

Die Algorithmen von Scarf und Merrill zur numerischen Berechnung allgemeiner Gleichgewichte

Eine Einführung mit Beispielen aus der Steuerpolitik

Von Wolfgang Wiegard*

Der vorliegende Beitrag verfolgt den Zweck, die Algorithmen von Scarf und Merrill zur Lösung nicht-linearer allgemeiner Gleichgewichtsmodelle zu erläutern. Anhand einfacher Beispiele werden mögliche Anwendungen auf steuerpolitische Problemstellungen aufgezeigt. Auf die Darstellung der diesen Algorithmen zugrundeliegenden mathematischen Theorie wird weitgehend verzichtet; neben der Erläuterung des ökonomischen Hintergrunds werden vor allem einfache Handlungsanweisungen zur Implementierung dieser Verfahren angegeben.

I. Vorbemerkungen

Ein zentraler Streitpunkt in der sog. „Wirtschaftsrechnungsdebatte“ der 30er Jahre war die Möglichkeit der numerischen Ermittlung von Gleichgewichtspreisen eines allgemeinen Walras-Modells. Hatte *v. Mises* (1920) die Existenz von Preisen als Indikatoren der relativen Knappheit von Gütern noch für unvereinbar mit dem Kollektiveigentum an Produktionsmitteln gehalten, argumentierten *Robbins* (1934) und *v. Hayek* (1940) nicht mit der theoretischen, sondern mit der praktischen Unmöglichkeit einer effizienten Allokation in einer sozialistischen Ökonomie. Es sei einfach ausgeschlossen, eine große Anzahl nicht-linearer Gleichungen und Ungleichungen numerisch zu lösen, um die gleichgewichtigen „Schattenpreise“ der Güter und Faktoren zu ermitteln. O. Lange hat dem entgegengehalten, daß auch in sozialistischen Volkswirtschaften der Markt die Rolle des Analogrechners übernehmen könne. In seinem wohl letzten Aufsatz (1967) schreibt *Lange* allerdings, daß seine Antwort an *v. Hayek* und *Robbins* angesichts der modernen Computertechnologie heute wesentlich einfacher ausfallen würde: Man brauche das zu lösende System nicht-linearer (Un-)Gleichungen nur auf dem Computer zu implementieren, und würde die Lösung in weniger als einer Sekunde erhalten.

* Dieser Beitrag wurde im Mai 1984 während eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanzierten Aufenthalts an der University of Western Ontario, London, Kanada, fertiggestellt.

In der Tat bereitete die numerische Lösung *linearer* ökonomischer Modelle zum damaligen Zeitpunkt keine allzu großen Schwierigkeiten mehr. Reichlich übertrieben war Langes Aussage aber im Hinblick auf die Lösung *nicht-linearer* Gleichgewichtsmodelle. Erst die bahnbrechenden Arbeiten von *H. Scarf* (1967, 1973) lieferten einen Algorithmus zur numerischen Bestimmung von Gleichgewichtspreisen eines allgemeinen Konkurrenzmodells. Scarfs Algorithmus wurde seitdem von verschiedenen Autoren modifiziert und im Hinblick auf die zum Auffinden der Lösung erforderliche Computerzeit wesentlich verbessert.

Mit der Möglichkeit, komplizierte nicht-lineare ökonomische Gleichgewichtsmodelle zu lösen, war zugleich die Voraussetzung für die Durchführung numerischer Politikanalysen geschaffen. Vor allem *J. Shoven* und *J. Whalley* haben den Scarf-Algorithmus modifiziert, um unterschiedliche wirtschafts- und finanzpolitische Problemstellungen analysieren zu können. Die Bedeutung der „Angewandten Allgemeinen Gleichgewichtsökonomie“ ist im angelsächsischen Raum heute kaum noch umstritten. In *Shoven / Whalley* (1984) findet sich ein Überblick über die unterschiedlichen Anwendungen und Ergebnisse dieser Modelle. Nicht zuletzt aufgrund dieser Arbeiten besteht die Aussicht, daß der der neoklassischen Theorie gegenüber immer wieder erhobene Vorwurf der empirischen Leere zumindest abzuschwächen ist.

Ein ganz erhebliches Problem fast aller Beiträge zur „Angewandten Allgemeinen Gleichgewichtsökonomie“ besteht nun darin, daß die erzielten Ergebnisse in der Regel kaum nachprüfbar sind. Zum einen finden sich (aus Platzgründen) nur unzureichende Angaben zur Datengrundlage, zum anderen sind die Verfahren und Codes zur numerischen Berechnung allgemeiner Gleichgewichte weitgehend unbekannt.

Der vorliegende Beitrag verfolgt deshalb den Zweck, die Grundidee der Algorithmen von *Scarf* und *Merrill* (1972) zur Lösung nicht-linearer ökonomischer Modelle zu erläutern und mögliche Anwendungen auf finanzpolitische Problemstellungen anhand einfacher Beispiele zu verdeutlichen. Dabei legt der Scarf-Algorithmus die wesentlichen Grundlagen für das Verfahren von *Merrill*.

Auf die Darstellung der diesen Algorithmen zugrundeliegenden Theorie wird hier weitgehend verzichtet. Statt dessen sollen einfache Anweisungen zur Anwendung dieser Verfahren geliefert werden. Ebenso wie es in der Ökonomie möglich (und üblich) ist, mit den ersten und zweiten partiellen Ableitungen von z. B. Nutzen- und Produktionsfunktionen zu arbeiten, ohne jemals ein Mathematikbuch zur Differential- und Integralrechnung gelesen zu haben, können die Algorithmen von *Scarf* und *Merrill* angewandt werden, ohne die entsprechende Theorie

zu beherrschen. Natürlich erweist sich die Kenntnis der mathematischen Grundlagen hier wie dort als sinnvoll. Man beachte zum hier behandelten Problemkreis vor allem die Arbeiten von Scarf (1973, 1982) oder die allgemeinere Literatur zu den Fixpunktalgorithmen.¹

Neben den hier vorgestellten Verfahren gibt es eine ganze Reihe weiterer Algorithmen zur Berechnung ökonomischer Gleichgewichtslösungen — vgl. etwa Teil II in Ginsburg / Waelbroeck (1981) oder die in Fn. 1 angegebene Literatur.

Für den an wirtschafts- und finanzpolitischen Problemen interessierten Ökonomen ist die Art des Lösungsverfahrens weitgehend irrelevant. Wichtig ist in erster Linie, daß er ein Verfahren kennt, das funktioniert und im Hinblick auf die benötigte Computerzeit effizient ist.

In diesem Beitrag gehen wir durchweg von differenzierbaren Produktionsfunktionen aus, klammern also die von Scarf vorrangig behandelte Aktivitätsanalyse aus. Der Grund liegt darin, daß in nahezu allen empirischen Anwendungen Modelle der im nächsten Kapitel beschriebenen Art zugrundegelegt werden.

II. Ein einfaches allgemeines Gleichgewichtsmodell

In diesem Kapitel wird ein einfaches allgemeines Gleichgewichtsmodell mit H Konsumenten, N Konsumgütern und den beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital skizziert.

In der betrachteten Ökonomie sollen also $h = A, \dots, H$ Konsumenten existieren. Die Güternachfrage- und Faktorangebotsfunktionen des h -ten Konsumenten

$$(1) \quad \begin{aligned} x_j^h &= x_j^h(p_1, \dots, p_N, \tau, w) & j = 1, \dots, N \\ L^h &= L^h(p_1, \dots, p_N, \tau, w) \\ K^h &= K^h(p_1, \dots, p_N, \tau, w) \end{aligned}$$

können als Lösung des individuellen Optimierungsproblems

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximiere} & U^h(x_1^h, \dots, x_N^h, L^h, K^h) \\ \text{unter der} & \\ \text{Nebenbedingung} & \sum_{j=1}^N p_j x_j^h = wL^h + rK^h \end{array}$$

interpretiert werden.

Dabei sind die x_j^h die vom h -ten Konsumenten nachgefragten Mengen des Gutes j , L^h bzw. K^h die individuell angebotenen Mengen von Arbeit bzw. Kapital und p_j, τ, w die entsprechenden Preise.

¹ Etwa Todd (1976), Lüthi (1976), van der Laan (1980), Talman (1980).

Die Nutzenfunktion $U^h(\cdot)$ soll mit den üblichen wünschenswerten Eigenschaften ausgestattet sein; die Gleichungen (1) sind homogen vom Grade Null in allen Preisen.

Auf der Produktionsseite unterstellen wir $j = 1, \dots, N$ Einproduktunternehmen mit den linear-homogenen Produktionsfunktionen

$$(3) \quad Q^j = Q^j(L^j, K^j) \quad j = 1, \dots, N.$$

Q^j, K^j, L^j bezeichnen den Output bzw. den Faktoreinsatz im Unternehmen j .

Legt man als Verhaltenshypothese das Streben nach Kostenminimierung zugrunde, erhält man aus dem entsprechenden Optimierungsproblem der j -ten Unternehmung die jeweiligen Faktornachfragefunktionen

$$(4) \quad \begin{aligned} L^j &= L^j(r, w, Q^j) \\ K^j &= K^j(r, w, Q^j), \end{aligned}$$

die homogen vom Grade Null in den Faktorpreisen sind.

Für positive Preise² ist ein Gleichgewicht in diesem Modell durch die Übereinstimmung von insgesamt nachgefragten und angebotenen Mengen auf den Güter- und Faktormärkten charakterisiert, d. h. durch die Gleichungen

$$(5) \quad \begin{aligned} \sum_{h=A}^H x_j^h(p_1, \dots, p_N, r, w) - Q^j &= 0 & j = 1, \dots, N \\ \sum_{j=1}^N L^j(r, w, Q^j) - \sum_{h=A}^H L^h(p_1, \dots, p_N, r, w) &= 0 \\ \sum_{j=1}^N K^j(r, w, Q^j) - \sum_{h=A}^H K^h(p_1, \dots, p_N, r, w) &= 0. \end{aligned}$$

Außerdem ist sichergestellt, daß Erträge und Kosten innerhalb eines Unternehmens übereinstimmen (falls der Output im Gleichgewicht positiv ist):

$$(6) \quad p_j Q^j = w L^j(r, w, Q^j) + r K^j(r, w, Q^j).$$

Aufgrund des Walras-Gesetzes

$$(7) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^N p_j [Q^j - \sum_{h=A}^H x_j^h(\cdot)] + w \left[\sum_{j=1}^N L^j(\cdot) - \sum_{h=A}^H L^h(\cdot) \right] + \\ \tau \left[\sum_{j=1}^N K^j(\cdot) - \sum_{h=A}^H K^h(\cdot) \right] = 0 \end{aligned}$$

² Bei einem Preis von Null wäre die entsprechende Gleichung (5) dahingehend abzuändern, daß die insgesamt nachgefragte Menge nicht größer als die insgesamt angebotene Menge ist.

und der wegen der Homogenitätseigenschaft von Angebots- und Nachfragefunktionen möglichen Normierung des Preissystems, wäre eine Lösung des Modells etwa dann bestimmt, wenn man $N + 1$ (positive) Preise ermitteln könnte, die $N + 1$ der Marktgleichgewichtsbedingungen (5) erfüllen. Man kann nun zwar Bedingungen für die Existenz einer solchen Lösung angeben³; offensichtlich ist aber, daß die numerische Ermittlung eines gleichgewichtigen Preisvektors jedenfalls dann schwierig wird, wenn die Anzahl der Güter und Faktoren „groß“ und/oder die funktionale Form von Angebots- bzw. Nachfragefunktionen entsprechend kompliziert ist. Diese Schlußfolgerung bleibt gültig, obwohl sich die Dimension des Lösungsraums in diesem Modell unschwer auf die Zahl der (relativen) Faktorpreise reduzieren läßt. Anders ausgedrückt: Durch geeignete Vorgehensweise ist es möglich, alle übrigen Variablen des Modells als Funktion der Faktorpreise darzustellen. Zur Lösung des Systems ist dann „nur“ noch die Ermittlung der gleichgewichtigen Preise (r, w) bzw. des Faktorpreisverhältnisses (r/w) derart erforderlich, daß die Überschuß-Nachfragefunktionen für Arbeit und Kapital jeweils gleich (oder kleiner gleich) Null sind.

Wir formulieren dieses Vorgehen dabei so, daß es später unmittelbar (z. B. als Subroutine) in die Algorithmen von Scarf bzw. Merrill eingefügt werden kann. Ausgangspunkt ist eine positive, aber ansonsten beliebige Faktorpreiskombination (r, w) .

Ermittlung der Überschuß-Faktornachfrage:

1. Bestimme bei gegebenen positiven Faktorpreisen (r, w) für jede Unternehmung die kostenminimale Faktornachfrage pro Einheit des Gutes j :

$$(8) \quad \frac{L^j}{Q^j} = l^j(r, w, 1) ; \quad \frac{K^j}{Q^j} = k^j(r, w, 1) \quad j = 1, \dots, N$$

2. Ermittle die Konsumgüterpreise als (linear-homogene) Funktion von r, w

$$(9) \quad p_j(r, w) = w l^j(r, w, 1) + r k^j(r, w, 1) \quad j = 1, \dots, N$$

und damit die von den Konsumenten nachgefragten Güter- bzw. angebotenen Faktormengen

$$(10) \quad \begin{aligned} x_j^h(r, w) &= x_j^h(p_1(r, w), \dots, p_N(r, w), r, w) & j &= 1, \dots, N \\ L^h(r, w) &= L^h(p_1(r, w), \dots, p_N(r, w), r, w) & h &= A, \dots, H \\ K^h(r, w) &= K^h(p_1(r, w), \dots, p_N(r, w), r, w) \end{aligned}$$

³ Vgl. etwa *Debreu* (1982).

3. Berechne die von den einzelnen Unternehmen produzierten Gütermengen über die Gleichungen

$$(11) \quad Q^j(r, w) = \sum_{h=A}^H x_j^h(r, w) \quad j = 1, \dots, N$$

und damit dann die einzelwirtschaftlichen Faktornachfragefunktionen

$$(12) \quad \begin{aligned} L^j(r, w) &= l^j(r, w, 1) Q^j(r, w) & j = 1, \dots, N \\ K^j(r, w) &= k^j(r, w, 1) Q^j(r, w) \end{aligned}$$

4. Die gesamtwirtschaftlichen Überschuß-Faktornachfragefunktionen ergeben sich dann zu

$$(13) \quad \begin{aligned} Q_k(r, w) &= \sum_{j=1}^N K^j(r, w) - \sum_{h=A}^H K^h(r, w) \\ Q_l(r, w) &= \sum_{j=1}^N L^j(r, w) - \sum_{h=A}^H L^h(r, w) . \end{aligned}$$

Da von gegebenen Faktorpreisen ausgegangen wurde, wird der Wert der Funktionen Q_k, Q_l im allgemeinen von Null abweichen. Aufgrund des Walras-Gesetzes gilt dann, daß genau eine dieser Überschuß-Nachfragefunktionen positiv, die andere negativ ist.

Die Ermittlung der gleichgewichtigen Faktorpreise über einen Walras'schen Tâtonnement-Prozeß bietet sich unmittelbar an: Der Faktorpreis, dessen Überschußnachfrage positiv ist, wäre zu erhöhen, der andere entsprechend zu senken. Nun ist aber bekannt, daß ein derartiger Preisanpassungsprozeß keineswegs immer zum Gleichgewicht konvergiert.⁴

Die im nächsten Kapitel beschriebenen Algorithmen von Scarf und Merrill garantieren dagegen nicht nur die Existenz eines (wenn auch nicht unbedingt eindeutigen) Gleichgewichts eines „well-behaved“ ökonomischen Systems, sondern geben zugleich an, wie diese Lösung(en) zu finden sind.

III. Die Algorithmen von Scarf und Merrill (bei ganzzahliger Markierung)

1. Einige mathematische Definitionen und Konzepte

In diesen Vorbemerkungen sollen kurz die wichtigsten der den nachfolgenden Ausführungen zugrundeliegenden mathematischen Definitionen und Konzepte angegeben werden. Eine ausführlichere und exaktere

⁴ Hahn (1982) gibt einen Überblick über die mathematische Literatur zur Konvergenz von Tâtonnement-Prozessen.

Darstellung dieser Zusammenhänge findet sich u. a. bei *Scarf* (1982) oder *Lüthi* (1976), dessen Terminologie hier übernommen wird.

Die Algorithmen von Scarf und Merrill sind im wesentlichen numerische Verfahren zur Bestimmung von Fixpunkten einer stetigen Abbildung eines Simplex in sich selbst.

Ein *m-dimensional*es Simplex S (im folgenden abgekürzt durch *m*-Simplex) ist dabei die konvexe Hülle von $m + 1$ affin unabhängigen Vektoren b^1, \dots, b^{m+1} aus \mathbf{R}^n , d. h. die Menge aller Punkte x derart, daß

$$x = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j b^j, \quad \text{mit } \alpha_j \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j = 1.$$

Die Punkte b^1, \dots, b^{m+1} nennt man *Eckpunkte* des Simplex. Als *Grenzfläche* von S wird jedes $(m - 1)$ -Simplex S' bezeichnet, dessen Eckpunkte eine Teilmenge der Eckpunkte von S sind. Sind die Eckpunkte b^1, \dots, b^{m+1} gerade die $m + 1$ Einheitsvektoren e^1, \dots, e^{m+1} , heißt S das *m-Standardsimplex*.

Ein Punkt $\hat{x} \in S$ heißt *Fixpunkt* einer stetigen Abbildung $f: S \rightarrow S$, falls gilt $\hat{x} = f(\hat{x})$.

Eine Menge von Simplexen S^1, \dots, S^k heißt *Simplizialzerlegung* (oder: *Triangulation*) von S , wenn

- (a) S in der Vereinigung der Simplexe S^1, \dots, S^k enthalten ist und
- (b) die Schnittmenge zweier Simplexe S^i, S^m entweder leer ist oder die (gemeinsame) Grenzfläche beider Simplexe enthält.

Konstitutiv für die effiziente Implementierung der Scarf/Merrill-Algorithmen auf dem Computer ist die Wahl einer solchen Simplizialzerlegung, die sich gut für die numerische Durchführung der Algorithmen eignet. Wir wählen durchweg die von *Scarf*⁵ angegebene Triangulation des Standardsimplex, bei der sich ein typisches Simplex dieser Simplizialzerlegung wie folgt charakterisieren läßt. Gegeben sei ein sog. Basispunkt b^1 aus dem \mathbf{R}^{n+1} , dessen Koordinaten sich durch $(b_1^1/D, \dots, b_{n+1}^1/D)$ darstellen lassen, wobei D eine hinreichend große positive ganze Zahl ist und b_1^1, \dots, b_{n+1}^1 nicht-negative ganze Zahlen sind, die sich zu D addieren. Gegeben sei ferner eine Permutation π der Menge $\{1, \dots, n\}$ mit π_j als j -tem Element. Die Eckpunkte dieses typischen Simplex sind dann durch die Punkte

⁵ *Scarf* (1982), 1035.

(14)

 b^1

und

$$b^j = b^{j-1} + \frac{1}{D} e_{\pi_{j-1}} \quad j = 2, \dots, n+1$$

bestimmt, wobei $e_j \in \mathbf{R}^{n+1}$ an der j -ten Stelle eine -1 , an der $(j+1)$ -ten eine 1 und ansonsten nur Nullen hat (analog für e_{π_j}).

Die Koordinaten von b^j ($j = 2, \dots, n+1$) sollen dabei die gleichen Eigenschaften haben wie die Koordinaten von b^1 . Die hier zugrundegelegte Triangulation ist dann die Menge aller Simplexe, deren Eckpunkte durch (14) gegeben sind. Der Faktor $1/D$ wird *Feinheit* der Triangulation genannt.

Abbildung 1 verdeutlicht einige dieser Zusammenhänge im \mathbf{R}^3 . Ein-gezeichnet ist eine durch (14) charakterisierte Simplicialzerlegung des 2-Standardsimplex für $D = 5$.

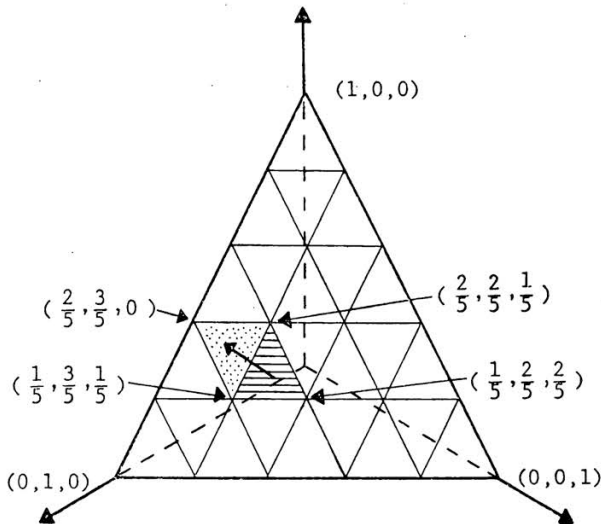


Abb. 1

Für den Basispunkt $b^1 = (2/5, 2/5, 1/5)$ und die identische Permutation $(1, 2)$ etwa hält man neben b^1 die Eckpunkte $b^2 = (1/5, 3/5, 1/5)$, $b^3 = (1/5, 2/5, 2/5)$, die das schraffierte Simplex definieren.

Durch Streichung eines Eckpunktes und Hinzufügung eines neuen durchlaufen die Algorithmen von Scarf und Merrill eine Reihe *benachbarter* Simplexe solange, bis eine Lösung gefunden ist — vorausgesetzt der Algorithmus zyckelt nicht (vgl. dazu Kapitel V). Sobald festgelegt ist,

welcher Eckpunkt auszutauschen ist, berechnet sich der hinzuzufügende Eckpunkt durch eine einfache Vorschrift. Wir wollen dazu annehmen, daß die $n + 1$ Eckpunkte eines n -Simplex in Form einer $(n + 1) \times (n + 1)$ -Matrix gespeichert wurden (tatsächlich sind nur die Zähler der Eckpunkte zu speichern). Die j -te Spalte b^j ($j = 1, \dots, n + 1$) entspreche dem j -ten Eckpunkt des Simplex. Dann gilt die folgende

Austauschregel

Es sei b^j der zu ersetzende Eckpunkt eines n -Simplex. Der neu hinzuzufügende Eckpunkt berechnet sich dann durch

$$b^{j-1} + b^{j+1} - b^j, \quad j = 1, \dots, n + 1$$

wobei die Eckpunkte 1 und $n + 1$ als benachbart gelten.

Zur Verdeutlichung sei angenommen, daß der Eckpunkt $(1/5, 2/5, 2/5)$ des in Abb. 1 schraffierten Simplex auszutauschen sei. Offensichtlich genügt es, die Zähler der drei Eckpunkte in Form einer Matrix zu speichern, also

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Der Zähler des neu hinzuzufügenden Eckpunktes berechnet sich dann durch

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

so daß der Eckpunkt selbst durch $b = (2/5, 3/5, 0)$ gegeben ist. Damit ist in Abb. 1 das gepunktete Simplex bestimmt.

2. Der Algorithmus von Scarf⁶

Die Erläuterung dieses Algorithmus nimmt Bezug auf das in Kapitel II skizzierte ökonomische Modell.

Da alle angebotenen bzw. nachgefragten Faktor- und Gütermengen homogen vom Grade Null in den Faktorpreisen sind, können diese ohne Einschränkung der Allgemeinheit so normiert werden, daß sie auf dem 1-Standardsimplex liegen, so daß gilt

⁶ Tatsächlich sind für das hier betrachtete ökonomische Modell einfachere Lösungsverfahren möglich (z. B. das sog. „Interval Halving“, vgl. etwa *Lip-schutz / Poe* (1978), 202). Allerdings versagen diese Verfahren schon, wenn z. B. die Existenz von Steuern berücksichtigt wird, erst recht, wenn außerdem mehr als zwei Produktionsfaktoren existieren.

(15)

$$r + w = 1 .$$

In Abbildung 2 ist dieses Simplex und die zuvor erläuterte Simplicialzerlegung im \mathbf{R}^2 für die Feinheit $1/10$ abgebildet. Dabei sei angenommen, daß auf der Abszisse der Preis des Faktors Kapital, auf der Ordinate entsprechend der Lohnsatz abgetragen ist. Die durch die Simplicialzerlegung bestimmten Eckpunkte stellen jeweils eine bestimmte Faktorpreiskombination dar.

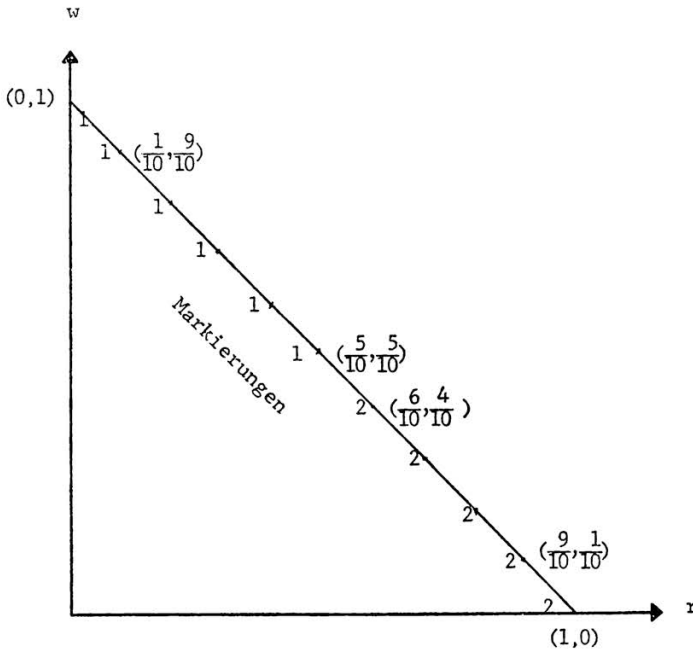


Abb. 2

Diesen Eckpunkten (bzw. Faktorpreisvektoren) wird nun eine *Markierung* nach der folgenden Beschriftungsvorschrift zugeordnet, die gleich für den allgemeinen Fall angegeben wird:

Markierungsregel S

Liegt ein Eckpunkt auf einer der Grenzflächen des n -Standardsimplex, erhält er die ganzzahlige Markierung i , wobei i der Index für die erste Null-Koordinate des Eckpunktes ist. Den inneren Eckpunkten wird eine ganze Zahl j zugeordnet ($1 \leq j \leq n + 1$), wobei j der Index für die erste positive der insgesamt $n + 1$ Überschuß-Nachfragefunktionen ist.

Bezogen auf das in Abb. 2 dargestellte 1-Standardsimplex erhalten die äußeren Eckpunkte (0,1) bzw. (1,0) also die Markierungen 1 bzw. 2, die inneren Eckpunkte die Markierungen 1 oder 2 je nachdem, ob die erste oder die zweite Überschuß-Faktornachfragefunktion (also $q_k(\cdot)$ oder $q_l(\cdot)$) positiv ist. (Dabei bezieht sich ‚erste‘ bzw. ‚zweite‘ auf die erste bzw. zweite Achse des Koordinatensystems). Sollten per Zufall an irgendeinem Eckpunkt beide Überschuß-Faktornachfragefunktionen eine Nullstelle haben, wäre der gleichgewichtige Preisvektor schon gefunden. Andernfalls sucht der Algorithmus von Scarf nach einem *vollständig markierten* Simplex, d. h. nach einem Simplex, dessen Eckpunkten unterschiedliche Markierungen zugeordnet wurden.⁷

Aus Abb. 2 ist offensichtlich, daß eine solche Lösung existiert und (bei endlichem D) auch nach endlich vielen Schritten gefunden wird. Diese Schlußfolgerung gilt unter bestimmten Annahmen auch für den allgemeinen, n -dimensionalen Fall.⁸

Jeder Punkt auf diesem Lösungssimplex ist dabei ein *approximativer* Gleichgewichtsvektor (r^*, w^*) in dem Sinne, daß gilt

$$(16) \quad \max_{i=l, k} q_i(r^*, w^*) < \varepsilon ,$$

wobei ε über den Stetigkeitsmodul der Funktionen q_l, q_k von der Feinheit $1/D$ der Simplicialzerlegung abhängt. Die Approximation der Gleichgewichtslösung verbessert sich dabei mit abnehmender Feinheit, d. h. größerem D .

Scarfs Algorithmus beginnt die Suche nach einem vollständig markierten Simplex grundsätzlich mit einem der Eck-Simplexe, d. h. einem Simplex, dessen einer Eckpunkt zugleich ein Eckpunkt des entsprechend dimensionierten Standardsimplex ist (dem sog. *Startsimplex*). Über die Markierungsregel S wird dann festgelegt, welcher Eckpunkt auszutauschen ist; die Austauschregel liefert den neu hinzuzufügenden Eckpunkt und damit einen neuen Simplex.

Die einzelnen Schritte des Algorithmus sind:

Algorithmus von Scarf:

1. Wähle als Startsimplex eines der durch die Eckpunkte des Standardsimplex bestimmten Simplexe und lege eine Feinheit der Triangulation (14) fest.

⁷ Im obigen Beispiel hat jeder der durch die Simplicialregelung bestimmten Simplexe zwei Eckpunkte und es gibt gerade zwei Markierungen.

⁸ Zum Beweis wird oft auf ein kombinatorisches Lemma von Sperner zurückgegriffen, das bekanntlich zum Beweis des Brouwer'schen Fixpunktsatzes herangezogen werden kann.

2. Ermittle die den Eckpunkten des Startsimplex zuzuordnenden Markierungen entsprechend der Markierungsregel S.
3. Ist das Simplex vollständig markiert, gehe nach Schritt 5; falls nicht, gehe nach 4.
4. Das Simplex ist nicht vollständig markiert, die Markierung des neu hinzugefügten Eckpunktes bzw. zu Beginn: des Eckpunktes des Standardsimplex stimmt also mit derjenigen eines anderen Eckpunktes überein. Ersetze diesen anderen Eckpunkt und bestimme die Markierung des aufgrund der Austauschregel neu hinzugefügten Eckpunktes. Gehe zurück nach Schritt 3.
5. Wähle irgendeinen Punkt aus dem Lösungssimplex mit den zugehörigen Werten der Überschuß-Nachfragefunktionen. Ist die Approximation des Gleichgewichts „befriedigend“, breche den Algorithmus ab.

Wähle andernfalls eine kleinere Feinheit der Triangulation, d. h. ein größeres D , und bestimme ein neues Startsimplex wie unter 1. Gehe zurück nach Schritt 2.

Die numerische Schwäche des Scarf-Algorithmus liegt vor allem darin, daß das Verfahren zur Bestimmung einer „besseren“ approximativen Gleichgewichtslösung jeweils an einer Ecke des Standardsimplex neu gestartet werden muß. Von bereits vorhandenen Informationen wird kein Gebrauch gemacht.

Zum besseren Verständnis soll das Vorgehen des Scarf-Algorithmus ausführlich an einem Beispiel erläutert werden. Dazu wählen wir das in dem Überblicksaufsatz von *Shoven / Whalley* (1984) enthaltene 2 Güter-2 Faktoren-2 Konsumenten-Beispiel als Spezialfall des allgemeineren Gleichgewichtsmodells aus Kapitel II. Anders als bei *Shoven / Whalley* interessiert hier weniger das Ergebnis als vielmehr der Weg, auf dem man zur Lösung kommt.

Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Parameterwerte und funktionalen Formen des Beispiels, Tabelle 2 enthält die einzelnen Schritte des Algorithmus für $D = 10$.

Der ökonomische Hintergrund des dem Algorithmus zugrundeliegenden Markierungsprozesses läßt sich anschaulich verdeutlichen.

In Abbildung 3 wurden dazu auf der Abszisse der Zinssatz r , auf der Ordinate die Funktionswerte der Überschuß-Faktornachfragefunktionen q_l und q_k für das obige Beispiel abgetragen.

Tabelle 1: Parameter und funktionale Formen für ein einfaches allgemeines Gleichgewichtsmodell mit staatlicher Aktivität

	Nutzenfunktion	Parameterwerte	Nachfragefunktionen
Haushalte	$U^h = \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i^{h,1/\mu^h} \cdot (x_i^h)^{\mu^h} \right)^{1/\mu^h} \cdot (\alpha_i^h)^{\mu^h (1-\mu^h)}$ <p style="text-align: center;">$h = A, B$</p>	$(\alpha_1^A, \alpha_2^A) = (0.5, 0.5)$ $(\alpha_1^B, \alpha_2^B) = (0.3, 0.7)$ $(\mu^A, \mu^B) = (1.5, 0.75)$ $(\bar{K}^A, \bar{K}^B) = (25, 0)$ $(\bar{L}^A, \bar{L}^B) = (0, 60)$	$x_i^h = \frac{\alpha_i^h (w \bar{L}^h + \tau \bar{K}^h)}{p_i^h \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i^h p_i^h (1-\mu^h)^h \right)}$ <p style="text-align: center;">$h = A, B$ $i = 1, 2$</p>
Unternehmen	<p style="text-align: center;">Produktionsfunktion</p> $Q^j = \Phi^j \left(\delta^j L^j \sigma^j + (1 - \delta^j) K^j \right)^{\frac{\sigma^j}{\sigma^j - 1}} \left(\frac{\sigma^j - 1}{\sigma^j} \right)^{\sigma^j - 1}$ <p style="text-align: center;">$j = 1, 2$</p>	<p style="text-align: center;">Parameterwerte</p> $(\Phi^1, \Phi^2) = (1.5, 2.0)$ $(\delta^1, \delta^2) = (0.6, 0.7)$ $(\sigma^1, \sigma^2) = (2.0, 0.5)$	<p style="text-align: center;">Faktornachfragefunktionen</p> $L^j = \frac{1}{\Phi^j} Q^j \left(\delta^j + (1 - \delta^j) \left[\frac{\delta^j \tau}{(1 - \delta^j) w} \right] \right)^{\frac{\sigma^j}{1 - \sigma^j}} (1 - \sigma^j)$ $K^j = \frac{1}{\Phi^j} Q^j \left(\delta^j \left[\frac{(1 - \delta^j) w}{\delta^j \tau} \right] + (1 - \delta^j) \right)^{\frac{\sigma^j}{1 - \sigma^j}}$

Tabelle 2: Ablaufdiagramm zum Scarf-Algorithmus (Beispiel aus Tab. 1)

<p>1. Anfangswerte (Feinheit; Startsimplex)</p>	<p>$D = 10; \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$</p> <p>$\varrho_k = -13.89$ $\varrho_l = 124.99$</p> <p>2 2</p>
<p>2. Markierung</p>	<p>Austauschregel</p> <p>$\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$</p> <p>$\varrho_k = -10.38$ $\varrho_l = 41.53$</p> <p>2 2</p>
<p>3. Eckenaustausch und Markierung</p>	<p>Austauschregel</p> <p>$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$</p> <p>$\varrho_k = -6.45$ $\varrho_l = 15.06$</p> <p>2 2</p> <p>Austauschregel</p> <p>$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$</p> <p>$\varrho_k = -1.33$ $\varrho_l = 1.99$</p> <p>2 2</p> <p>Austauschregel</p> <p>$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$</p> <p>$\varrho_k = 5.95$ $\varrho_l = -5.95$</p> <p>2 1</p>
<p>5. Güte der Approximation</p>	<p>$\tau^* = 0.5; w^* = 1 - \tau^*$ $\varrho_k(\tau^*, w^*) = 5.95$ $\varrho_l(\tau^*, w^*) = -5.95$</p>
<p>6. Approximative Gleichgewichte für unterschiedliche Feinheiten Ausführungszeit in CP seconds (CDC Cyber 170/835)</p>	<p>$D = 180; \tau^* = 0.5778$ $\varrho_k(\cdot) = 0.0582; \varrho_l(\cdot) = -0.0797$ 0.168</p> <p>$D = 5000; \tau^* = 0.5786$ $\varrho_k(\cdot) = 0.0049; \varrho_l(\cdot) = -0.0068$ 3.351</p>

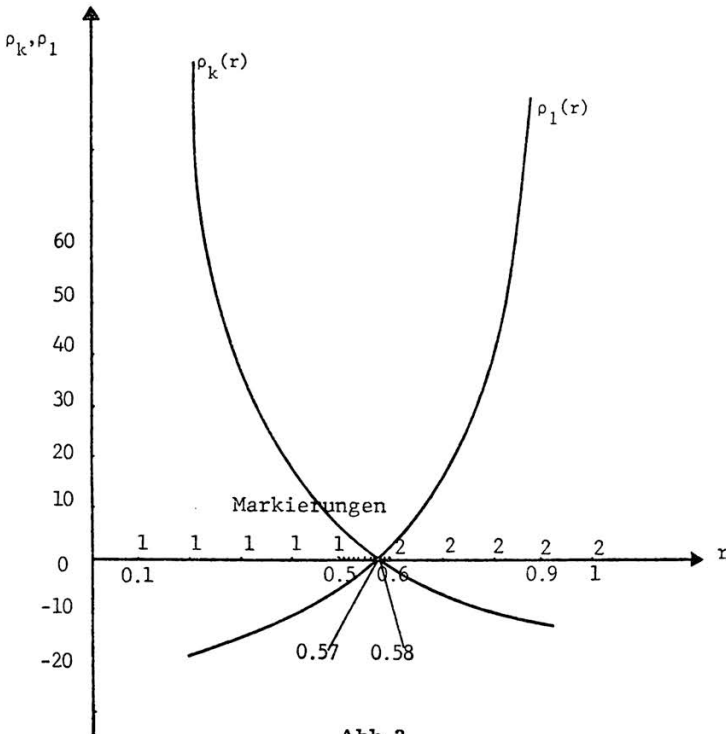


Abb. 3

Jedem der durch die Zerlegung des Intervalls $[0,1]$ bestimmten Zinssätze (die den jeweils ersten Koordinaten der Eckpunkte auf dem 1-Standardsimplex in Abb. 2 entsprechen) wird wieder eine Markierung 1 oder 2 zugeordnet, je nachdem ob die Überschußnachfrage des Faktors Kapital oder des Faktors Arbeit positiv ist. Bei stetigem und monotonem Verlauf dieser Funktionen muß der gleichgewichtige Faktorpreisvektor offensichtlich in einem Intervall mit unterschiedlichen Markierungen liegen. Der Algorithmus von Scarf ermittelt ein solches Intervall (das aber nicht für alle Kurvenverläufe eindeutig sein muß). Man sieht auch, daß die Approximation der Gleichgewichtslösung für $D = 10$ sehr ungenau sein kann. Verkleinert man die Feinheit der Simplicialzerlegung sukzessive, verbessert sich, wie in Abb. 3 verdeutlicht, auch die Approximation.

Aus Tabelle 2 ist ersichtlich, daß die Computerzeiten mit kleineren Feinheiten drastisch zunehmen. Der Grund liegt, wie erwähnt, darin, daß der Algorithmus für kleinere Feinheiten jeweils an einer Ecke des Standardsimplex neu gestartet werden muß.

Die Abb. 3 legt ein anderes, schnelleres Vorgehen nahe (das allerdings allgemein nur bei stetigem und monotonem Funktionsverlauf angewendet werden könnte). Hat man nämlich für eine vorgegebene Feinheit der Simplicialzerlegung ein vollständig markiertes Simplex gefunden, wäre es sinnvoll, den Algorithmus mit einer kleineren Feinheit nicht wieder an einer Ecke des Standardsimplex zu starten, sondern an einer der ermittelten approximativen Gleichgewichtslösungen.

Die Erweiterung des Scarf-Algorithmus durch *Merrill* (1972) geht von ähnlichen Überlegungen aus, ist aber insofern allgemeiner, als keine Monotonieannahme benötigt wird.

3. Der Algorithmus von Merrill

Die grundlegende Modifikation des Scarf-Algorithmus durch Merrill besteht darin, daß dem Lösungsraum eine weitere Dimension hinzugefügt wird. Statt des 1-Standardsimplex wird also eine Triangulation des 2-Standardsimplex, genauer: ein bestimmter Teil dieser Triangulation, nach einer Lösung abgesucht. Abbildung 4 verdeutlicht das graphisch.

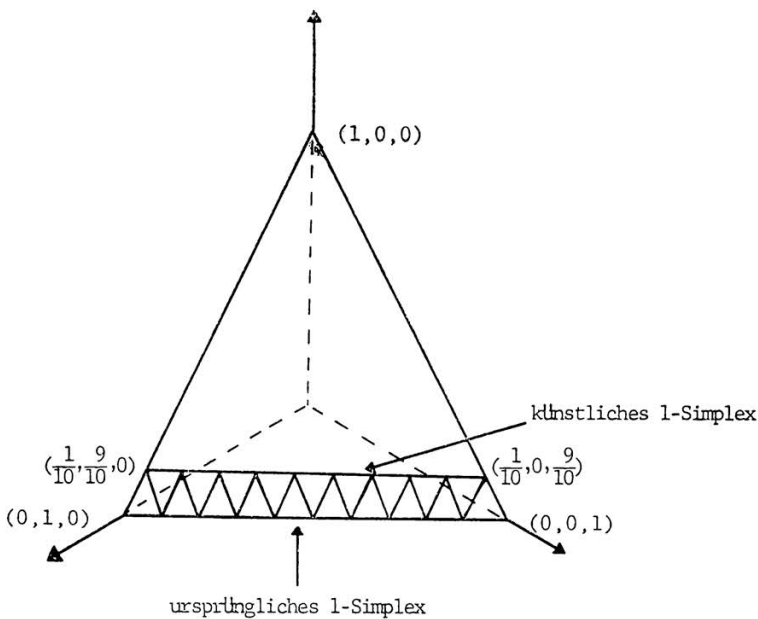


Abb. 4

Das ursprüngliche 1-Standard-simplex der Abb. 2 mit Feinheit $1/D$ ($D = 10$) stellt sich in Abb. 4 als untere Grenzfläche des 2-Standard-sim-

plex dar. Merrill führt nun ein zusätzliches, künstliches 1-Simplex mit Feinheit $1/(D - 1)$ ein, und betrachtet die „sandwichartig“ zwischen ursprünglichem und künstlichem 1-Simplex liegenden 2-Simplexe. Diese 2-Simplexe können auch als Teil einer durch (14) gegebenen Triangulation des 2-Standardsimplex mit Feinheit $1/D$ interpretiert werden.

Konstruktionsgemäß haben die jeweils ersten Koordinaten der Eckpunkte dieser 2-Simplexe einen Zählerwert von 0 oder 1, je nachdem ob sie auf dem ursprünglichen oder künstlichen 1-Simplex liegen. Die beiden übrigen Koordinaten jedes Eckpunktes entsprechen wieder den (normierten) Faktorpreisen r bzw. w .

Ausgangspunkt des Merrill-Algorithmus ist ein beliebiger durch eine gegebene Triangulation bestimmter innerer Eckpunkt auf dem ursprünglichen 1-Simplex (dem *Starteckpunkt*), mit dem nach Hinzufügung zweier geeigneter auf dem künstlichen 1-Simplex liegender Eckpunkt ein 2-Simplex (das *Startsimplex*) definiert ist.

Wenn $(0, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$ allgemein die Zählerkoordinaten des Starteckpunktes bezeichnet, sind die auf dem künstlichen 1-Simplex liegenden, hinzuzufügenden Eckpunkte eindeutig durch $(1, \hat{b}_1 - 1, \hat{b}_2)$, $(1, \hat{b}_1, \hat{b}_2 - 1)$ gegeben.

Auch bei Merrill werden den Eckpunkten der betrachteten Simplexe Markierungen zugeordnet, und zwar nach der (gleich für den allgemeinen Fall formulierten)

Markierungsregel M

Liegt ein Eckpunkt auf dem ursprünglichen $(n - 1)$ -Simplex (d. h. auf der entsprechenden Grenzfläche des n -Standardsimplex) — der Zähler der ersten Koordinate hat dann den Wert Null —, wird für die übrigen Koordinaten des Eckpunktes die Markierungsregel *S* angewendet.

Liegt ein Eckpunkt dagegen auf dem künstlichen $(n - 1)$ -Simplex — der Zähler der ersten Koordinate hat den Wert 1 — wird ihm die ganzzahlige Markierung i zugeordnet, wobei i der Index für diejenige seiner übrigen Koordinaten ($t = 1, \dots, n$) ist, die kleiner als der entsprechende Koordinatenwert des Starteckpunktes \hat{b} ist.

Der Algorithmus von Merrill durchläuft dann für eine gegebene Feinheit der Triangulation benachbarte n -Simplexe (hier: 2-Simplexe) solange, bis auf dem ursprünglichen $(n - 1)$ -Simplex (hier: 1-Simplex) ein vollständig markiertes Simplex und damit eine approximative Gleichgewichtslösung gefunden ist. Der Übergang von einem Simplex zum anderen erfolgt wie oben durch Austausch von Eckpunkten, der sich nach der im ersten Abschnitt angegebenen Austauschregel richtet.

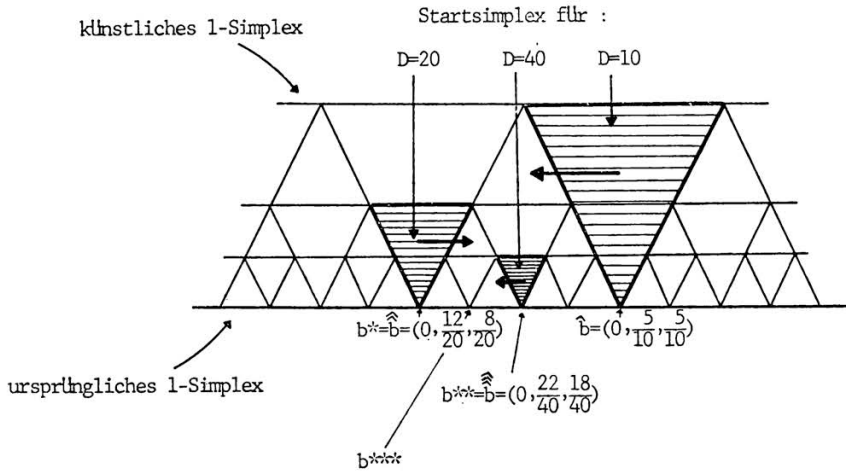


Abb. 5

Im Unterschied zum Scarf-Algorithmus wird das so ermittelte approximative Gleichgewicht (also irgendein Punkt aus der Lösungsmenge) als Starteckpunkt einer feineren Simplicialzerlegung gewählt, die man dadurch erhält, daß die Feinheit mit einem Verfeinerungsfaktor $0 < \beta < 1$ multipliziert wird. Merrills Algorithmus bricht erst dann ab, wenn die Approximation des Gleichgewichts einem vorgegebenem Gütekriterium entspricht, in der Regel einem hinreichend kleinen ε -Wert aus Gleichung (16). Abbildung 5 verdeutlicht eine solche Verfeinerung exemplarisch anhand eines Ausschnitts aus Abb. 4 für $\beta = 1/2$.

Wir formulieren den

Algorithmus von Merrill

1. Wähle eine Feinheit und einen Verfeinerungsfaktor $0 < \beta < 1$; fixiere ein Gütekriterium; lege einen Starteckpunkt $\hat{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$ fest.
2. Ermittle die dem Startsimplex entsprechende Ausgangsmatrix durch die Vorschrift:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hat{b}_1 \hat{b}_1 - 1 & \hat{b}_1 & \dots & \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \hat{b}_2 & \hat{b}_2 - 1 & \dots & \hat{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{b}_n \hat{b}_n & \hat{b}_n & \dots & \hat{b}_n - 1 \end{bmatrix}$$

3. Bestimme die den Eckpunkten des Startsimplex zuzuordnenden Markierungen entsprechend der Markierungsregel M .

4. Ersetze denjenigen Eckpunkt auf dem künstlichen $(n - 1)$ -Simplex, dessen Markierung mit der des Starteckpunktes übereinstimmt; berechne den hinzuzufügenden Eckpunkt nach der Austauschregel. Ermittle die Markierung des hinzugefügten Eckpunktes.
5. Liegen n Eckpunkte des soeben ermittelten n -Simplex auf dem ursprünglichen $(n - 1)$ -Simplex und ist das dadurch definierte $(n - 1)$ -Simplex vollständig markiert, gehe nach Schritt 7; gehe andernfalls nach Schritt 6.
6. Ersetze denjenigen Eckpunkt des n -Simplex, dessen Markierung mit der des zuletzt hinzugefügten Eckpunktes übereinstimmt. Ermittle die Markierung des neuen Eckpunktes. Gehe zurück nach Schritt 5.
7. Wähle irgendeinen Punkt b^* aus dem Lösungssimplex und berechne damit die Werte der relevanten Überschuß-Nachfragefunktionen. Breche den Algorithmus ab, wenn das Gütekriterium erfüllt ist, d. h. wenn gilt

$$(17) \quad \max_i |e_i(\cdot)| < \varepsilon .$$

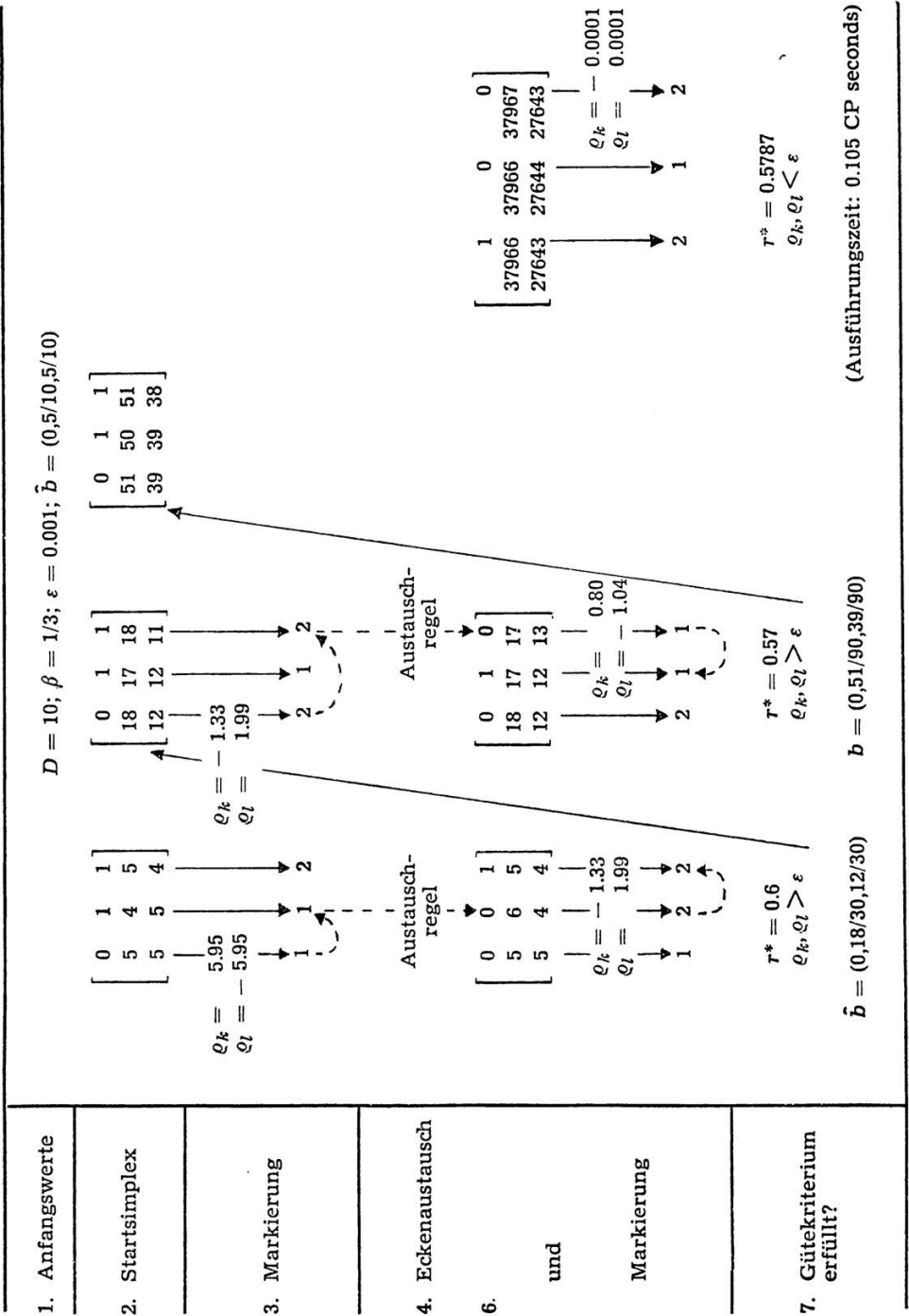
Multipliziere andernfalls die gegenwärtige Feinheit mit dem Faktor β und setze $\tilde{b} = b^*$: das soeben ermittelte approximative Gleichgewicht wird zum Starteckpunkt des neuen Durchgangs. Gehe zurück nach Schritt 2.

Tabelle 3 auf S. 728 gibt die einzelnen Schritte des Merrill-Algorithmus für das obige Beispiel wieder. Der Vergleich der für übereinstimmende (approximative) Lösungen erforderlichen Computerzeiten verdeutlicht die Überlegenheit des Merrill-Algorithmus.

IV. Erweiterungen der Algorithmen bei ausgewählten steuerpolitischen Anwendungen

Im vorhergehenden Kapitel wurde gezeigt, wie man die numerische Lösung eines mikroökonomischen Totalmodells ohne staatliche Aktivität ermitteln kann, wenn sich die Dimension des Lösungsraums auf die Zahl der Produktionsfaktoren reduzieren läßt. Bei der Analyse finanz- oder wirtschaftspolitischer Problemstellungen kommt es allerdings weniger auf die Werte der endogenen Variablen in einem bestimmten Gleichgewicht an, als vielmehr auf die *Veränderungen* der Gleichgewichtsvariablen, verursacht durch Änderungen der exogenen Variablen. Typische finanzpolitische Fragestellungen lauten etwa: Welche Auswirkungen auf das Preisniveau, das Sozialprodukt oder die gesellschaftliche Wohlfahrt hat eine Änderung des Mehrwertsteuersatzes? Welche Wirkungen gehen von einer aufkommensneutralen Substitution der direkten durch indirekte Steuern aus?

Tabelle 3: Ablaufdiagramm zum Merrill-Algorithmus (Beispiel aus Tab. 1)



In diesem Kapitel soll aufgezeigt werden, wie die oben vorgestellten Algorithmen zu modifizieren sind, um derartige steuerpolitische Problemstellungen untersuchen zu können. Die entsprechenden Erweiterungen des Scarf-Algorithmus gehen auf *Shoven / Whalley* (1972, 1973, 1977) zurück. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels zeigen wir kurz, wie das theoretische Modell aus Kapitel II bei Existenz finanzwirtschaftlicher Aktivitäten zu erweitern ist; im zweiten Abschnitt werden für typische steuerpolitische Fragestellungen die erforderlichen Modifikationen der Algorithmen angegeben.

1. Erweiterungen des theoretischen Modells

Exemplarisch betrachten wir die folgenden Steuerarten:

— Verbrauch- bzw. Umsatzsteuern

Steuerobjekte sind die Konsumgüter $1, \dots, N$; als Steuerbemessungsgrundlage werden die auf ein Gut j bezogenen Umsätze unter Ausschluß der Steuern gewählt. Es bezeichne τ_j den jeweiligen Steuersatz, p_j sei der für die Entscheidungen der Unternehmen relevante Produzentenpreis, q_j der für die Haushalte gegebene Konsumentenpreis. Es gilt

$$(18) \quad q_j = p_j (1 + \tau_j) .$$

— Gewerbesteuern

Der Fiskus erhebe eine allgemeine Lohnsummensteuer zum Satz τ_e . Den Entscheidungen der Produzenten liegen dann die Bruttopreise $w(1 + \tau_e)$ zugrunde.

Außerdem gebe es eine sektorspezifische Gewerbekapitalsteuer mit Sätzen τ_k^j ($j = 1, \dots, N$), wobei als Steuerbemessungsgrundlage die in den einzelnen Sektoren erzielten Produktionserträge des Faktors Kapital dienen sollen. Der in Produktionssektor j zugrundezulegende Preis des Faktors Kapital ist also durch $r(1 + \tau_k^j)$ bestimmt.

— Einkommensteuern

Zur Vereinfachung betrachten wir nur eine indirekt progressive Einkommensteuer, die durch einen konstanten Marginalsatz τ_y und einen in den Tarif eingearbeiteten Grundfreibetrag F charakterisiert ist. Die aus der Erhebung dieser Steuer resultierende Steuerschuld des h -ten Haushalts ergibt sich aus

$$(19) \quad \tau_y (wL^h + rK^h - F)$$

— Transferzahlungen

Zur Vermeidung zusätzlicher, durch die Bereitstellung staatlicher Kollektivgüter bedingter Probleme⁹ wird unterstellt, daß der Fiskus das gesamte Steueraufkommen T zu festen Anteilen γ^h ($h = A, \dots, H$) mit $\gamma^A + \dots + \gamma^H = 1$ als Lump-sum-Transfer an die Haushalte ausschüttet. Die von Haushalt h bezogenen Transfers sind dann

$$(20) \quad T^h = \gamma^h T \quad \left(\sum_h T^h = T \right)$$

Wir geben nun noch kurz an, wie die Gleichungen (8) bis (13) zur Ermittlung der Überschuß-Nachfragefunktionen in Kapitel II zu ändern sind. Da diese Modifikationen mehr oder weniger naheliegen, beschränken wir uns auf die bloße Wiedergabe einiger Gleichungen:

$$(8)' \quad \frac{L_j}{Q_j} l^j(r(1 + \tau_k^j), w(1 + \tau_l), 1); \quad \frac{K_j}{Q_j} = k^j(\cdot)$$

$$(9)' \quad p^j(\cdot) = w(1 + \tau_l) \cdot l^j(\cdot) + r(1 + \tau_k^j) \cdot k^j(\cdot)$$

$$(10)' \quad \mathbf{x}_j^h(\cdot) = \mathbf{x}_j^h((1 + \tau_l) \cdot p_1(\cdot), \dots, (1 + \tau_N) \cdot p_N(\cdot), r, w, \tau_y, F, T^h)$$

mit analogem Argumentbereich für $L^h(\cdot), K^h(\cdot)$

Die Gleichungen (11) bis (13) bleiben bis auf die entsprechenden Modifikationen im Argumentbereich unverändert.

Zusätzlich zu berücksichtigen ist jetzt allerdings unter Punkt 4 die ‚Überschuß-Nachfragefunktion‘ des staatlichen Sektors

$$(13c)' \quad \begin{aligned} \varrho_{st}(\cdot) = & \sum_{j=1}^N \sum_{h=A}^H \tau_j p_j x_j^h + \tau_e \sum_{j=1}^N w L_j + \sum_{j=1}^N \tau_k^j r k_j + \\ & + \sum_{h=A}^H \tau_y (w L^h + r K^h - F) - \sum_{h=A}^H T^h . \end{aligned}$$

Bei Existenz finanzwirtschaftlicher Aktivitäten ist das Walras-Gesetz unter Verwendung abkürzender Notation nämlich durch

$$(7)' \quad w \cdot \varrho_e + r \cdot \varrho_k + \varrho_{st} = 0$$

gegeben.

Man beachte, daß Steuereinnahmen und Transferausgaben außerhalb eines Gleichgewichts in der Regel nicht übereinstimmen. Zu berücksichtigen ist ferner, daß die Konsumgüternachfrage- und Faktorangebots-

⁹ Pigott / Whalley (1982).

funktion der Konsumenten jetzt homogen vom Grade Null in den Faktortpreisen und den Transfers T^h (bzw. den Steueraufkommen T) sind.

Für positive Faktorpreise und Steueraufkommen ist ein Gleichgewicht in dieser Ökonomie durch einen Vektor (r^*, w^*, T^*) derart charakterisiert, daß die Überschuß-Nachfragefunktionen q_h, q_l, q_{st} an dieser Stelle den Wert Null annehmen.

2. Beispiele zur numerischen Analyse von Steuerpolitiken in allgemeinen Gleichgewichtsmodellen

a) Budgetinzidenzen

Wir erläutern hier die erforderliche Modifikation der Algorithmen, wenn einer oder mehrere der exogen gegebenen Steuersätze geändert wird. Der aus dieser steuerpolitischen Maßnahme resultierenden Variation des Einkommens entspricht im Gleichgewicht eine entsprechende Anpassung der Transferzahlungen. *Musgrave* (1966) hat dafür den Begriff der Budgetinzidenz geprägt.

Wir beschreiben das Vorgehen zunächst allgemein für den Scarf-Algorithmus — die Änderungen des Merrill-Algorithmus sind dann offenkundig — und führen für beide Lösungsverfahren eine einfache Modellrechnung durch.

Da die Nachfrage- bzw. die Angebotsfunktionen der Konsumenten, wie erwähnt, homogen vom Grade Null in $r, w,$ und T sind, kann die Normierung (15) durch

$$(15)' \quad r + w + T = 1$$

ersetzt werden. Entsprechend ist dem r - w -Koordinatensystem eine Achse T hinzuzufügen. Der Algorithmus von Scarf ist dann in Analogie zu oben ein Suchprozeß nach einem approximativen Gleichgewicht (r^*, w^*, T^*) auf dem 2-Standardsimplex (vgl. Abbildung 6 auf S. 732), derjenige von Merrill auf einem Teil des 3-Standardsimplex.

Mit dem durch die Eckpunkte der einzelnen Simplexe bestimmten (r, w, T) -Kombinationen und den vorgegebenen Steuersätzen können die Wirtschaftssubjekte ihre individuellen Optimierungsprobleme lösen.

Die Markierungsregeln und der Ablauf der Algorithmen bleiben unverändert.

Bei der Berechnung der ‚Überschuß-Nachfragefunktion‘ des Staates, q_{st} , ist zu beachten, daß das Steueraufkommen und damit bei gegebenen γ^h 's auch die Transfers durch die Eckpunkte der betrachteten Simplexe

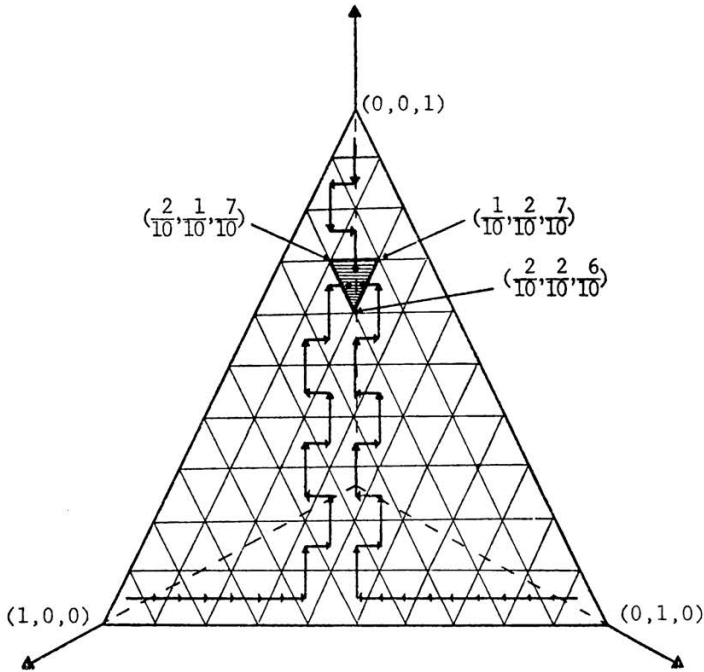


Abb. 6

bestimmt sind, während sich die tatsächlichen Steuereinnahmen endogen berechnen.

In Abb. 6 wurden für die drei möglichen Startsimplexe des Scarf-Algorithmus für $D = 10$ die Wege zum Lösungsimplex eingezeichnet, wenn — ausgehend von einem Gleichgewicht ohne staatliche Aktivität — eine 50%ige Aktivität Steuer auf das in Sektor 1 erwirtschaftete Kapitaleinkommen sowie eine 10%ige Umsatzsteuer eingeführt und die Steuereinnahmen zu Anteilen $\gamma^A = 0,4$, $\gamma^B = 0,6$ an die Haushalte ausgeschüttet werden.

Die Erläuterung der in bezug auf den Merrill-Algorithmus vorzunehmenden Änderungen kann kurz gehalten werden. Wie bei Scarf wird auch hier der Simplex um die T -Koordinate erweitert. Der Starteckpunkt ist dann also etwa durch $(0, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ gegeben, das Startsimplex ermittelt man für $n = 3$ aus der in Schritt 2 des Merrill-Algorithmus angegebenen Vorschrift.

Tabelle 4 enthält einen Überblick über Annahmen und einige Ergebnisse des erwähnten Beispiels.

Tabelle 4: (Approximative) Gleichgewichtslösung für ein Modell mit staatlicher Aktivität

Modell	Parameterwerte und funktionale Formen wie in Tab. 1 Steuerpolitische Parameter: $\tau_k^G = 0.5$ (50%ige Gewerbesteuer in Sektor 1) $\tau_1 = \tau_2 = 0.1$ (10%ige allgemeine Verbrauchsteuer) $\gamma^A = 0.4; \gamma^B = 0.6$	
Algorithmus	Merrill; Anfangswerte: $D = 30; \beta = 1/3; \varepsilon = 0.001; \hat{b} = (0,10/30,10/30,10/30)$	
Gleichgewichtspreise ^{a)}	$r = 1.126; w = 1.000; p_1 = 1.466; p_2 = 1.005$	
Gleichgewichtsmengen	Haushalte	Unternehmen
	$x_1^A = 9.181$ $x_2^A = 16.170$	$x_1^B = 13.261$ $x_2^B = 41.066$
Steueraufkommen, Transfers	$T = 11.328$	$T^A = 4.531$ $T^B = 6.797$
Überschuß-Nachfrage	$Q_h = 0.0002$	$Q_t = -0.0006$ $Q_{st} = 0.0004$
Ausführungszeit in CP seconds: 0.482		

a) Alle Preise werden in Einheiten des Faktors Arbeit ausgedrückt.

b) *Differentiale Steuerinzidenzen*

Neben den Budgetinzidenzen sind vor allem aufkommensneutrale Umgestaltungen des Steuersystems — in Musgraves Terminologie: differentiale Steuerinzidenzen — von finanzwissenschaftlichem Interesse. Wir erläutern deshalb in diesem Abschnitt, wie derartige Problemstellungen zu lösen sind und verdeutlichen das Vorgehen an einigen Beispielen.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist ein Gleichgewicht, in dem ein bestimmtes Steueraufkommen, etwa T^0 , erzielt wird. Der Fiskus plane eine solche Reform des Steuersystems, daß die durch eine geeignete Änderung von Steuersätzen bewirkte Substitution einer Steuerart gegen eine andere das gesamtwirtschaftliche Steueraufkommen unverändert läßt.

Nun ist aber keineswegs klar, wann und in welchem Sinne zwei Steueraufkommen T^0 und T^1 als „gleich“ bezeichnet werden können. Schon allein aus Raumgründen kann auf diese Frage an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Wir nehmen einfach an, daß das nominale Steueraufkommen in Situation 1, T^1 , durch Gewichtung mit dem Laspeyres-Preisindex

$$(21) \quad Q_L = \frac{\sum_{i=1}^N q_i^1 \sum_{h=A}^H (x_i^h)^0}{\sum_{i=1}^N q_i^0 \sum_{h=A}^H (x_i^h)^0}$$

mit dem Aufkommen der Basisperiode 0, T^0 , „real“ vergleichbar wird.¹⁰ Bei einer aufkommensneutralen Umgestaltung des Steuersystems ist dann die Beziehung

$$(22) \quad T^1 \cdot \frac{1}{Q_L} = T^0$$

zu beachten.

Die Gleichgewichtswerte der Basisperiode 0 sind bekannt; für gegebene Konsumgüterpreise q_1^1, \dots, q_N^1 kann der aufkommensgleiche Steuerbetrag T^1 dann aus (22) berechnet werden.

Im Unterschied zu oben kommt das Steueraufkommen T^1 damit nicht als zusätzliche Dimension des Simplex in Betracht.

Als endogene steuerpolitische Variable ist jetzt vielmehr derjenige Steuersatz τ (bzw. diejenige Kombination von Steuersätzen) anzusehen,

¹⁰ *Shoven / Whalley* (1977) diskutieren den Aussagegehalt und Anwendungsbereich des Paasche- und des Konüs-Preisindex. Eine detaillierte Analyse von Preis- bzw. Steuerlastindizes findet sich bei *Genser* (1983).

dessen (bzw. deren) endogene Variation die durch (22) definierte Aufkommensgleichheit sicherstellt. Allerdings kann dieser Steuersatz selbst nicht als zusätzliche Koordinate des Preissimplex eingeführt werden, wie die folgende Überlegung zeigt: Wegen (22) ist T^1 linear-homogen in den Konsumgüterpreisen q_1^1, \dots, q_N^1 , so daß die von den Konsumenten angebotenen bzw. nachgefragten Faktor- bzw. Gütermengen bei gegebenen Steuersätzen homogen vom Grade Null in den Faktorpreisen sind. Angenommen, τ wäre eine Koordinate des erweiterten Preissimplex und (r^*, w^*, τ^*) eine *exakte* Gleichgewichtslösung, die zufällig mit einem Eckpunkt innerhalb des 2-Standardsimplex übereinstimmt. Mit $(kr^*, kw^*, k\tau^*)$ für ein $k > 0$ ist bei veränderter Feinheit der gleiche Eckpunkt, aber aufgrund der erwähnten Homogenitätseigenschaft eine andere Gleichgewichtslösung bestimmt, was sicherlich ein Widerspruch ist.

Als dritte Komponente des Simplex wird deshalb eine Hilfsvariable z eingeführt, also

$$(15)'' \quad r + w + z = 1,$$

und der gesuchte Steuersatz τ als linear-homogene Funktion der Koordinaten des Simplex bestimmt.

Je nachdem, ob der sich endogen einstellende Steuersatz auf den Nettopreis ($\tau = \tau^n$) oder den Bruttopreis ($\tau = \tau^b$) bezogen ist, definieren wir:

$$(23a) \quad \tau^n = \frac{r + w}{z} - 1$$

bzw.

$$(23b) \quad \tau^b = \frac{z}{r + w}.$$

Die einzelnen Schritte der Algorithmen von Scarf und Merrill bleiben unverändert; zu modifizieren sind lediglich die Rechenvorschriften zur Ermittlung der Überschuß-Nachfragefunktionen q_k , q_l , und q_{st} .

Die nachfolgend angegebenen Beispiele dienen zur Verdeutlichung. Wir beschreiben zunächst die jeweiligen steuerpolitischen Maßnahmen, geben dann eine approximative Gleichgewichtslösung an und wählen die Summe der individuellen Hicks'schen Äquivalenten Variationen (HEV) als Indikator für die durch die aufkommensneutrale Umgestaltung des Steuersystems bewirkte Wohlfahrtsänderung.

Wenn I^0 bzw. I^1 das gesamte Lump-sum-Einkommen eines Konsumenten in Periode 0 bzw. Periode 1 bezeichnet (der Index h wird zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen) und $E(q, U)$ die Ausgaben-

funktion in Abhängigkeit des Preisvektors q und des Nutzenniveaus U , gilt allgemein¹¹

$$HEV = I^1 - I^0 - [E(q^1, U^1) - E(q^0, U^1)] .$$

Mit den hier zugrundeliegenden (homothetischen) Nutzenfunktionen vom CES-Typ vereinfacht sich diese Formel zu

$$HEV = \frac{U^1 - U^0}{U^0} I^0 .$$

Im ersteren Beispiel wird in der Ausgangssituation 0 eine 30%ige Lohnsummensteuer und eine nach Gütern differenzierende Verbrauchsteuer erhoben. Der Fiskus plane eine aufkommensneutrale Steuersubstitution derart, daß die Lohnsummensteuer abgeschafft und die Verbrauchsteuersätze multiplikativ erhöht werden. Als Alternative wird auch eine additive Erhöhung der Verbrauchsteuersätze in Betracht gezogen. Tabelle 5 enthält die Ergebnisse im Überblick.

Als zweites Beispiel berechnen wir die Wirkungen einer aufkommensneutralen Substitution einer 30%igen proportionalen Einkommensteuer gegen eine neu einzuführende differenzierende Verbrauchsteuer, wobei der Steuersatz auf die Umsätze von Gut 1 doppelt so hoch sein soll wie der auf die Umsätze von Gut 2 bezogene Steuersatz.

Da das Einkommen in diesem Beispiel für die Konsumenten gegeben ist, wirkt die Einkommensteuer wie eine Lumpsum-Steuer. Dementsprechend ist zu erwarten, daß die Steuersubstitution zu Wohlfahrtsverlusten führt. Würde man die proportionale Einkommensteuer durch eine allgemeine Verbrauchsteuer ersetzen, blieben die realen Werte der Systemvariablen unverändert (vgl. Tabelle 6 auf S. 738).

V. Schlußbemerkungen

Mit dem vorliegenden Beitrag wurde versucht, eine einfache Einführung in die Algorithmen von Scarf und Merrill zur numerischen Berechnung allgemeiner mikroökonomischer Gleichgewichte zu geben.

Anhand einiger Beispiele aus der Steuerpolitik konnte die grundsätzliche Bedeutung dieser Verfahren für die praktische Finanz- und Wirtschaftspolitik aufgezeigt werden.

Die Darstellung wurde bewußt einfach gehalten. Auf die Möglichkeit, daß der Algorithmus zyckelt wurde ebenso wenig eingegangen wie auf das Problem multipler Lösungen. Ausgeklammert wurden auch die vor

¹¹ Vgl. etwa Tresch (1981), 67.

Tabelle 5: Aufkommensneutrale Substitution : Lohnsummensteuer vs. Verbrauchsteuer

	Gleichgewicht 0	Gleichgewicht 1
Modell	Lohnsummensteuer: $\tau_1^1 = \tau_1^2 = 0.3$ Verbrauchsteuer: $\tau_1 = 0.2$; $\tau_2 = 0.1$	Abschaffung der Lohnsummensteuer: $\tau_1^1 = \tau_1^2 = 0.0$ Anpassung der Verbrauchsteuer (endogener Steuersatz): multiplikativ: $q_1 = p_1(1 + \tau)$ additiv: $q_i = p_i(1 + \tau_i + \tau)$ $q_2 = p_2(1 + 0.5\tau)$
Algorithmus	Merrill; Anfangswerte: wie in Tabelle 4	
Gleichgewichtspreise	$r = 1.806$; $p_1 = 1.824$; $w = 1.0$; $p_2 = 1.428$	$r = 1.426$ $w = 1.0$ $p_1 = 1.412$ $p_2 = 1.111$
Gleichgewichtsmengen	$x_1^A = 12.369$ $x_1^B = 11.733$ $x_2^A = 20.343$ $x_2^B = 35.109$ $Q^1 = 24.102$ $Q^2 = 55.452$ $L^1 = 25.617$ $L^2 = 34.383$ $K^1 = 5.901$ $K^2 = 19.099$	$x_1^A = 10.216$ $x_1^B = 12.044$ $x_2^A = 19.237$ $x_2^B = 38.563$ $Q^1 = 22.260$ $Q^2 = 57.801$ $L^1 = 23.957$ $L^2 = 36.044$ $K^1 = 5.239$ $K^2 = 19.762$
Steuern	$T = 34.709$	$\tau_1 = 0.5$ $\tau_2 = 0.25$
Wohlfahrtseffekte		$HEV^A = -4.562$ $HEV^B = 4.610$ $HEV = 0.048$
Ausführungszeit (CP seconds)	0.356	0.159
		0.180

Tabelle 6: Aufkommensneutrale Steuersubstitution : direkte vs. indirekte Steuern

	Gleichgewicht 0	Gleichgewicht 1
Modell	Einkommensteuer: $\tau_y^A = \tau_y^B = 0.3$	Abschaffung der Einkommensteuer Einführung einer ... Verbrauchsteuer (endogener Steuersatz τ) differenzierten: $q_1 = p_1(1 + \tau)$ $q_2 = p_2(1 + 0.5\tau)$ allgemeinen: $q_i = p_i(1 + \tau)$
Algorithmus	Merrill; Anfangswerte: wie in Tabelle 4	
Gleichgewichtspreise	$r = 1.372;$ $p_1 = 1.399;$	$w = 1.0;$ $p_2 = 1.092$ $r = 1.438$ $p_1 = 1.415$ $w = 1.0$ $p^2 = 1.115$
Gleichgewichtsmengen	$x_1^A = 11.846$ $x_2^A = 17.162$ $Q^1 = 25.049$ $L^1 = 26.460$ $K^1 = 6.252$	$x_1^B = 13.203$ $x_2^B = 37.079$ $Q^2 = 54.241$ $L^2 = 33.539$ $K^2 = 18.748$ $x_1^B = 11.763$ $x_2^B = 38.737$ $Q^2 = 58.519$ $L^2 = 36.560$ $K^2 = 19.960$ alle Werte wie in Gleichgewicht 0
Steuern	$T = 28.286$	$\tau_1 = 0.66$ $\tau_2 = 0.33$ $\tau_1 = \tau_2 = 0.429$
Wohlfahrtseffekte		$HEV^A = -0.141$ $HEV^B = -0.541$ $HEV = -0.682$ $HEV^A = HEV^B = 0$
Ausführungszeit (CP seconds)	0.306	0.195 0.170

allem von Scarf behandelten ökonomischen Modelle, die durch Vektor-markierung (im Gegensatz zur ganzzahligen Markierung oben) zu lösen sind. Dieses Vorgehen erscheint vor allem aus pragmatischen Erwägungen gerechtfertigt. Degenerierte Probleme sind in der Praxis bislang äußerst selten aufgetreten (und könnten im übrigen durch geeignete Techniken gelöst werden); die bislang vorliegenden empirischen allgemeinen Gleichgewichtsmodelle für die USA¹² und Großbritannien¹³ arbeiten mit ganzzahliger Markierung und haben eine eindeutige Lösung.¹⁴

Zu erwähnen bleibt, daß die numerische Lösung allgemeiner Gleichgewichtsmodelle mit dem Verfahren von Merrill weitgehend unproblematisch geworden ist. Ein weitaus größeres Problem im Rahmen der „Angewandten Allgemeinen Gleichgewichtsökonomie“ stellt die Verfügbarkeit einer mikroökonomisch konsistenten Datengrundlage dar.

Darauf wird an anderer Stelle eingegangen.

Zusammenfassung

Die Algorithmen von Scarf und Merrill sind im wesentlichen numerische Verfahren zur Bestimmung von (approximativen) Fixpunkten einer stetigen Abbildung eines Simplex in sich selbst. Aufgrund des bekannten Zusammenhangs zwischen Fixpunktsätzen und dem Beweis der Existenz von Gleichgewichtslösungen in allgemeinen Walras-Modellen können beide Verfahren für die numerische Analyse ökonomischer Probleme eingesetzt werden.

Zur effizienten Implementierung dieser Verfahren auf dem Computer wird eine einfache Simplizialzerlegung des Standardsimplex gewählt. Den Eckpunkten der dadurch bestimmten Simplexe werden bestimmte Markierungen zugeordnet, die von der Struktur des ökonomischen Problems abhängen. Eine approximative Gleichgewichtslösung ist dann mit einem vollständig markierten Simplex gefunden. Anwendungsmöglichkeiten und Aussagegehalt beider Algorithmen werden anhand einfacher allgemeiner Gleichgewichtsmodelle mit und ohne staatlicher Aktivität verdeutlicht.

Summary

Essentially, the algorithms of Scarf and Merrill are numerical methods to approximate a fixed point of a continuous mapping into itself. Because of the well-known relationship between fixed point theorems and an existence proof for a competitive Walras-model, both algorithms can be used for numerically solving non-linear economic models.

In order to effectively implement these algorithms on a computer, a simple simplicial subdivision of the unit simplex is required. Each of the

¹² Vgl. Ballard / Fullerton / Shoven / Whalley (1984).

¹³ Vgl. Pigott / Whalley (1984).

¹⁴ Man vgl. aber Kehoe (1980) für ein einfaches Beispiel mit multiplen Lösungen.

vertices of the simplices in this subdivision will be given an integer according to the economic problem at hand. With a completely labeled simplex an approximate equilibrium solution is found.

The usefulness of both algorithms is illustrated for simple general equilibrium models with and without government activities.

Literatur

- Arrow, K. J. und M. D. *Intrilligator* (1982), Handbook of Mathematical Economics. Bd. 2. Amsterdam u. a. O.
- Ballard, C., D. Fullerton, J. B. Shoven und J. Whalley (1984), General Equilibrium Analysis of U.S. Tax Policies. Amsterdam u. a. O.
- Debreu, G. (1982), Existence of Competitive Equilibrium, in: K. J. Arrow / M. D. *Intrilligator* (1982), 697 - 743.
- Genser, B. (1983), Steuerlastindizes. Theorie und empirische Evidenz. Habilitationsschrift. Universität Wien.
- Ginsburgh, V. A. und J. L. Waelbroeck (1981), Activity Analysis and General Equilibrium Modelling. Amsterdam u. a. O.
- Hahn, F. (1982), Stability, in: K. J. Arrow / M. D. *Intrilligator* (1982), 745 - 793.
- Kehoe, T. (1980), An Example of Non-Uniqueness of Equilibria. Unveröffentlichtes Manuskript. MIT.
- Lange, O. (1938), On the Economic Theory of Socialism, in: B. E. Lippincott (Hrsg.), *On the Economic Theory of Socialism*. Minneapolis.
- (1967), The Computer and the Market, in: C. H. Feinstein (Hrsg.), *Socialism, Capitalism, and Economic Growth*. Cambridge, Mass., 158 - 161.
- Lipschutz, S. und A. Poe (1978), *Programming with Fortran*. New York u. a. O.
- Lüthi, H.-J. (1976), Komplementaritäts- und Fixpunktalgorithmen in der mathematischen Programmierung, Spieltheorie und Ökonomie. Berlin u. a. O.
- Merrill, O. H. (1972), Applications and Extensions of an Algorithm that Computes Fixed Points of Certain Upper Semi-Continuous Point to Set Mappings. Ph. D. Dissertation. University of Michigan.
- Musgrave, R. A. (1976), *Finanztheorie*. Tübingen. 2. A.
- Pigott, J. und J. Whalley (1982), General Equilibrium with Public Production and Public Provision: Computation, and Results for the U.K. Case, in: D. Bös et al. (Hrsg.), *Public Production*. Wien, New York.
- /— (1984), Economic Effects of U.K. Tax-Subsidy Policies: A General Equilibrium Appraisal (im Druck).
- Robbins, L. (1934), *The Great Depression*. London.
- Scarf, H. (1967), On the Computation of Equilibrium Prices, in: W. Fellner et al. (Hrsg.), *Ten Essays in Honor of Irving Fisher*. New York, 207 - 230.
- (mit T. Hansen) (1973), *The Computation of Economic Equilibria*. New Haven.
- (1982), The Computation of Equilibrium Prices: An Exposition, in: K. J. Arrow / M. D. *Intrilligator* (1982), 1007 - 1061.

- Shoven, J. B. und J. Whalley* (1972), A General Equilibrium Calculation of the Effects of Differential Taxation of Income from Capital in the U.S. *Journal of Public Economics* 1, 281 - 321.
- /— (1973), General Equilibrium with Taxes: A Computational Procedure and an Existence Proof. *Review of Economic Studies* 40, 475 - 489.
- /— (1977), Equal Yield Tax Alternatives: General Equilibrium Computational Techniques. *Journal of Public Economics* 8, 211 - 224.
- /— (1984), Applied General Equilibrium Models of Taxation and International Trade. Erscheint im: *Journal of Economic Literature*.
- Talman, A. J. J.* (mit *G. v. d. Laan*) (1980), Variable Dimension Fixed Point Algorithms and Triangulations. Amsterdam.
- Todd, M. J.* (1976), The Computation of Fixed Points and Applications. Berlin u. a. O.
- Tresch, R. W.* (1981), Public Finance. A Normative Theory. Plano, Texas.
- Van der Laan, G.* (mit *A. J. J. Talman*) (1980), Simplicial Fixed Point Algorithms. Amsterdam.
- Von Hayek, F. A.* (1940), Socialist Calculation: The Competitive Solution. *Economica* 7, 125 - 149.
- Von Mises, L.* (1920), Die Wirtschaftsrechnung im sozialistischen Gemeinwesen. *Archiv für Sozialwissenschaften* 47, 86 - 121.