, sondern das Anlageproblem als Entscheidungsproblem bei Unsicherheit im engeren Sinne betrachtet.

Zur Lösung solcher Portefeuilleplanungsprobleme bei Unsicherheit sind in der Anlagepraxis und in der Literatur Anlagestrategien mit dem Ziel entwickelt worden, durch Mischung von Wertpapieren mit unterschiedlichen Restlaufzeiten das Zinsänderungsrisiko zu begrenzen.<sup>1</sup> Die Rationalität dieser als Laufzeitstrategien bekannten Anlageempfehlungen ist allerdings nicht gesichert.<sup>2</sup>

---

\* Die Verfasser arbeiten an einem von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsprojekt über spezielle Verfahren zur Immunisierung von Portefeuilles festverzinslicher Wertpapiere.

<sup>1</sup> Vgl. Cheng (1962), Wolf (1969), Crane (1971), Fisher / Weil (1971), Watson (1972), Bradley / Crane (1975) und Fogler / Groves / Richardson (1977).

<sup>2</sup> Vgl. Bühler (1983), 116 - 131.

Entscheidungstheoretisch fundiert sind dagegen die auf der sogenannten „Duration“ als Kennzahl der mittleren Restlaufzeit von Wertpapieranlagen aufbauenden *Immunisierungsstrategien*, die zu Wertpapierportefeuilles führen, deren Anlageergebnisse von möglicherweise eintretenden, aber nicht abschätzbaren Änderungen des Zinsniveaus und/oder der Zinsstruktur nicht negativ beeinflusst werden. Auf dem Konzept dieser Immisierungsstrategien, das im Teil B zusammenfassend dargestellt und als Anlageempfehlung für sehr risikoscheue Wertpapierkäufer empfohlen wird, baut die Idee einer Risiko-Chancen-Planung von Wertpapierportefeuilles auf, die eine Immunisierung der Anlageergebnisse auf einer vom Anleger vorgegebenen Mindestrendite zuläßt. Im Teil C wird mit der Entwicklung eines Modells zur *Teilimmunisierung* des Anlageergebnisses gegenüber unvorhergesehenen Marktzensänderungen ein Vorschlag zur Portefeuilleplanung für Wertpapieranleger formuliert, die keine extreme Risikoscheu in der Weise zeigen, daß sie Risiken aus Marktzensänderungen auch bei entgegenstehenden Zinsänderungschancen mit allen Mitteln zu vermeiden trachten. Das Ziel der Anleger besteht vielmehr in der Maximierung der Zinsänderungschancen bei einer festen Begrenzung der Zinsänderungsrisiken. Im Teil D werden mögliche Weiterentwicklungen, Modifikationen und Anwendungsmöglichkeiten der entwickelten Teilimmunisierungsstrategie aufgezeigt.

## B. Das Grundmodell der Immunisierung

### 1. Begriff und Entwicklung des Duration-Konzepts

Jede Einzahlung aus einer Kapitalanlage unterliegt einem Zinsänderungsrisiko, sofern der Anleger die Zahlungsmittel nicht unmittelbar zum Zahlungszeitpunkt entnimmt. Geht man beispielsweise davon aus, daß der Anleger am Ende seiner Planungsperiode über das Portefeuillevermögen in einem Betrag verfügen will, dann unterliegen alle Zins- und Tilgungszahlungen, die nicht genau zum Planungshorizont erfolgen, dem Zinsänderungsrisiko. Der Einfluß einer möglichen Zinsänderung auf den Wert einer Einzahlung ist dabei um so größer, je weiter der Einzahlungstermin vom Planungshorizont entfernt ist.

Berechnet man für ein Wertpapier oder ein Wertpapierportefeuille mit unterschiedlichen Einzahlungszeitpunkten einen gewichteten Mittelwert der Fälligkeitszeitpunkte, so kann der Abstand  $D$  dieses Mittelwertes vom Planungshorizont bzw. einem anderen Bezugszeitpunkt als Indikator für die Zinsempfindlichkeit der Vermögensanlage herangezogen werden.

*Macaulay*<sup>3</sup> hat diesen Indikator  $D$  entdeckt, als Duration bezeichnet und ihn als skalares Maß zur Erfassung der Zeitstruktur der Zahlungen aus einer

Kuponanleihe in die Literatur eingeführt. Von *Redington*<sup>4</sup> stammt der Begriff der Immunisierung. Redington hat in einem Beitrag zur Anlagepolitik von Versicherungsunternehmen gezeigt, daß die Nettoposition der Barwerte der Schaden- und Prämienzahlungen von Versicherungen dann gegen Zinsänderungen immun ist, wenn die Duration-Werte beider Zahlungsströme gleich sind und die Streuung der Fälligkeitstermine des Prämienstroms nicht kleiner ist als die Streuung der Zeitpunkte der Schadenzahlungen. Wesentliche Impulse erhielt die Forschung zur Immunisierung von Wertpapieranlagen gegen nicht antizipierte Zinsänderungen mit der Arbeit von *Fisher* und *Weil*<sup>5</sup>, die zeigen konnten, daß das Zinsänderungsrisiko für Anlagen in festverzinslichen Wertpapieren mit der Duration-Strategie weitgehend eliminiert werden kann. *Hopewell* und *Kaufman*<sup>6</sup> verwendeten die Duration-Kennzahl eines Festzinspapiers als Proportionalitätsfaktor zur Abschätzung der Kursänderungen des Titels bei kleinen Marktzinsänderungen.<sup>7</sup>

Heute haben sich für die Duration-Analyse zwei Hauptanwendungsbereiche herausgebildet:

1. Mit Hilfe von Duration-Analysen wird die Zinsempfindlichkeit des Marktwertes von Unternehmen abgeschätzt und gesteuert.<sup>8</sup>
2. Die Duration-Analyse wird als Steuerungskonzept in der Portfeuilleplanung zur Immunisierung gegen unverhoffte Zinsänderungsrisiken eingesetzt.<sup>9</sup>

Die Weiterentwicklung der Duration-Analyse setzt an einem Kritikpunkt an, der es zweckmäßig erscheinen läßt, zunächst die formale Herleitung einer Immunisierungsstrategie zu betrachten, damit die Prämissen einer solchen theoretischen Analyse hervorgehoben werden können.

---

<sup>3</sup> Vgl. *Macaulay* (1938). Macaulay benutzt in seiner empirischen Arbeit den Effektivzins der untersuchten Anleihen statt des Marktzins als Diskontsatz. Vgl. dazu die Kritik von *Carr / Halpern / McCallum* (1974) und *Rudolph* (1979).

<sup>4</sup> Vgl. *Redington* (1952).

<sup>5</sup> Vgl. *Fisher / Weil* (1971).

<sup>6</sup> Vgl. *Hopewell / Kaufman* (1973).

<sup>7</sup> Einen guten Überblick über die früheren Arbeiten zur Duration-Analyse findet man bei *Weil* (1973).

<sup>8</sup> Die Duration-Kennzahl zur Abschätzung von Marktzinsrisiken von Banken benutzen *Grove* (1974) und in jüngster Zeit *Kaufman / Malliaris* (1983). In der deutschsprachigen Literatur beschäftigen sich vor allem *Rudolph* (1979), (1981b) und *Schmidt* (1979), (1981) mit der Anwendung der Duration-Analyse auf die Planung der Finanzintermediäre.

<sup>9</sup> Einen Überblick über die amerikanische Literatur findet man bei *Weil* (1973), *Ingersoll / Skelton / Weil* (1978) und besonders *Bierwag / Kaufman / Toevs* (1983a). Aus der deutschsprachigen Literatur sind die Beiträge von *Rudolph* (1981), *Uhler / Steiner* (1983), *Bühler* (1983) und *Albrecht* (1984) zu nennen.



## 2. Ableitung einer Immunsierungsstrategie

Ein Kapitalanleger plant in  $t = 0$  eine Anlage seines Vermögens  $V_0$  in festverzinslichen Wertpapieren. Diese Anlage soll gegen Wertverluste aus zwischenzeitlich eintretenden nicht antizipierten Marktzinsänderungen immunisiert werden. Das Anlageergebnis wird im Planungshorizont  $T$  als gesamtes Portefeuilleendvermögen festgestellt. Die Anlagestrategie wird unter Berücksichtigung folgender Annahmen entwickelt:

1. Es herrscht eine flache Marktzinskurve, d. h. die Höhe des Marktzinses  $i_0$  ist von der Restlaufzeit der Wertpapiere unabhängig.
2. Im Planungszeitraum kann eine einzige Marktzinsänderung eintreten. Dieser Zinsschock kann nur unmittelbar nach der Anlage der Mittel, also kurz nach  $t = 0$  erfolgen.
3. Das Ausmaß der ex ante unbekanntenen Zinsänderung in Prozentpunkten beträgt  $\lambda \gtrless 0$ .
4. Der Anleger löst das Portefeuille im Planungshorizont  $T$  auf. Dem Portefeuille werden zwischenzeitlich keine Beträge entnommen. Zwischenzeitliche Zins- und Tilgungszahlungen werden zum neuen Marktzins bis zum Planungshorizont  $T$  wieder angelegt.
5. Terminverträge zur sicheren Wiederanlage der zwischenzeitlichen Zins- und Tilgungszahlungen zum geltenden Marktzins  $i_0$  sind nicht möglich.
6. Es fallen keine Transaktionskosten oder Steuern an. Mögliche Ganzzahligkeitsbedingungen sowie Mindest- oder Höchstbeträge der Anlage sind nicht zu beachten.

Das Wertpapierportefeuille des Anlegers ist gegen mögliche Marktzinsänderungen  $\lambda$  dann immunisiert, wenn das Endvermögen nach der möglichen Zinsänderung  $V_T(\lambda)$  nicht kleiner ist als das im Planungszeitpunkt  $t = 0$  zum Zinssatz  $i_0$  berechnete Endvermögen  $V_T(0)$ . Die Immunsierungsbedingung läßt sich formal also angeben als

$$(1) \quad V_T(\lambda) \gtrless V_T(0) \quad \text{für } \lambda \gtrless 0.$$

Das zum Zeitpunkt  $t = 0$  berechnete Endvermögen  $V_T(0)$  entspricht dem mit dem Marktzins  $i_0$  aufgezinsten Anfangsvermögen  $V_0$  und ist gleich dem Gegenwartswert<sup>10</sup> der Zahlungen aus der Vermögensanlage im Zeitpunkt  $T$ . Erfolgen solche Zahlungen  $C_t$  vom Zeitpunkt 1 bis zum Zeitpunkt  $N > T$ , so gilt<sup>11</sup>

<sup>10</sup> Zum Begriff des Gegenwartswertes vgl. *Hax* (1979), 12.

<sup>11</sup> Zahlungen zum Zeitpunkt 0, die als Kassenhaltung interpretiert werden können, schließen wir hier der Einfachheit halber aus.

$$(2) \quad V_T(0) = (1 + i_0)^T V_0 = \sum_{t=1}^N C_t (1 + i_0)^{T-t} = (1 + i_0)^T \sum_{t=1}^N C_t (1 + i_0)^{-t}.$$

Eine Zinsänderung  $\lambda$  nach Anlage der Mittel wird den Gegenwartswert der Vermögensanlage zum Zeitpunkt  $T$  im allgemeinen verändern, der sich nun aus

$$(3) \quad V_T(\lambda) = \sum_{t=1}^N C_t (1 + i_0 + \lambda)^{T-t}$$

berechnet.

- a) Tritt keine Zinsänderung ein ( $\lambda = 0$ ), so gilt natürlich  $V_T(\lambda) = V_T(0)$  und die Bedingung (1) ist erfüllt.
- b) Die Immunsierungsbedingung (1) ist für infinitesimale Zinsänderungen aber auch erfüllt, wenn die Änderung der Funktion (3) gegenüber (2) bei einer Zinsänderung um  $\lambda$  gleich Null ist. Leitet man (3) nach  $\lambda$  ab und setzt die Ableitung gleich Null (Immunsierungsbedingung), so erhält man

$$(4) \quad \frac{dV_T(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{t=1}^N (T-t) C_t (1 + i_0 + \lambda)^{T-t-1} = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (2) erhält man aus (4) für den Marktzins  $i_0$  ( $\lambda = 0$ ) die Immunsierungsbedingung

$$(5) \quad T = \frac{1}{V_0(0)} \sum_{t=1}^N t C_t (1 + i_0)^{-t},$$

mit  $V_0(0) = \sum_{t=1}^N C_t (1 + i_0)^{-t} = V_0$  als Vermögensanlagebetrag.

In (5) stellt die rechte Seite die Duration  $D$  der Vermögensanlage dar. Die Duration der Vermögensanlage ist ein gewichteter Durchschnitt der Abstände  $t = 1, 2, \dots, N$  der Einzahlungszeitpunkte vom Bezugszeitpunkt  $t = 0$ , wobei die Barwertanteile der verschiedenen Einzahlungsbeiträge am Gesamtwert  $V_0(0)$  der Einzahlungsreihe als Gewichtungsfaktoren dienen. Die Immunsierungsbedingung ist erfüllt, so daß das Endvermögen des Anlegers im Zeitpunkt  $T$  nach einer Zinsänderung  $\lambda$  nicht vom Endvermögen ohne Zinsänderung abweicht, wenn die Anlage so gewählt wird, daß ihre Duration  $D$  der Zeit  $T$  bis zum Planungshorizont entspricht.

- c) Schließlich ist die Immunsierungsbedingung (1) dann erfüllt, wenn zwar  $V_T(\lambda) \neq V_T(0)$  ist, die Vermögensänderung aber unabhängig von der

Richtung der Zinsänderung stets positiv ist, weil  $V_T(\lambda) > V_T(0)$  für  $\lambda \geq 0$  gilt. Wegen

$$\frac{d^2 V_T(\lambda)}{d\lambda^2} = \sum_{t=1}^N (T-t)(T-t-1) C_t (1+i_0+\lambda)^{T-t-2} > 0^{12}$$

hat  $V_T(\lambda)$  für  $\lambda = 0$  ein Minimum, wenn  $T = D$ , d. h. (5) gilt.

### 3. Eine Beispielrechnung

Ein Kapitalanleger plant den Erwerb festverzinslicher Wertpapiere und will dabei den im Planungszeitpunkt  $t = 0$  geltenden Marktzinssatz in Höhe von  $i_0 = 0,1$  bis zu seinem Planungshorizont  $T = 5$  absichern. Das Anfangsvermögen beträgt  $V_0 = 100\,000$  DM, der Anleger nimmt keine zwischenzeitlichen Entnahmen vor. Das Portefeuille kann aus zwei Kuponanleihen gebildet werden. Anleihe *A* hat eine Restlaufzeit von zwei Jahren, Anleihe *B* wird in zehn Jahren fällig. Die Rückzahlungen erfolgen jeweils zu 100%. Beide Papiere sind mit einer Nominalverzinsung von 10% ausgestattet und notieren am Planungsbeginn beim Marktzins von  $i_0 = 0,1$  zu pari. In  $t = 0$  lassen sich für die beiden Titel *A* und *B* die Duration-Werte  $D_A$  und  $D_B$  berechnen:

$$D_A = \frac{1}{100} \left[ 1 \cdot \frac{10}{1,1} + 2 \cdot \frac{110}{1,1^2} \right] \approx 1,91 \quad \text{und}$$

$$D_B = \frac{1}{100} \left[ 1 \cdot \frac{10}{1,1} + 2 \cdot \frac{10}{1,1^2} + 3 \cdot \frac{10}{1,1^3} + 4 \cdot \frac{10}{1,1^4} + 5 \cdot \frac{10}{1,1^5} + 6 \cdot \frac{10}{1,1^6} + 7 \cdot \frac{10}{1,1^7} + 8 \cdot \frac{10}{1,1^8} + 9 \cdot \frac{10}{1,1^9} + 10 \cdot \frac{110}{1,1^{10}} \right] \approx 6,76.$$

Ein Portefeuille aus den Wertpapieren *A* und *B* hat die Duration  $D = 5$ , wenn der Anteil  $x$  in das Wertpapier *A* fließt und der Anteil  $(1-x)$  in das Wertpapier *B* und gleichzeitig

$$xD_A + (1-x)D_B = D = 5$$

gilt. Wir erhalten das immunisierte Portefeuille mit

$$x = \frac{5,00 - 6,76}{1,91 - 6,76} = 0,363.$$

<sup>12</sup> Zum formalen Beweis vgl. *Rudolph* (1979), 191.

Der Anleger legt seine Mittel in  $t = 0$  in einem Portefeuille aus  $100\,000 \cdot x = 36\,300$  DM Kurswert der Anleihe  $A$  und  $100\,000 \cdot (1 - x) = 63\,700$  DM Kurswert der Anleihe  $B$  an und sichert damit die Marktzinsentwicklung von  $10\%$  bis zum Planungshorizont ab. Zur Demonstration betrachten wir das Endvermögen aus dem immunisierten Portefeuille bei drei unterschiedlichen Zinsentwicklungen. Im ersten Fall sinkt der Marktzins um  $\lambda = -0,02$  auf  $i_1 = 0,08$ , im zweiten Fall bleibt der Marktzins konstant und im dritten Fall steigt der Marktzins um  $\lambda = +0,02$  auf  $i_1 = 0,12$ . Für das immunisierte Portefeuille  $x = 0,363$  ergeben sich folgende Portefeuilleendvermögen.

Zinsentwicklung	$\lambda = -0,02$	$\lambda = 0$	$\lambda = +0,02$
$V_T(\lambda)$ in DM	161 396	161 051	161 386

Die Tabelle zeigt, daß der Anleger genau das im Planungszeitpunkt berechnete Endvermögen in Höhe von  $100\,000 \cdot 1,1^5 = 161\,051$  DM erhält, wenn sich der Marktzins nicht ändert. Treten während des Planungszeitraums Zinsänderungen ein, so realisiert der Anleger unabhängig von der Richtung der Zinsänderung ein höheres Endvermögen als das zunächst in Höhe von  $161\,051$  DM berechnete. Der Anleger ist also gegen Verluste aus Zinsänderungen vollständig geschützt, wenn er die abgeleitete Duration-Strategie verfolgt, die Duration  $D$  seines Portefeuilles seinem individuellen Planungszeitraum  $T$  anzugleichen.

#### 4. Beurteilung der Duration-Analyse

Die Ableitung der Immunisierungsstrategie und das vorgestellte Beispiel beziehen sich auf den einfachsten und gleichzeitig wenig realistischen Fall einer Absicherung gegen Zinsänderungen. Die wesentlichen Kritikpunkte an der Strategie beziehen sich daher auf die engen Prämissen des Ansatzes:

- Es wird nur eine einzige mögliche Zinsänderung im Planungszeitraum, kurz nach  $t = 0$ , berücksichtigt.
- Die Marktzinskurve ist flach, d. h. es existiert ein Einheitszinssatz für alle Anlagezeiträume.
- Mögliche Zinsänderungen treten ausschließlich als parallele Verschiebung der flachen Zinskurve auf.
- Dem Portefeuille werden bis zum Planungshorizont keine Beträge entnommen.

In der Literatur sind Ansätze entwickelt worden, die die genannten engen Prämissen des Ansatzes zugunsten realistischerer Annahmen aufheben:



- *Bierwag*<sup>13</sup> und *Khang*<sup>14</sup> haben ein Verfahren zur Absicherung von Festzinsanlagen gegen Zinsänderungsrisiken auch bei mehrfacher Zinsänderung bis zum Planungshorizont entwickelt.
- Die grundsätzliche Anwendbarkeit der Duration-Analyse bei nicht flacher Zinskurve wurde schon von *Fisher / Weil*<sup>15</sup> demonstriert. Zur Berücksichtigung nicht flacher Zinskurven wurden insbesondere für additive und multiplikative Zinsänderungsprozesse Duration-Maße konstruiert.<sup>16</sup> Darüber hinaus sind Duration-Maße für restlaufzeitabhängige Zinsänderungsprozesse abgeleitet worden, die mögliche stärkere Schwankungen der kurzfristigen gegenüber den langfristigen Zinssätzen berücksichtigen.<sup>17</sup>
- Die oben angesprochenen und üblicherweise verwendeten Zinsänderungsprozesse sind mit der in den Immunisierungsmodellen geltenden Annahme eines vollkommenen Kapitalmarktes unverträglich, da nach einer Zinsänderung risikolose Arbitragegewinne durch Laufzeittransformationen möglich wären.<sup>18</sup> Einen Ausweg bietet das Modell der Diffusionsprozesse, das die Arbitragebedingung erfüllt und damit die Immunisierungsmodelle mit den Gleichgewichtsmodellen des Kapitalmarktes verträglich macht.<sup>19</sup>
- Die Immunisierung von mehrfachen Entnahmen während der Planungsperiode ist generell möglich. Nach Redington haben besonders *Rudolph*<sup>20</sup> und *Bierwag / Kaufman / Toevs*<sup>21</sup> diese Problemstellung aufgegriffen und entsprechende Anlagestrategien entwickelt.
- Eine besonders restriktive Annahme in den Arbeiten zur Immunisierung von Festzinsanlagen gegen Zinsänderungsrisiken besteht in der unterstellten Zielsetzung des Anlegers, alle Zinsrisiken möglichst vollständig zu eliminieren. Diese Zielsetzung impliziert eine extreme Risikoaversion

---

<sup>13</sup> Vgl. *Bierwag* (1979) und *Bierwag / Kaufman / Toevs* (1983 c).

<sup>14</sup> Vgl. *Khang* (1983).

<sup>15</sup> Vgl. *Fisher / Weil* (1971).

<sup>16</sup> Vgl. *Bierwag* (1977) und *Cooper* (1977).

<sup>17</sup> Vgl. *Khang* (1979). Da aber auch mit komplexen Zinsänderungskonstruktionen der tatsächliche Zinsänderungsprozeß nicht immer ausreichend genau abgebildet werden kann, bleibt ein sogenanntes Restprozeßrisiko bestehen, das mit der verwendeten Duration-Kennzahl variiert und sich als Zinsverlust trotz theoretisch perfekter Immunisierung offenbart. *Bierwag / Kaufman / Toevs* (1983) und auch *Bierwag / Kaufman / Schweitzer / Toevs* (1981) vergleichen unterschiedliche Duration-Kennzahlen bezüglich des Restprozeßrisikos. *Fong / Vasicek* (1983) und (1984) zeigen eine Möglichkeit zur Reduktion des Restprozeßrisikos unabhängig von den verwendeten Duration-Kennzahlen auf.

<sup>18</sup> Auf diesen Effekt haben erstmals *Ingersoll / Skelton / Weil* (1978) hingewiesen.

<sup>19</sup> Vgl. *Albrecht* (1984).

<sup>20</sup> Vgl. *Rudolph* (1981).

<sup>21</sup> Vgl. *Bierwag / Kaufman / Toevs* (1983 c).



des Anlegers. *Bierwag / Khang*<sup>22</sup> haben die Duration-Strategie daher entscheidungstheoretisch als Minimax-Strategie charakterisiert. Weicht aber die Risikoeinstellung des Anlegers vom „pathologischen Pessimismus“<sup>23</sup> ab, so ist für ihn die Zinsimmunisierung keine optimale Strategie mehr.<sup>24</sup> Ein nicht extrem risikoscheuer Anleger ist immer bereit, gewisse Zinsänderungsrisiken zu übernehmen, wenn sich ihm dafür hinreichend große Zinsänderungschancen bieten.

Will man differenzierte Risikoeinstellungen bei der Wertpapieranlage berücksichtigen, dann muß der Grad der Risikoaversion des Anlegers in der Zielfunktion des Modells quantifiziert werden, wobei die Form der Quantifizierung davon abhängig ist, ob der Anleger Prognosen über die zukünftige Zinsentwicklung berücksichtigt oder nicht. In einem Anlagemodell bei Risiko, das also von gegebenen Zinsprognosen ausgeht, zeigen *Bierwag / Kaufman / Toevs*<sup>25</sup>, wie mit Hilfe der Duration-Analyse für einen nicht extrem risikoscheuen Anleger die optimale Strategie bestimmt werden kann. Das Risiko wird in diesem Modell als Standardabweichung von der erwarteten Rendite über die Planungsperiode gemessen.

Einen anderen Weg zur Berücksichtigung unterschiedlicher Risikoeinstellungen beschreiten *Leibowitz / Weinberger*<sup>26</sup>, in deren dynamischem Modell der Anleger die Risikoeinstellung als eine nicht zu unterschreitende Mindestrendite vorgibt. Der Anleger wählt am Planungsbeginn entsprechend seiner Zinserwartung ein bestimmtes nicht immunisiertes Portefeuille. Erfüllen sich seine Zinserwartungen, dann realisiert er Zinsgewinne. Stellt sich die Zinsprognose als falsch heraus, dann treten Zinsverluste ein, die jedoch durch die spezielle Immunisierung bei Erreichen der vorgegebenen Mindestrendite auf einen von vornherein begrenzten Betrag beschränkt sind. Nicht optimal gelöst ist in diesem Modell die Frage des Erkennens des Zeitpunkts, an dem die Immunisierung des Portefeuilles erfolgen muß, da das bedingt immunisierte Portefeuille ein größeres als das vom Anleger akzeptierte Risikopotential aufweist und eine Limitierung der Zinsänderungsspanne in dem Modell nicht vorgesehen ist.<sup>27</sup>

Dieser Mangel kann ausgeschaltet werden, wenn das Anfangsportefeuille bereits in der Weise zusammengestellt wird, daß die Mindestrendite unabhängig von der tatsächlich eintretenden Zinsänderung nicht unterschritten werden kann und so das Zinsrisiko auf der Basis der Mindestrendite perfekt abgesichert wird. Im folgenden Abschnitt wird daher ein Verfahren zur

---

<sup>22</sup> Vgl. *Bierwag / Khang* (1979) und *Khang* (1983).

<sup>23</sup> *Bamberg / Coenenberg* (1985), 101.

<sup>24</sup> Vgl. *Grove* (1974), 703 - 704.

<sup>25</sup> Vgl. *Bierwag / Kaufman / Toevs* (1983 a), 136 - 142.

<sup>26</sup> Vgl. *Leibowitz / Weinberger* (1982) und (1983).

<sup>27</sup> Vgl. *Wondrak* (1986), 143 - 166.

Ermittlung der optimalen Anlagestrategie für einen nicht extrem risikoaversen Anleger entwickelt, der seine Risikoeinstellung durch die Vorgabe einer Mindestrendite über die Planungsperiode bzw. als Mindestendvermögen am Ende seiner Planungsperiode angeben kann.

### C. Ein Modell zur Risiko-Chancen-Steuerung der Anlage in Festzinstiteln

#### 1. Das Konzept der Teilimmunisierung gegen Zinsänderungsrisiken

Betrachtet man Anlagestrategien mit nicht vollständig immunisierten Portfolios, so erkennt man, daß diese Strategien bei bestimmten Zinsentwicklungen zu einem Endvermögen führen, das höher ist als das der Immunisierungsstrategie, während die entgegengesetzte Zinsentwicklung zu einem Endvermögen führt, das den zunächst berechneten Betrag nicht erreicht. Nicht vollständig immunisierte Portfolios bieten also größere Zinschancen und bergen dafür gegenüber den vollständig immunisierten Portfolios gewisse Zinsrisiken.

Voraussetzung zur Wahrnehmung von Zinschancen ist ein nicht vollständig immunisiertes Portfolio ( $D \neq T$ ). Je mehr der Zinsanteil bzw. der Kursanteil im Endvermögen die jeweils andere Komponente übersteigt, desto höher sind die Chancen und bei entgegengesetzter Zinsentwicklung die Risiken. Abbildung 1 zeigt das Endvermögen eines Anlegers in Abhängigkeit vom Marktzins für je ein Wertpapier, das überwiegend dem Wiederanlagerisiko (a) bzw. dem Kursrisiko (b) unterliegt.

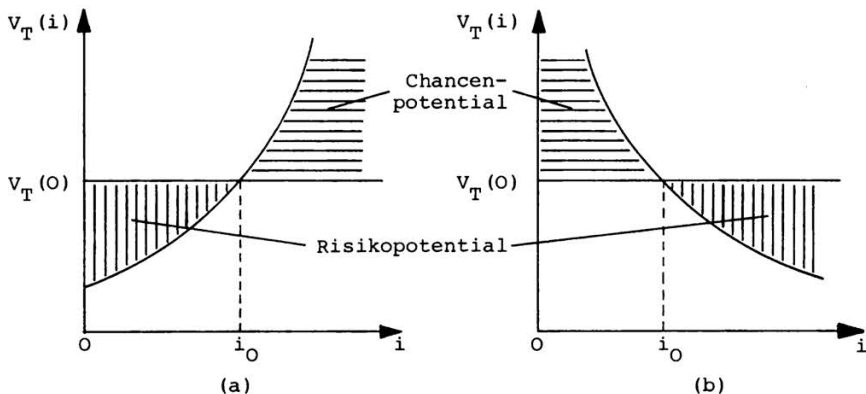


Abb. 1: Endvermögensverlauf zweier Wertpapiere in Abhängigkeit vom Marktzins  
 (a) Wertpapier unterliegt dem Wiederanlagerisiko  
 Restlaufzeit < Planungshorizont  
 (b) Wertpapier unterliegt dem Kursrisiko  
 Restlaufzeit > Planungshorizont

Kombiniert man die beiden Wertpapiere, dann reduzieren sich die Chancen- und Risikopotentiale beider Anlagen. Bei vollständiger Immunisierung wird das Risikopotential vernichtet (vgl. Abbildung 2). Die Addition der beiden oben gezeigten Risiko-Chancen-Funktionen, die der Kombination der beiden Wertpapiere in einem Portefeuille entspricht, führt nämlich auf eine Summenfunktion, die ein Minimum für  $i = i_0$  aufweist. Ein Minimumendvermögen in Höhe des erwarteten Endvermögens beim Marktzins  $i_0$  erreicht nur das vollständig immunisierte Portefeuille, dessen Konstruktion im vorigen Abschnitt B gezeigt wurde.

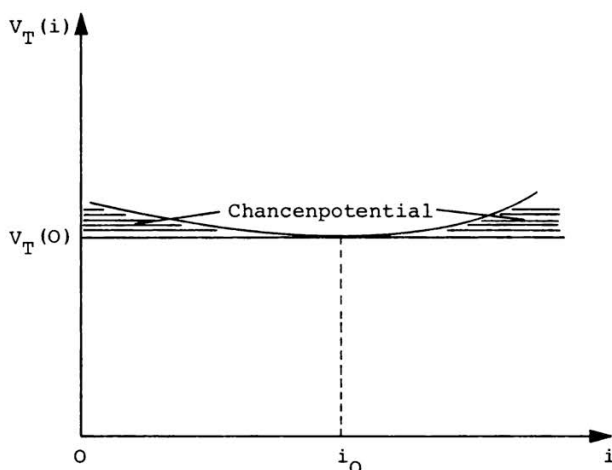


Abb. 2: Endvermögensverlauf eines vollimmunisierten Portefeuilles in Abhängigkeit vom Marktzins

Da jedes nicht vollständig immunisierte Portefeuille bei einem Zins  $i \neq i_0$  ein Minimumendvermögen aufweist, das unter dem erwarteten Endvermögen  $V_T(0)$  liegt, läßt sich für jedes Portefeuille ein maximales Risikopotential ermitteln.<sup>28</sup> Dieses maximale Risikopotential eines Portefeuilles bzw. einer Strategie bezeichnen wir als *effektives Risikopotential*. Ein Portefeuille, das ein Minimumendvermögen unter dem zunächst berechneten Endvermögen aufweist, bezeichnen wir als *teilimmunisiert*.

Betrachten wir nun das Chancenpotential. Wie die Abbildung 2 zeigt, bietet bereits das vollständig immunisierte Portefeuille gewisse Zinschancen. Liegt das Minimumendvermögen unterhalb des berechneten Endvermögens  $V_T(0)$ , so steigt das Chancenpotential wegen des konvexen Verlaufs der Endvermögensfunktion überproportional an. Führt eine Zinsänderung z. B.

<sup>28</sup> Vgl. dazu auch *Marshall / Yawitz* (1982).



zu Zinsgewinnen, so erzielt der Anleger bei einer doppelt so großen Zinsänderung mehr als den doppelten Zinsgewinn. Teilimmunisierungsstrategien erlauben dem Anleger, Zinschancen wahrzunehmen und gleichzeitig das Zinsrisiko auf eine von ihm bestimmte Höhe zu begrenzen. Abbildung 3 zeigt den Endvermögensverlauf eines teilimmunisierten Portefeuilles bei einem effektiven Risikopotential in Höhe von  $V_T(0) - V_{T\min}(i_m)$ .

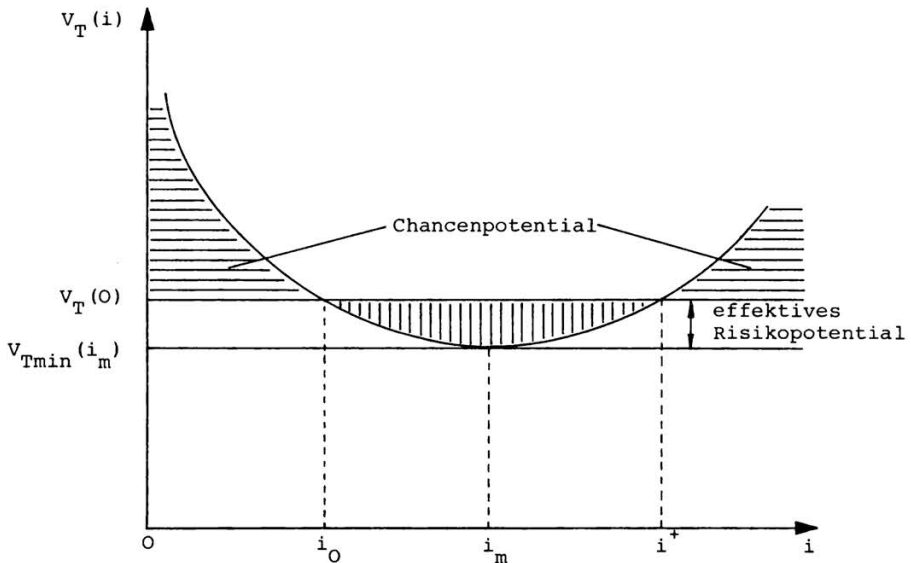


Abb. 3: Endvermögensverlauf eines teilimmunisierten Portefeuilles in Abhängigkeit vom Marktzins

Ein *Zinsrisiko* aus dem angenommenen Portefeuille in Abbildung 3 besteht nur, wenn der neue Marktzins im Bereich zwischen  $i_0$  und  $i^+$  liegt. Für  $i = i_m$  erreicht die Endvermögensfunktion  $V_T$  ihr Minimum  $V_{T\min}$ . Fällt der Marktzins unter  $i_0$  oder steigt er über  $i^+$ , so realisiert der Anleger mit diesem speziellen Portefeuille *Zinsgewinne*. Anlagestrategien mit teilimmunisierten Portefeuilles ermöglichen dem Anleger bei strenger Begrenzung der möglichen Verluste Zinsgewinne, die höher sind als bei vollständiger Immunisierung.

Die Strategie der Teilimmunisierung bietet sich für einen Anleger an, der

1. bereit ist, ein begrenztes Zinsrisiko einzugehen (also nicht extrem risikoscheu ist), um dafür an Zinschancen zu partizipieren<sup>29</sup> und

<sup>29</sup> Wir gehen davon aus, daß der Anleger eine Mindestrendite  $f$  bzw. ein Mindestendvermögen  $V_T(f)$  angeben kann. Dieses Mindestendvermögen soll unabhängig von jeder Zinsentwicklung über den Planungszeitraum mit Sicherheit erreicht werden. Nach welchen Kriterien der Anleger die Mindestrendite festlegt, soll an dieser Stelle nicht weiter untersucht werden.

2. positive und negative Abweichungen vom ursprünglichen Marktzins nicht ausschließt.

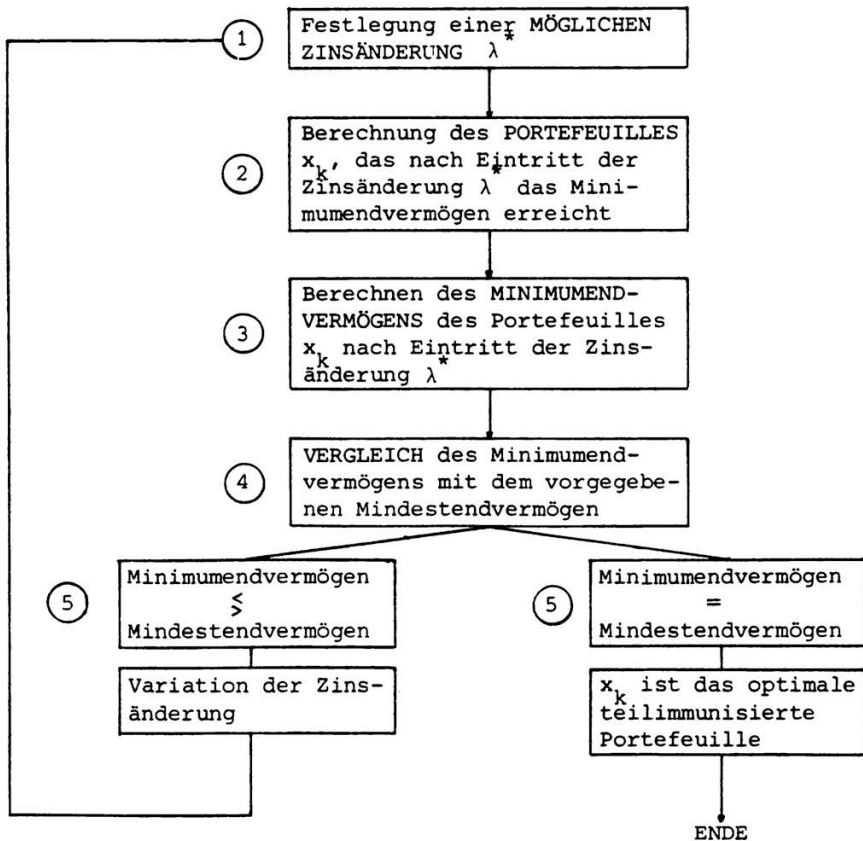
Wir gehen in unserem Anlagemodell wieder davon aus, daß der Anleger nur an einem fixierten Termin, dem Planungshorizont, über das bis dahin aufgelaufene Vermögen verfügen will. Gibt der Anleger ein seiner Risikoeinstellung entsprechendes Mindestendvermögen vor, so heißt das, daß er am Planungshorizont über mindestens diese Summe verfügen will. Im folgenden wird eine Anlagestrategie entwickelt, die das Mindestendvermögen am Planungshorizont absichert, so daß die vorgegebene Mindestrendite unabhängig von der Richtung und vom Ausmaß der Zinsänderung erreicht wird. Mit der ersten Anlageentscheidung am Planungsbeginn begrenzt der Anleger das Risiko der Festzinsposition. Eine Portefeuilleumschichtung nach der Zinsänderung ändert die Risiko-Chancen-Position des Anlegers nicht mehr.

## 2. Ableitung der optimalen Teilimmunsierungsstrategie

Ein Kapitalanleger, der seine Risikoeinstellung in Form einer unter dem ursprünglichen Marktzins liegenden Mindestrendite als Risikopotential angeben kann, zielt auf die Bildung eines Portefeuille, dessen Rendite die vorgegebene Mindestrendite in keinem Fall unterschreitet. Zur möglichst weitgehenden Ausnutzung der Zinsänderungschancen muß das teilimmunierte Portefeuille ein minimales Endvermögen in Höhe des vorgegebenen Mindestendvermögens aufweisen. Im Abschnitt B.2 wurde dargetan, daß ein vollimmunisiertes Portefeuille beim ursprünglichen Marktzins  $i_0$  das Minimumendvermögen erreicht. Teilimmunisierte Portefeuilles erreichen ihr Minimumendvermögen dagegen bei einem vom ursprünglichen Marktzins abweichenden Zins.

Eine eindeutige Ableitung des Teilimmunsierungsportefeuilles ist nicht möglich, da dasselbe Minimumendvermögen mit unterschiedlichen Portefeuilles bei einem höheren und einem niedrigeren als dem ursprünglichen Marktzins erreicht werden kann. Deshalb muß zur Ermittlung des optimalen teilimmunisierten Portefeuilles zunächst die kritische Zinsänderung festgelegt werden, um dann das Portefeuille zu berechnen, das bei Eintritt dieser Zinsänderung ein Minimumendvermögen aufweist. Das optimale teilimmunisierte Portefeuille kann in einem iterativen Prozeß bestimmt werden, bei dem folgende Schritte zu durchlaufen sind:

## Verfahrensablauf der Ableitung einer Teilimmunisierungsstrategie



Wir ermitteln das optimale teilimmunisierte Portefeuille hier aus zwei Wertpapieren  $A$  und  $B$  mit den Kurswerten beim Zinssatz  $i_0$  von  $K_A(0)$  und  $K_B(0)$  und der Zahlungsstruktur  $C_{At} \geq 0$ ,  $C_{Bt} \geq 0$  für  $t = 1, 2, \dots, N_A$  bzw.  $t = 1, 2, \dots, N_B$ . Die Duration-Werte der beiden Papiere betragen  $D_A < T < D_B$ . Aus diesen Wertpapieren könnte ein vollständig immunisiertes Portefeuille gebildet werden, das mit  $x^*$  bezeichnet sei. In diesem Fall würde  $x^*$  so gewählt, daß  $D_P = x^* D_A + (1 - x^*) D_B = T$  gelten würde.

Aus der Kombination  $x_k$  der zwei Wertpapiere in einem Portefeuille erhalten wir ein Endvermögen im Zeitpunkt  $T$  in Höhe von

$$(6) \quad V_T(\lambda) = x_k \sum_{t=1}^{N_A} C_{At} (1 + i_0 + \lambda)^{T-t} + (1 - x_k) \sum_{t=1}^{N_B} C_{Bt} (1 + i_0 + \lambda)^{T-t}.$$



Das Endvermögen aus (6) ist ein Minimumendvermögen, wenn die durch eine Zinsänderung hervorgerufene Änderung des Endvermögens gleich Null ist. Zur Berechnung des Portefeuilles mit diesem Minimumendvermögen bilden wir die erste Ableitung der Gleichung (6) nach  $\lambda$  und setzen diese gleich Null:

$$(7) \quad \frac{dV_T(\lambda)}{d\lambda} = x_k \sum_{t=1}^{N_A} (T-t) C_{At} (1+i_0+\lambda)^{T-t-1} + (1-x_k) \sum_{t=1}^{N_B} (T-t) C_{Bt} (1+i_0+\lambda)^{T-t-1} = 0.$$

Nach einigen Umformungen erhalten wir

$$(8) \quad x_k \frac{[T - D_A(\lambda)]}{K_B(\lambda)} = (x_k - 1) \frac{[T - D_B(\lambda)]}{K_A(\lambda)}$$

mit den Duration-Werten

$$(9) \quad D_j(\lambda) = \frac{\sum_{t=1}^{N_j} t C_{jt} (1+i_0+\lambda)^{-t}}{K_j(\lambda)} \quad \text{für } j = A, B$$

und den Kursen

$$(10) \quad K_j(\lambda) = \sum_{t=1}^{N_j} C_{jt} (1+i_0+\lambda)^{-t} \quad \text{für } j = A, B.$$

Das Portefeuille, das ein Minimumendvermögen in Höhe von  $V_T(\lambda)$  generiert, ermitteln wir als

$$(11) \quad x_k = \frac{\frac{[T - D_B(\lambda)]}{K_A(\lambda)}}{\frac{[T - D_A(\lambda)]}{K_B(\lambda)} - \frac{[T - D_B(\lambda)]}{K_A(\lambda)}}.$$

Zur Ermittlung der optimalen Teilimmunisierungsstrategie nutzen wir also die Marktzensabhängigkeit der Duration-Kennzahl. Der Ausdruck (9) zeigt, daß die Duration eines Kuponpapiers vom jeweiligen Marktzens abhängig ist. Die Duration fällt mit steigendem Marktzens, denn die früher eintretenden Zahlungen erhalten ein stärkeres Gewicht als die später fälligen:

$$D_j = D_j(\lambda) \quad \text{und} \quad \frac{dD_j(\lambda)}{d\lambda} < 0 \quad \text{für } j = A, B. \quad 30$$

Bei kontinuierlicher Variation des Marktzinssatzes kann die Duration jedes Kuponpapiers durch eine fallende Kurve dargestellt werden (vgl. Abbildung 4). Für bestimmte Marktzinsänderungen läßt sich dann die Höhe der Duration eines Wertpapiers direkt ablesen. Die bei einem Marktzins von  $i_0 + \lambda_1$  ermittelte Duration gibt den Zeitpunkt an, an dem das Periodenvermögen in  $t = D(\lambda_1)$  eines zum Kurs auf der Basis von  $i_0$  in  $t = 0$  erworbenen Wertpapiers (Kuponpapier) unabhängig von jeder Zinsänderung nach  $t = 0$  nicht unter das mit dem Marktzins  $i_0 + \lambda_1$  berechnete Periodenvermögen fällt. Das mit  $i_0 + \lambda_1$  berechnete Periodenvermögen in  $t = D(\lambda_1)$  ist ein Minimumperiodenvermögen bzw. ein Minimumendvermögen, wenn  $D(\lambda_1)$  gleich dem Planungshorizont des Anlegers  $T$  ist.

Aus der Gleichung (11) ermitteln wir nun das Portefeuille  $x_k$ , das nach Vorgabe einer beliebigen Zinsänderung  $\lambda^*$  bei dem Marktzins  $i_0 + \lambda^*$  ein Minimumendvermögen in  $T$  generiert. Da der Anleger keine Zinsprognosen kennt, ist es gleichgültig, ob eine Zinsänderung  $\lambda^* > 0$  oder  $\lambda^* < 0$  vorgegeben wird, das Minimumendvermögen wird niemals unterschritten. Wählt der Anleger  $\lambda^* > 0$ , so resultiert daraus ein teilimmunisiertes Portefeuille mit niedrigerem Zinsanteil und höherem Kursanteil im Endvermögen als im vollimmunisierten Portefeuille ( $x_k < x^*$ ). Der Anleger erzielt bei fallenden Marktzinsen Zinsgewinne, bei steigenden Marktzinsen erleidet er begrenzt Zinsverluste. Im Falle  $\lambda^* < 0$  weist das teilimmunisierte Portefeuille einen höheren Zinsanteil und niedrigeren Kursanteil als das vollimmunisierte Portefeuille auf ( $x_k > x^*$ ). Eine solche Wertpapierkombination führt bei steigenden Marktzinsen zu Zinsgewinnen und bei fallenden Marktzinsen zu

<sup>30</sup> Die Ableitung der Duration aus (9) nach  $\lambda$  ergibt:

$$\frac{dD_j(\lambda)}{d\lambda} = D_j^2 - \frac{\sum_{t=1}^{N_j} t^2 C_{jt} (1 + i_0 + \lambda)^{-t}}{K_j(\lambda)} < 0.$$

Die Duration ist eine fallende Funktion des Marktzinses. Die Ableitung des Duration-Maßes einer Kuponanleihe nach dem Zins bzw. der Zinsänderung entspricht dem negativen Wert der Varianz der Einzahlungszeitpunkte über die Duration des Wertpapiers  $M_j^2$  (vgl. Fong / Vasicek (1983)):

$$M_j^2 = \frac{\sum_{t=1}^{N_j} (D_j - t)^2 C_{jt} (1 + i_0 + \lambda)^{-t}}{\sum_{t=1}^{N_j} C_{jt} (1 + i_0 + \lambda)^{-t}} < 0 \quad \text{für } t \leq D_j.$$

$$\text{Wegen } M_j^2 > 0 \text{ und } \frac{dD_j(\lambda)}{d\lambda} = -M_j^2 \text{ gilt } \frac{dD_j(\lambda)}{d\lambda} < 0.$$

Die Bedingung für ein Minimum der Endvermögensfunktion  $V_T(\lambda)$  aus (6) an der Stelle  $\lambda$  ist mit  $d^2 V_T(\lambda)/d\lambda^2 > 0$  erfüllt.

Die Duration-Kennzahl von Diskontpapieren (Zero-Bonds) ist zinsunabhängig, da nur eine Einzahlung am Ende der Laufzeit des Titels erfolgt.

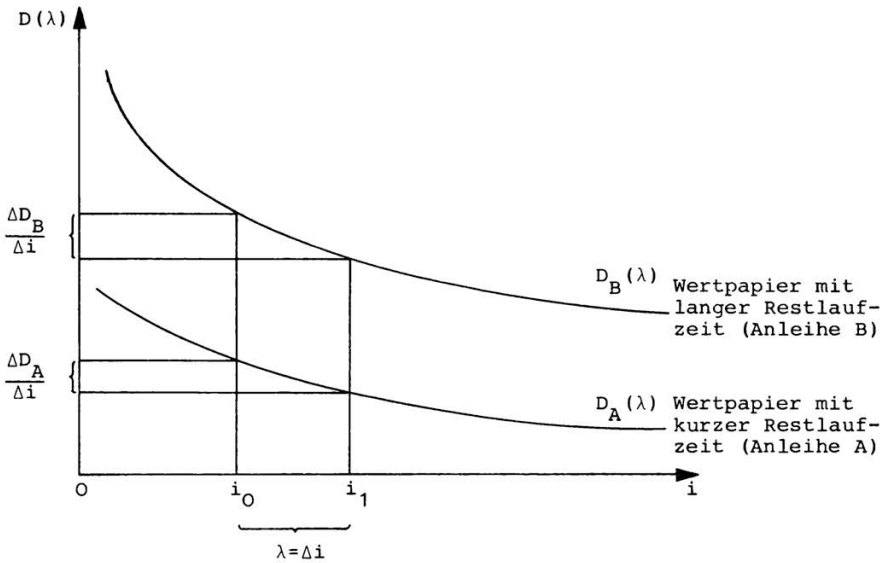


Abb. 4: Abhängigkeit der Duration-Werte vom Marktzins und der Restlaufzeit einer Kuponanleihe

Zinsverlusten, die jedoch auf die Höhe des vorgegebenen Risikopotentials begrenzt sind. Wir wählen hier exemplarisch eine Zinsänderung  $\lambda^* > 0$  (Schritt 1). Mit dieser kritischen Zinsänderung berechnen wir aus (10) die marktzinsabhängigen Kurse  $K_A(\lambda^*)$  und  $K_B(\lambda^*)$  und aus (9) die marktzinsabhängigen Duration-Werte  $D_A(\lambda^*)$  und  $D_B(\lambda^*)$  für die zwei Wertpapiere, setzen diese in (11) ein und erhalten mit  $x_1$  das Portefeuille, das beim Marktzins  $i_0 + \lambda^* > i_0$  ein Minimumendvermögen am Planungshorizont  $T$  erzeugt (Schritt 2). Bei jeder anderen Zinsänderung, die nicht auf  $\lambda^*$  führt, ist das Endvermögen aus  $x_1$  höher als das Minimumendvermögen. Ändert sich der Marktzins nicht, wird auch mit dem teilimmunisierten Portefeuille  $x_1$  das erwartete Endvermögen am Planungshorizont  $V_T(0)$  erreicht.

Im dritten Schritt setzen wir  $\lambda^*$  und  $x_1$  aus (11) in die Endvermögensgleichung (6) ein.  $V_T(\lambda^*)$  gibt die Höhe des Minimumendvermögens an.

Der Vergleich des errechneten Minimumendvermögens  $V_T(\lambda^*)$  mit dem vorgegebenen Mindestendvermögen  $V_T(f)$  im vierten Schritt zeigt, ob das Portefeuille  $x_1$  das optimale, ein zulässiges oder ein unzulässiges Portefeuille ist:

$V_T(\lambda^*) = V_T(f)$   $x_1$  ist das optimale teilimmunisierte Portefeuille, da es das vorgegebene Risikopotential vollständig ausnutzt. Der Anleger erwirbt für  $x_1 V_0$  Wertpapier A und für  $(1 - x_1) V_0$  Wertpapier B.



$V_T(\lambda^*) > V_T(f)$  Das Portefeuille  $x_1$  ist ein zulässiges Portefeuille, da sein effektives Risikopotential das vorgegebene Risikopotential nicht unterschreitet. Allerdings nutzt das Portefeuille die Risikospanne nicht vollständig aus. Der Anleger kann eine bessere Position erreichen, wenn er mit einer größeren Zinsänderung  $\lambda^+ > \lambda^* > 0$  ein Portefeuille  $x_k, k \neq 1$  bestimmt, das den akzeptierten Risikoraum besser ausnutzt. Die vorgegebene kritische Zinsänderung wird solange variiert, bis das Optimalportefeuille mit  $V_T(\lambda^+) = V_T(f)$  erreicht ist.

$V_T(\lambda^*) < V_T(f)$  Das errechnete Portefeuille  $x_1$  ist ein unzulässiges Portefeuille, da sein Minimumendvermögen die Höhe des Mindestendvermögens nicht erreicht. Die angenommene Zinsänderung weicht zu stark vom ursprünglichen Marktzins ab. Der Anleger muß mit einer neuen kritischen Zinsänderung  $\lambda^+$ , die geringer ist als die vorgegebene Größe  $\lambda^*$  im ersten Durchgang,  $\lambda^* > \lambda^+ > 0$ , die Schritte 2 bis 4 solange wiederholen, bis das optimale Portefeuille gefunden ist.

Die Auswahl der optimalen Anlagestrategie erfolgt nach einer zweiparametrischen Entscheidungsregel, nach der in unserem Unsicherheitsmodell nur zwei Zielausprägungen berücksichtigt werden: das maximale und das minimale Endvermögen jeder Anlagestrategie. Strategien, deren Minimumendvermögen das vorgegebene Mindestendvermögen nicht erreichen, sind unzulässige Strategien. Alle Anlagealternativen, die das Mindestendvermögen gerade erreichen oder übertreffen, sind zulässig. Unter den zulässigen ist die Strategie optimal, die ein Minimumendvermögen genau in Höhe des Mindestendvermögens generiert, denn diese Strategie erreicht auch das maximale Endvermögen aller zulässigen Strategien.

### 3. Ein Beispiel

Ein Anleger will einen Betrag von 100 000 DM für fünf Jahre in festverzinslichen Wertpapieren festlegen. Der Marktzins im Zeitpunkt der Anlage beträgt 10% p. a. ( $i_0 = 0,1$ , flache Zinskurve). Das Portefeuille soll so gestaltet sein, daß eine Rendite von 9,5% p. a. über die Planungsperiode nicht unterschritten wird. Daraus errechnet sich ein vorgegebenes Mindestendvermögen  $V_T(f)$  in Höhe von  $100\,000 \cdot 1,095^5 = 157\,423$  DM. Als Anlagemöglichkeiten stehen zwei Anleihen erstklassiger Bonität mit jährlichem Kupon in Höhe von 10% zur Verfügung. Anleihe A hat eine Restlaufzeit von 2 Jahren, Anleihe B wird in 10 Jahren getilgt. Beide Titel werden zu 100% zurückgezahlt. Da der Nominalzins dem Marktzins entspricht, notieren beide Titel in  $t = 0$  zu pari.

In der folgenden Tabelle geben wir alternative kritische Zinsänderungen ( $\lambda_s^*$ ) vor, ermitteln für diese Zinsänderungswerte die Kurse und marktzinsabhängigen Duration-Werte am Planungsbeginn und errechnen nach Kenntnis dieser Werte das Portefeuille aus (11), das bei der kritischen Zinsänderung  $\lambda_s^*$  ein Minimumendvermögen aufweist. Schließlich geben wir in der letzten Spalte das Minimumendvermögen beim Marktzins  $i_0 + \lambda_s^*$  aus (6) an.

$\lambda_s^*$	$K_A$	$D_A$	$K_B$	$D_B$	$x_s$	$(1 - x_s)$	$V_T(\lambda_s^*)$
0,00	100,00	1,9091	100,00	6,7590	0,3627	0,6372	161 051
+ 0,01	98,29	1,9083	94,11	6,6549	0,3389	0,6611	160 968
+ 0,05	91,87	1,9053	74,91	6,2367	0,2458	0,7542	159 056
+ 0,068	89,19	1,9040	68,09	6,0496	0,2056	0,7944	157 442!
+ 0,08	87,47	1,9031	64,05	5,9258	0,1796	0,8204	156 154

Das optimale teilimmunisierte Portefeuille lautet:

DM 20 560 nominal Anleihe A und

DM 79 440 nominal Anleihe B.

Mit diesem Portefeuille sichert der Anleger unabhängig von der tatsächlich eintretenden Zinsentwicklung eine Rendite von 9,502% p.a.<sup>31</sup> über die Planungsperiode ab. Werden Wertpapiere im Portefeuille kombiniert, die eine größere Differenz zwischen den einzelnen Duration-Werten aufweisen, liegt der kritische Zinssatz, bei dem das Minimumendvermögen in Höhe des Mindestendvermögens erreicht wird, näher beim ursprünglichen Marktzins. Das optimale teilimmunisierte Portefeuille führt bei fallenden Marktzinsen zu Endvermögenssteigerungen. Wir betrachten die Höhe des Endvermögens aus dem Optimalportefeuille bei drei unterschiedlichen Zinsscenarien:  $\lambda_1$  steht für eine Marktzinssenkung um  $\lambda = -0,05$  auf  $i_1 = 0,05$ , im Fall  $\lambda_2$  treten keine Marktzinsänderungen ein und  $\lambda_3$  repräsentiert einen Marktzinsanstieg um  $\lambda = +0,05$  auf  $i_1 = 0,15$ .

Zinsscenarien $\lambda_s$	$\lambda_1$ - 0,05	$\lambda_2$ 0,00	$\lambda_3$ + 0,05
Endvermögen $V_T(\lambda_s)$ in DM	169 214	161 051	157 684

<sup>31</sup> Eine präzise Übereinstimmung von Mindest- und Minimumendvermögen läßt sich nur durch eine weitere Differenzierung der kritischen Zinsänderung erreichen.

Durch eine Marktzinsänderung auf  $i_1 = 0,05$  „verdient“ der Anleger DM 8163. Um diesen Betrag übersteigt das Endvermögen bei  $i_1 = 0,05$  das Endvermögen bei unverändertem Zins. Eine Marktzinssteigerung um ebenfalls  $\lambda = 0,05$  auf  $i_1 = 0,15$  bewirkt nur einen Zinsverlust in Höhe von DM 3367 gegenüber unveränderten Marktzinsen. Insgesamt ist der Zinsverlust durch die Teilimmunisierung auf DM 3609 begrenzt.<sup>32</sup>

#### D. Zur Bedeutung von Teilimmunisierungsstrategien

Mit dem hier vorgestellten Konzept der Teilimmunisierung von Portefeuilles festverzinslicher Wertpapiere gegen Zinsänderungsrisiken gelingt es erstmals, das Zinsrisiko aus einer Festzinsanlage auf einen festgelegten Betrag zu begrenzen. Der Anleger gibt entsprechend seiner Risikoeinstellung einen Mindestwert für das Endvermögen am Planungshorizont vor und erwirbt nach der Teilimmunisierungsstrategie das Portefeuille, das ihm diesen Mindestwert garantiert. Das in diesem Beitrag vorgestellte Verfahren der Teilimmunisierung ist als Grundmodell zu interpretieren, das wie das im Teil B beschriebene Grundmodell der Vollimmunisierung noch auf restriktiven Annahmen beruht:

1. Das Optimalportefeuille wird nur aus zwei Wertpapieren zusammengestellt.
2. Der Marktzinssatz ändert sich höchstens einmal unmittelbar nach Anlage der Mittel.
3. Das gesamte Portefeuillevermögen wird am Planungshorizont entnommen.
4. Die Marktzinskurve hat einen flachen Verlauf.
5. Es werden nur einfache Zinsänderungsprozesse in Form der Verschiebung einer flachen Zinskurve berücksichtigt.
6. Transaktionskosten und Steuern werden vernachlässigt.

Können mehr als zwei Wertpapiere zur Portefeuillebildung herangezogen werden, dann erhält man bei günstiger Zinsentwicklung höhere Endvermögen als aus Portefeuilles mit wenigen Wertpapieren und einer im allgemeinen damit verbundenen geringeren Streuung der Zahlungstermine. Da bei Auswahl der Wertpapiere nach der zweiparametrischen Entscheidungsregel stets nur das Maximum- und das Minimumendvermögen einer Strategie verglichen werden, ist aus allen zulässigen Portefeuilles die Wertpapierkombination optimal, die die höchste Streuung der Duration-Werte auf-

---

<sup>32</sup> Dieser maximal mögliche Zinsverlust wird allerdings nur erreicht, wenn der Marktzins auf genau  $i_1 = 0,168$  ansteigt. Liegt der neue Marktzins unter 16,8% oder schon darüber, so ist der Zinsverlust des Anlegers geringer.



weist.<sup>33</sup> Dies gilt unabhängig von den im Portefeuille kombinierten Wertpapieren, so daß es durchaus sinnvoll sein kann, Kuponanleihen mit langlaufenden Diskonttiteln (Zero-Bonds), Floating Rate Notes oder Zinsterminkontrakten zu kombinieren.<sup>34</sup>

Eine Teilimmunisierungsstrategie läßt sich ebenso wie die vollständige Immunisierung auch bei mehrfacher Zinsänderung im Planungszeitraum ableiten. Geht man davon aus, daß zwischen zwei Transaktionen aus dem Portefeuille (Halteperiode) nur eine Zinsänderung erfolgt, so kann der Anleger auch in dynamischen Modellen ein Mindestendvermögen absichern, wenn vor jeder Halteperiode (und damit vor der nächsten Zinsänderung) das jeweils optimale teilimmunisierte Portefeuille für die Restplanungsperiode erworben wird. Bei fortlaufend günstiger Zinsentwicklung für den Anleger können mit der Teilimmunisierungsstrategie beträchtliche Zinsgewinne erzielt werden, wobei das Risiko immer auf das Mindestendvermögen begrenzt bleibt. Eine fortwährend ungünstige Zinsentwicklung kann aber dazu führen, daß das Risikopotential Stück für Stück aufgebraucht wird und das Portefeuille nach einer gewissen Zeit nur noch im vollimmunisierten Status bis zum Ende der Planungsperiode gehalten werden kann.<sup>35</sup>

### Zusammenfassung

Durch die wachsenden Zinsfluktuationen auf den internationalen Kapitalmärkten haben sich die Zinsänderungsrisiken aus Portefeuilles festverzinslicher Wertpapiere beträchtlich erhöht. Aus Duration-Strategien lassen sich Anlageempfehlungen ableiten, die eine vollständige Immunisierung der Portefeuilles gegen zinsänderungsbedingte Verluste ermöglichen, dann aber gleichzeitig die Zinsänderungschancen drastisch reduzieren. In den neu formulierten Teilimmunisierungsstrategien wird die Annahme einer extremen Risikoaversion des Anlegers fallen gelassen. Der Investor kann eine von der anfänglichen Markttrendite abweichende Mindestrendite oder ein entsprechendes Mindestendvermögen vorgeben und auf diese Weise sein maximal mögliches Zinsänderungsrisiko fixieren. Die Teilimmunisierungsstrategie läßt die Chance offen, ein höheres als das anfänglich erwartete Endvermögen zu erzielen. Die Höhe der potentiellen Zinsgewinne wird wesentlich vom Umfang der übernommenen Zinsänderungsrisiken determiniert.

### Summary

Increasing interest rate fluctuations on international capital markets have considerably raised interest rate risks of bond portfolios. With Duration-Strategies investment recommendations have been developed which enable the investor to immunize

---

<sup>33</sup> Dies gilt nur bei dem hier angenommenen nicht arbitragefreien Zinsänderungsprozeß.

<sup>34</sup> Vgl. dazu *Kolb / Chiang* (1981), *Kolb / Gay* (1982), *Chance* (1983), *Trainer* (1983) und *Hilliard* (1984).

<sup>35</sup> Vgl. im einzelnen *Wondrak* (1986).

bond portfolios and eliminate interest rate risks completely. However interest rate opportunities are dramatically reduced, too. Therefore application of Duration-Strategies implies an extreme risk-averse investor. The new constructed Part-Immunization-Strategies drop this incisive premise. The investor fixes a minimum rate of return or the appropriate minimum target value, which is lower than the promised target value. In this way the investor limits his interest rate risk to a maximum amount. The appropriate Part-Immunization-Strategy offers opportunities to increase the actual target value over the promised amount. The magnitude of interest rate opportunities is essentially determined by the range of accepted interest rate risks.

### Literatur

- Albrecht, P.* (1984), Immunisierung von Schadenzahlungen eines Versicherungsunternehmens gegen Zinsänderungen bei Arbitragemodellen für die Zinsstruktur. Diskussionspapier des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim, Mannheim.
- Bamberg, G. / Coenenberg, A. G.* (1985), Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 4. A., München.
- Bierwag, G. O.* (1977), Immunization, Duration and the Term Structure of Interest Rates, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 12, 725 - 742.
- (1978), Measures of Duration, in: *Economic Inquiry* 16, 497 - 507.
- (1979), Dynamic Portfolio Immunization Policies, in: *Journal of Banking and Finance* 3, 23 - 41.
- Bierwag, G. O. / Kaufman, G. G.* (1977), Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: A Note, in: *Journal of Business* 50, 364 - 370.
- Bierwag, G. O. / Kaufman, G. G. / Schweitzer, R. / Toevs, A.* (1981), The Art of Risk Management in Bond Portfolios, in: *Journal of Portfolio Management* 7, No. 3, 27 - 36.
- Bierwag, G. O. / Kaufman, G. G. / Toevs, A.* (1982), Single Factor Duration Models in a Discrete General Equilibrium Framework, in: *Journal of Finance* 37, 325 - 338.
- / — / — (1983), Bond Portfolio Immunization and Stochastic Process Risk, in: *Journal of Bank Research* 13, 282 - 291.
- / — / — (1983 a), Recent Developments in Bond Portfolio Immunization Strategies, in: Kaufman, Bierwag, Toevs (Hrsg.), *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*. Greenwich, London.
- / — / — (1983 b), Duration: Its Development and Use in Bond Portfolio Management, in *Financial Analysts Journal* 39, No. 4, 15 - 35.
- / — / — (1983 c), Immunization Strategies for Funding Multiple Liabilities, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18, 113 - 123.
- Bierwag, G. O. / Khang, C.* (1979), An Immunization Strategy is a Minimax Strategy, in: *Journal of Finance* 34, 389 - 399.
- Bradley, S. P. / Crane, D. B.* (1975), *Management of Bank Portfolios*. New York.
- Brennan, M. J. / Schwartz, E. S.* (1977), Savings Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds, in: *Journal of Financial Economics* 5, 67 - 88.

- / — (1979), A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds, in: *Journal of Banking and Finance* 3, 133 - 155.
- / — (1980), Conditional Predictions of Bond Prices and Returns, in: *Journal of Finance* 35, 405 - 419.
- / — (1983), Duration, Bond Pricing, and Portfolio Management, in: Kaufman, Bierwag, Toevs (Hrsg.), *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*. Greenwich, London.
- Bühler, W. (1983), Anlagestrategien zur Begrenzung des Zinsänderungsrisikos von Portefeuilles aus festverzinslichen Titeln, in: *Kapitalanlageplanung, Sonderheft 16/83 der Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*. Wiesbaden.
- Carr, J. L. / Halpern, P. J. / McCallum, J. S. (1974), Correcting the Yield Curve: A Re-Interpretation of the Duration Problem, in: *Journal of Finance* 29, 1287 - 1294.
- Chance, D. M. (1983), Floating Rate Notes and Immunization, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18, 365 - 380.
- Cheng, P. L. (1962), Optimum Bond Portfolio Selection, in: *Management Science* 8, 490 - 499.
- Cooper, I. A. (1977), Asset Values, Interest-Rate Changes, and Duration, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 12, 701 - 723.
- Courtadon, G. (1982), The Pricing of Options on Default Free Bonds, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17, 75 - 100.
- Cox, J. C. / Ingersoll, J. / Ross, S. (1979), Duration and the Measurement of Basis Risk, in: *Journal of Business* 52, 51 - 61.
- Cox, J. C. / Ingersoll, J. E., jr. / Ross, S. A. (1981), A Re-Examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates, in: *Journal of Finance* 36, 769 - 799.
- Crane, D. B. (1971), A Stochastic Programming Model for Commercial Bank Bond Portfolio Management, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 6, 955 - 976.
- Dothan, L. U. (1978), On the Term Structure of Interest Rates, in: *Journal of Financial Economics* 6, 59 - 69.
- Fischer, E. O. / Zechner, J. (1984), Diffusion Process Specifications for Interest Rates, An Empirical Investigation for the FRG, in: Bamberg, G. and Spreman, K. (Hrsg.), *Risk and Capital, Proceedings of the 2nd Summer Workshop on Risk and Capital*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.
- Fisher, L. / Weil, R. (1971), Coping with the Risk of Interest-Rate-Fluctuations: Returns of Bondholders from Naive and Optimal Strategies, in: *Journal of Business* 44, 408 - 431.
- Fitzgerald, M. D. (1983), *Financial Futures*. London.
- Fogler, R. (1984), Bond Portfolio Immunization, Inflation, and the Fisher Equation, in: *Journal of Risk and Insurance* 51, 244 - 264.
- Fogler, R. / Groves, W. A. / Richardson, J. G. (1977), Bond Portfolio Strategies, Returns, and Skewness: A Note, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 12, 127 - 140.



- Fong, H. G. / Vasicek, O.* (1983), Return Maximization for Immunized Portfolios, in: Kaufman, Bierwag, Toevs (Hrsg.), *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*. Greenwich, London.
- / — (1984), A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization, in: *Journal of Finance* 39, 1541 - 1546.
- Grove, M. A.* (1966), A Model of the Maturity Profile of the Balance Sheet, in: *Metroeconomica* 18, 40 - 55.
- (1974), On "Duration" and the Optimal Maturity Structure of Balance Sheet, in: *Bell Journal of Economics and Management Science* 6, 696 - 709.
- Hax, H.* (1979), *Investitionstheorie*, 4. A., Würzburg, Wien.
- Hicks, J. R.* (1939), *Value and Capital*. Oxford.
- Hilliard, J. E.* (1984), Hedging Interest Rate Risk with Futures Portfolios under Term Structure Effects, in: *Journal of Finance* 39, 1547 - 1569.
- Hopewell, M. H. / Kaufman, G. G.* (1973), Bond Price Volatility and Term to Maturity: A Generalized Respecification, in: *American Economic Review* 63, 749 - 753.
- Ingersoll, J. E., jr. / Skelton, J. / Weil, R. L.* (1978), Duration Forty Years Later, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, 637 - 650.
- Kaufman, G. G.* (1978), Measuring Risk and Return for Bonds: A New Approach, in: *Journal of Bank Research* 9, 82 - 90.
- Kaufman, G. G. / Malliaris, A. G.* (1983), Duration based Strategies for Managing Bank Interest Rate Risk: Generalized Proofs and Numerical Examples, unveröffentlichtes Diskussionspapier der Loyola University of Chicago. Chicago.
- Khang, C.* (1979), Bond Immunization when Short-Term Interest Rates Fluctuate more than Long-Term Rates, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 14, 1085 - 1090.
- (1983), A Dynamic Global Portfolio Immunization Strategy in the World of Multiple Interest Rate Changes: A Dynamic Immunization and Minimax Theorem, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18, 355 - 363.
- Kolb, R. W. / Chiang, R.* (1981), Improving Hedging Performance Using Interest Rate Futures, in: *Financial Management* 10, No. 4, 72 - 79.
- Kolb, R. W. / Gay, G. D.* (1982), Immunizing Bond Portfolios with Interest Rate Futures, in: *Financial Management* 11, No. 2, 81 - 89.
- Leibowitz, M. / Weinberger, A.* (1982), Contingent Immunization – Part I: Risk Control Procedure, in: *Financial Analysts Journal*, Nov./Dec., 17 - 31.
- / — (1983), Contingent Immunization – Part II: Problem Areas, in: *Financial Analysts Journal*, Jan./Febr., 35 - 50.
- Lohmann, K.* (1979), *Finanzmathematische Wertpapieranalyse*. Göttingen.
- Macaulay, F. R.* (1938), Some theoretical Problems suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856. New York.
- Marsh, T.* (1980), Equilibrium Term Structure Models: Test Methodology, in: *Journal of Finance* 35, 421 - 438.



- Marshall, W. J. / Yawitz, J. B.* (1982), Lower Bounds on Portfolio Performance: An Extension of the Immunization Strategy, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17, 101 - 113.
- Redington, F. M.* (1952), Review of the Principle of Life-Office Valuations, in: *Journal of the Institute of Actuaries* 78, 286 - 340.
- Richard, S. F.* (1978), An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates, in: *Journal of Financial Economics* 6, 33 - 57.
- Rudolph, B.* (1979), Zinsänderungsrisiken und die Strategie der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode, in: *Kredit und Kapital* 12, 181 - 206.
- (1981), Eine Strategie zur Immunisierung der Portfeuilleentnahmen gegen Zinsänderungsrisiken, in: *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 33, 22 - 35.
- (1981 a), Duration: Eine Kennzahl zur Beurteilung der Zinsempfindlichkeit von Vermögensanlagen, in: *Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen* 34, 137 - 140.
- (1981 b), Planungs- und Kontrollrechnungen, in: *Göppl, Henn (Hrsg.), Geld, Banken und Versicherungen, Band 1, Königstein.*
- Samuelson, P. A.* (1945), The Effect of Interest Rate Increases on the Banking System, in: *American Economic Review* 35, 16 - 27.
- Schmidt, H.* (1979), Liquidität von Finanztiteln als integrierendes Konzept der Bankbetriebslehre, in: *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 49, 710 - 722.
- (1981), Wege zur Ermittlung und Beurteilung der Marktzinsrisiken von Banken, in: *Kredit und Kapital* 14, 249 - 286.
- Steiner, P.* (1983), Immunisierungsstrategien gegen das Zinsänderungsrisiko, Diskussionspapier der Universität Graz.
- Trainer, F. H., jr.* (1983), The Use of Treasury Bond Futures in Fixed-Income Portfolio Management, in: *Financial Analysts Journal, Jan./Febr.*, 27 - 34.
- Uhlir, H. / Steiner, P.* (1983), Analyse anleihespezifischer Risiken, in: *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 53, 632 - 657.
- Vasicek, O.* (1977), An Equilibrium Characterization of the Term Structure, in: *Journal of Financial Economics* 5, 177 - 188.
- Watson, D.* (1972), Test of Maturity Structure of Commercial Bank Government Securities Portfolios: A Simulation Approach, in: *Journal of Bank Research* 3, 34 - 46.
- Weil, R. L.* (1973), Macaulay's Duration: An Appreciation, in: *Journal of Business* 46, 589 - 592.
- Wolf, C. R.* (1969), A Model for Selecting Commercial Bank Government Security Portfolios, in: *Review of Economics and Statistics* 51, 40 - 52.
- Wondrak, B.* (1986), *Management von Zinsänderungschancen und -risiken.* Heidelberg, Wien.
- Yawitz, J. B. / Hempel, G. H. / Marshall, W. J.* (1975), The Use of Average Maturity as a Risk Proxy in Investment Portfolios, in: *Journal of Finance (Papers and Proceedings)* 30, 325 - 333.
- / — / — (1976), A Risk-Return Approach for the Selection of Optimal Government Bond Portfolios, in: *Financial Management* 5, Autumn, 35 - 45.