

Der „isolierte Staat“ im räumlichen Gleichgewicht

Von Martin J. Beckmann

1. Von Thürens „Isolierter Staat“ ist ein geschlossenes ökonomisches System. Die partielle Gleichgewichtsanalyse der Bodennutzung, betrachtet als Funktion der Entfernung vom Markt, sollte also ergänzt werden durch eine allgemeine Gleichgewichtsbetrachtung. Mit anderen Worten, die Preise der verschiedenen Agrarprodukte am zentralen Ort, die für den von Thürenschen Landwirt vorgegeben sind, bedürfen selbst der Bestimmung. Das von-Thürens-Modell könnte in der Tat die räumliche Basis für ein Debreu-Modell des Walrasianischen Gleichgewichts bei vollkommener Konkurrenz hergeben.

In diesem Aufsatz stellen wir uns ein viel bescheideneres Ziel. Es soll ein einfaches allgemeines räumliches Gleichgewicht untersucht werden, für den Fall, daß nur ein Gewerbeprodukt und ein Agrarprodukt produziert werden. Die Bevölkerung N ist vorgegeben und die Arbeitszeit pro Kopf ist konstant, so daß das Arbeitsangebot mit der Bevölkerung identifiziert werden kann. Der Boden des „Isolierten Staates“ ist unbegrenzt, mit anderen Worten, die Wildnis, die den Staat umgibt, soll keine effektive Grenze des Bodenangebots bedeuten.

Zu bestimmen ist das langfristige Gleichgewicht: wieviel Arbeit beschäftigt, wieviel Boden genutzt werden kann; wieviel von jedem der beiden Produkte hergestellt wird und zu welchen Preisen, und welche Löhne und Bodenrenten dabei herauskommen.

Nutzen- und Produktionsfunktion soll vom einfachsten Typ sein: wie von Thürens nehmen wir konstante Koeffizienten in der Produktion an mit Arbeit und Boden als einzigen Inputs. Die Nutzenfunktion sei Cobb Douglas. Der Transport soll nur Arbeit erfordern.

Es ist zweckmäßig, das Problem der örtlichen Nutzung des Bodens zunächst in allgemeiner Form zu entwickeln, unabhängig von der räumlichen Struktur des „Isolierten Staates“, also für beliebige räumliche Märkte in Konkurrenz (Abschnitt 2). Danach kann man die Einfachheit und Durchsichtigkeit der räumlichen Struktur des „Isolierten Staates“ besonders würdigen (Abschnitt 3).

2. Wir betrachten eine räumlich (2-dimensional) ausgedehnte Volkswirtschaft, in der zwei Güter $i = 1, 2$ (Agrarprodukt 1, Gewerbeprodukt 2) produziert werden können. Mit von Thünen nehmen wir konstante Inputkoeffizienten an. Die erforderliche Arbeitsmenge pro Produkteinheit sei a_i und die erforderliche Bodenmenge b_i . Sie seien gegeben unabhängig vom Standort. Die örtlichen Bedingungen für die landwirtschaftliche Produktion (Fruchtbarkeit des Bodens, Klima) sollen ausgedrückt werden durch eine vom Standort $x = (x_1, x_2)$ abhängige Kapazität der Fläche $c = c(x)$.

Sind $z_i = z_i(x)$ die Outputs pro Flächeneinheit, dann gilt

$$b_1 z_1 + b_2 z_2 \leq c$$

Die folgenden Rechnungen werden einfacher, wenn die Inputkoeffizienten des Bodens durch Wahl der Outputeinheiten gleich eins gemacht werden. D. h. daß wir die Outputeinheit als Ertrag einer (idealen) Flächeneinheit messen. Die Bodenkapazitätsbeschränkung nimmt dann die einfache Form an

$$(1) \quad z_1 + z_2 \leq c$$

Für die beiden Produkte sollen räumliche Märkte in vollkommener Konkurrenz existieren. Die Preise $p_i(x)$ sind daher den Produzenten vorgegeben und unabhängig von ihrem eigenen Verhalten. Ebenso vorgegeben ist der Arbeitslohn w als Funktion des Standortes

$$w = w(x) .$$

Das Verhalten der Produzenten und die daraus resultierende Bodennutzung ergeben sich dann aus dem Prinzip der Profitmaximierung. Der Eigentümer eines Bodenstücks produziert selbst (oder läßt produzieren) die Kombination von Outputs z_1, z_2 , die seinen Gewinn, und das heißt hier die Bodenrente, maximieren. Das ist ganz im Sinne von von Thünen, nur daß wir statt verschiedener Agrarprodukte hier ein landwirtschaftliches und ein gewerbliches Produkt zur Auswahl haben. Gewinnmaximierung bedeutet

$$(2) \quad \begin{array}{l} \text{Max} \sum_{i=1}^2 (p_i - a_i w) z_i \\ z_1 \geq 0 \\ z_2 \geq 0 \end{array}$$

unter der Nebenbedingung $z_1 + z_2 \leq c$

Das Ergebnis ist

$$(3) \quad z_i = \left\{ \begin{array}{l} c \\ 0 \leq z_i \leq c \\ 0 \end{array} \right\} \text{ wenn } p_i - a_i w \{ \geq \} \text{ Max } [0, p_j - a_j w] \\ j \neq i$$

Wir machen jetzt die zusätzliche Annahme, daß die Transportkosten für eine Einheit des Agrarprodukts verschieden sind von denen für eine Einheit des Gewerbeprodukts. Im allgemeinen wird auf einer Bodeneinheit dem Gewicht nach mehr Industrieprodukt produziert als Agrarprodukt. Es zeigt sich dann, daß der mittlere Fall in Gleichung (3) nur ausnahmsweise („auf einem Gebiet vom Maße Null“) auftritt. Nehmen wir außerdem an, daß im Zweifel der Boden landwirtschaftlich genutzt wird, dann läßt sich die Bedingung (3) wie folgt ausschreiben:

$$(4) \quad z_1(x) = \begin{cases} c(x) & \text{wenn } p_1 - a_1 w \geq p_2 - a_2 w \\ & \text{und } p_1 - a_1 w \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$(5) \quad z_2(x) = \begin{cases} c(x) & \text{wenn } p_2 - a_2 w > p_1 - a_1 w \\ & \text{und } p_2 - a_2 w > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um die Analyse des räumlichen Gleichgewichts nicht unnötig zu komplizieren, sollen Probleme der Wanderungen und des Pendelverkehrs nicht betrachtet werden. Die Arbeit soll als (langfristig) vollkommen beweglich im Raume betrachtet werden, so daß der Lohnsatz vom Standort unabhängig wird

$$(6) \quad w(x) = w$$

Tatsächlich wird hier die Geldillusion unterstellt: Die Arbeiter betrachten nur die Geldlöhne. Eine alternative einfache Annahme, die aber hier nicht durchgeführt werden soll, ist die, daß die Arbeit vollkommen unbeweglich ist, so daß Arbeitslohn und Bodenrente beide als separate Renten abhängig vom Standort zu bestimmen sind in einem linearen Programmierungsmodell.

Die Standorte, für die

$$(7) \quad p_i - wa_i < 0 \quad i = 1, 2$$

gilt, werden also niemals genutzt. Wie groß die ungenutzten Flächen sind, hängt ab von den realen Preisen gemessen in Lohneinheiten

$$\frac{p_i}{w}$$

Je höher die Löhne relativ zu den Preisen sind, um so beschränkter ist die nutzbare Fläche.

Bei gegebenen Preisen und Lohn werden durch die Bedingungen (4), (5) die Standorte der Produktion festgelegt.

Ebenso ist die Bodenrente dadurch bereits bestimmt. An Orten, wo Gut 1 produziert wird, ist die Bodenrente

$$\varrho(x) = [p_1(x) - a_1 w] c(x) .$$

Allgemein ist die Bodenrente $\varrho(x)$ gegeben durch

$$(8) \quad \varrho(x) = c(x) \cdot \text{Max} \{0, \text{Max}_i [p_i(x) - a_i w]\}$$

Sie ist Null da, und nur da, wo nicht produziert wird. Das örtliche Einkommen ist dann gegeben als die Summe aus örtlichen Arbeitslöhnen $ca_i w$ und Bodenrente (8), wobei der Produktindex i in beiden Ausdrücken übereinstimmen muß. Ist

$$i = i(x)$$

gegeben, dann ergibt sich das Einkommen $y(x)$ als

$$(9) \quad y(x) = c(x) p_i(x) \quad \text{mit } i = i(x)$$

Wir müssen als nächstes den Konsum bestimmen. Die Nutzenfunktion sei in der folgenden einfachen Form angenommen (äquivalent einer Cobb-Douglas-Funktion):

$$(10) \quad u = \alpha_1 \log q_1 + \alpha_2 \log q_2 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

wobei q_i der Konsum des Gutes i pro Flächeneinheit ist. Alle Haushalte (gleich ob Arbeiter oder Bodenbesitzer und unabhängig vom Standort) sollen dieselbe Nutzenfunktion (10) haben. Der Konsum von i an einem Standort x hängt dann nur ab vom örtlichen Einkommen $y(x)$ und von den örtlichen Preisen $p_i(x)$.

In der Tat ergibt Maximierung des Nutzens (10) unter der Budgetbeschränkung

$$(11) \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 \leq y$$

die bekannte Nachfragefunktion mit Einheitselastizität

$$(12) \quad q_i = \alpha_i \frac{y}{p_i}$$

An Orten, wo 1 produziert wird, ist

$$y = c p_1$$

also

$$q_1 = \alpha_1 c$$

$$q_2 = \alpha_2 c \frac{p_1}{p_2}$$

Allgemein ist an den Standorten der Produktion von i

$$(13) \quad q_i = \alpha_i c$$

$$(14) \quad q_j = \alpha_j c \frac{p_i}{p_j} .$$

Es wird also an den Standorten der Produktion jeweils ein konstanter Bruchteil des Brutto-Outputs lokal konsumiert.

Als nächstes betrachten wir die Exporte und Importe der beiden Güter in jedem Standort. Der Nettoexport des Gutes i ist $z_i - q_i$. An Orten, wo i produziert wird, gilt gemäß (13)

$$(15) \quad z_i - q_i = (1 - \alpha_i) c = \alpha_j c$$

und gemäß (14)

$$(16) \quad z_j - q_j = -j c \frac{p_i}{p_j}$$

Die Budgetgleichungen der Haushalte implizieren, daß die Handelsbilanz jedes Ortes ausgeglichen ist.

$$(17) \quad \sum_i p_i (z_i - q_i) = 0 .$$

Bisher haben wir nur ortsgebundene Aktivitäten betrachtet: Produktion und Konsum. Die Exporte und Importe werden durch Gütertransporte vermittelt. In einem zweidimensionalen Kontinuum wie den „Isolierten Staat“ können die Güterströme in allen Richtungen und mit jeder Stärke fließen. Sie werden deshalb zweckmäßig durch ein zweidimensionales Feld von Stromvektoren $\Phi_i(x)$ dargestellt¹.

Dabei gibt die Richtung von Φ die lokale Richtung der Transporte des Gutes i und der Betrag $|\Phi|$ die pro Zeiteinheit dort beförderte Menge an.

Zwischen dem Strömungsfeld Φ und den Nettoexporten besteht die Beziehung

$$(18) \quad \operatorname{div} \Phi_i + q_i - z_i = 0 ,$$

wobei

$$(19) \quad \operatorname{div} \Phi = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}$$

die Divergenz oder Quellenstärke des Strömungsfeldes ist. Damit im isolierten Staat ein Gleichgewicht möglich ist, muß die Summe der örtlichen Exporte gleich der Summe der örtlichen Importe sein, d. h.

$$(20) \quad \iint (q_i - z_i) dx_1 dx_2 = 0 .$$

¹ Beckmann (1952).

Bisher wurde nichts über die räumliche Struktur der Preise angenommen. Die räumliche Preisstruktur muß aber verträglich sein mit den Güterströmen. Im Gleichgewicht darf es keine Gewinnmöglichkeiten durch interlokalen Handel (Arbitrage) geben. Seien $k_i = k_i(x)$ die in Geld gemessenen Transportkosten pro Einheit des Gutes und Einheitsentfernung für Gut i . Arbitragegewinne sind ausgeschlossen, wenn

$$(21) \quad |\text{grad } p_i| \leq k_i$$

denn der Gradient $\text{grad } p$ mißt den steilsten Anstieg der Preise p unter allen möglichen Richtungen.

Wenn aber ein Transport des Gutes am Orte x stattfinden soll, muß tatsächlich gelten

$$(22) \quad k_i \frac{\Phi_i}{|\Phi_i|} = \text{grad } p_i .$$

Das heißt der Gewinn durch die Bewegung des Gutes muß gleich sein den dafür aufgewendeten Transportkosten.

Das räumliche Gleichgewicht in den Güterströmen erfordert somit das gleichzeitige Bestehen der Beziehungen (15), (16), (18) und (22). Damit ein allgemeines wirtschaftliches Gleichgewicht im Raum besteht, muß außerdem gelten, daß die gegebene Arbeit N mit einem positiven Lohn w vollbeschäftigt ist. Für den Boden gilt lediglich, daß er dort, wo eine positive Rente ρ vorliegt, voll ausgenutzt wird.

Bei homogenem Boden und überall gleichen Produktionstechniken ist eine mögliche Lösung des räumlichen Wirtschaftsproblems die, daß an jedem Ort sowohl das Industrie- als auch das Agrarprodukt für den lokalen Konsum hergestellt werden und keine Gütertransporte stattfinden. Bei konstanten Skalenerträgen und Homogenität des Bodens ist dies in der Tat die Optimallösung.

3. Wir nehmen nun ausdrücklich an, daß die industrielle Produktion mit wachsenden Skalenerträgen erfolgt. Dies drückt sich so aus, daß die Inputkoeffizienten nur dann die niedrigen Werte a_2 und 1 haben (für Arbeit und Boden), wenn die industrielle Produktion in einem zentralen Bereich von endlichem Radius r_0 konzentriert ist. Der Brutto-Output des Industrieprodukts ist dann

$$(23) \quad Z_2 = \pi r_0^2 z_2 = \pi r_0^2 c = \pi r_0^2$$

wenn wir von nun an annehmen, daß $c = 1$ ist.

Die landwirtschaftliche Produktion liegt dann in einem Kreisring um diesen inneren Zirkel. Sein äußerer Radius sei R . Der Brutto-Output der Landwirtschaft ist dann

$$(24) \quad Z_1 = \pi (R^2 - r_0^2) z_1 = \pi (R^2 - r_0^2)$$

Wenden wir uns jetzt der räumlichen Struktur von Produktion, Export, Konsum, Import und Transport zu. Es ist

$$(25) \quad z_1 = 0 \quad z_2 = 1 \quad 0 \leq x \leq z_2 r$$

$$(26) \quad z_1 = 1 \quad z_2 = 0 \quad r_R \leq x \leq z_R$$

Um Einkommen und Konsum zu bestimmen, müssen die Preise bekannt sein. Nun fließt das Industrieprodukt vom Zentrum weg, das Agrarprodukt zum Zentrum hin. Also ist

$$(27) \quad \frac{dp_1}{dr} = -k_1(r)$$

$$(28) \quad \frac{dp_2}{dr} = k_2(r)$$

Das Gut i möge das Gewicht g_i pro Produkteinheit haben. Für die Transportkosten k_i gilt dann

$$(29) \quad k_i = g_i \cdot a_0 w$$

Die Preise von Agrarprodukt und Industrieprodukt ergeben sich somit als

$$(30) \quad p_1(r) = p_1(0) - k_1 r$$

$$(31) \quad p_2(r) = p_2(0) + k_2 r$$

Wo k_i gegeben ist durch (29).

Im Industriegebiet ist das Einkommen pro Flächeneinheit $p_2(r)$, im Agrargebiet $p_1(r)$. Das Ende des Siedlungsgebietes ist erreicht, wenn $p_1(R) = 0$.

Im Industriesektor ist der Konsum des Industrieprodukts pro Flächeneinheit konstant gleich

$$(32) \quad q_2(r) = \alpha_2 \quad 0 \leq r \leq r_0$$

und der Konsum des Agrarprodukts ist

$$(33) \quad q_1(r) = \alpha_1 \frac{p_2}{p_1}$$

$$q_1(r) = \alpha_1 \frac{p_2 + k_2 r}{p_1 - k_1 r} \quad 0 \leq r \leq r_0$$

Dieser Konsum nimmt mit der Entfernung r zu. Pro Arbeiter ist der Konsum des Industrieprodukts allerdings

$$(34) \quad \frac{\alpha_2 w}{p_2} = \frac{\alpha_2 w}{p_2(0) + k_2 r}$$

und nimmt mit der Entfernung vom Zentrum a ab; der Konsum des Agrarprodukts pro Arbeiter ist

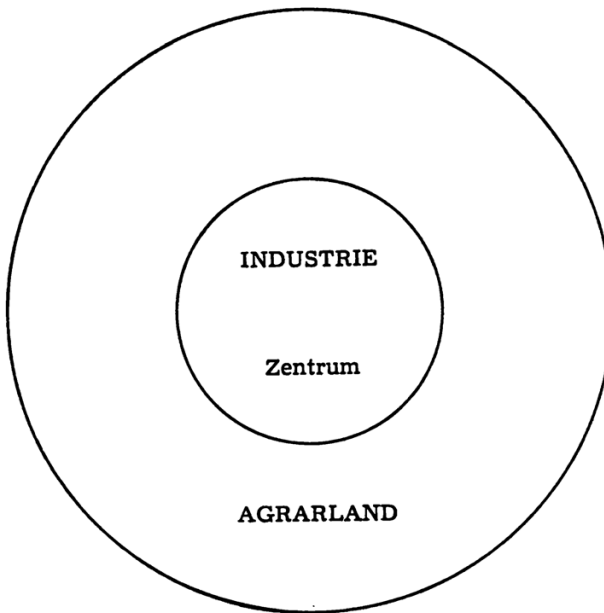
$$(35) \quad \frac{\alpha_1 w}{p_1} = \frac{\alpha_1 w}{p_1(0) - k_1 r}$$

und nimmt mit der Entfernung vom Zentrum zu.

Im Agrargebiet ist entsprechend

$$(36) \quad q_1 = \alpha_2$$

$$(37) \quad q_2 = \alpha_1 \frac{p_1}{p_2} = \alpha_1 \frac{p_1(0) - k_1 r}{p_2(0) + k_2 r}$$



Grenze der Kultivation

Fig. 1: Der moderne isolierte Staat

Um die Preise $p_1(0)$ und $p_2(0)$ des Agrar- und Industrieprodukts im Zentrum zu bestimmen, setzen wir den Export aus dem Überschußgebiet dem Import des Restgebiets gleich. Für das Industrieprodukt erhält man

$$(38) \quad \alpha, \pi r_0^2 = \alpha_2 \int_0^R \frac{p_1(0) - k_1 x}{p_2(0) + k_2 x} 2 \pi x dx$$

und für das Agrarprodukt

$$(39) \quad \alpha_2 \pi (R^2 - r_0^2) = \alpha_1 \int_0^{r_0} \frac{p_2 + k_2 K}{p_1(0) - k_1 x} 2 \pi x dx$$

Am Rande der kultivierten Fläche ist die Bodenrente Null

$$(40) \quad p_1(0) - k_1 R = 0$$

Am Rande des Industriegebiets sind die Bodenrenten aus Industrieproduktion und Agrarproduktion gleich

$$(41) \quad p_1(0) - k_1 r = p_2(0) + k_2 r$$

Die Transportleistung (in Tonnenkilometern), die für das Industrieprodukt zu erbringen ist, besteht aus dem Transport im Industriegebiet

$$\alpha_2 \int_0^r 2 \pi x^2 dx$$

und dem Transport im Agrargebiet. In dem Teil des Agrargebiets, der außerhalb eines Radius s liegt, ist die Gesamtnachfrage nach dem Industrieprodukt gleich

$$\int_s^R \frac{p_1(0) - k_1 x}{p_2(0) + k_2 x} 2 \pi x dx$$

und diese Menge muß durch einen Kreisrand vom Radius s transportiert werden. Die erforderliche Arbeitsmenge für den Transport des Industrieprodukts ist daher

$$(42) \quad K_2 = \frac{k_2 \alpha_1}{w} \int_0^{r_0} 2 \pi x^2 dx + \frac{k_2 \alpha_2}{w} \int_0^R \int_0^s \frac{p_1(0) - k_1 x}{p_2(0) + k_2 x} 2 \pi x dx ds$$

Entsprechend erhält man für das Agrarprodukt

$$(43) \quad K_1 = \frac{k_1 \alpha_2}{w} \int_0^R 2 \pi x (x - r) dx + \frac{k_1 \alpha_1}{w} \int_0^{r_0} \int_0^s \frac{p_2(0) + k_2 x}{p_1(0) - k_1 x} 2 \pi x dx ds$$

Das Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt erfordert, daß die angebotene Arbeitsmenge N gleich ist der Summe der nachgefragten Arbeit in Industrieproduktion, Agrarproduktion und Transport

$$(44) \quad N = a_2 \pi r^2 + a_1 \pi (R^2 - r^2) + K_1 + K_2 .$$

Wir setzen von nun an den Nominallohn $w = 1$. Dann sind die Transportkosten pro Produkteinheit und Entfernungseinheit

$$k_i = a_0 g_i w = a_0 g_i$$

konstant. Die fünf Unbekannten N , $p_1(0)$, $p_2(0)$, r_0 und R sind dann durch die Gleichungen (38), (39) und (44) in Verbindung mit (42) und (43) bestimmt.

Um diese komplexen Gleichgewichtsbedingungen zu durchschauen, betrachten wir alle Größen als Funktionen des Radius R der ökonomisch genutzten Fläche, statt, wie es ökonomisch natürlicher wäre, die Bevölkerung N vorzugeben und daraus die genutzte Fläche herzuleiten.

Es läßt sich zeigen, daß bei konstantem Lohn $w = 1$ alle Variablen des Gleichungssystems zunehmende Funktionen des Gebietsradius R sind. Das ist offenbar für $p_1(0)$ gemäß (40), aber es gilt auch für $p_2(0)$ und r , wie sich durch Differentiation des Systems (38), (39) zeigen läßt, und ebenso für N .

Das bedeutet: nimmt die Bevölkerung zu, dann müssen Agrar- und Industriegebiet und Transport ausgedehnt werden. Die Preise der Produkte steigen bei konstantem Geldlohn, die Reallöhne nehmen also ab. Die Bodenrenten nehmen dagegen zu, so daß durch das Bevölkerungswachstum eine Verschiebung in der Einkommensverteilung herbeigeführt wird, wie sie auch in den Anfangsphasen einer wirtschaftlichen Entwicklung zu beobachten sind. Unter den hier gemachten Voraussetzungen besteht allerdings kein Problem der Vollbeschäftigung: Der Radius R des genutzten Gebiets kann beliebig ausgedehnt werden, um alle Arbeiter zu beschäftigen, wobei die Allokation der Arbeit so erfolgt, daß bei gegebenem Einkommen der Nutzen jedes Konsumenten maximiert wird.

Das hier skizzierte einfachste Modell einer von Thünenschen Raumwirtschaft im allgemeinen Gleichgewicht läßt sich auf verschiedene Weise verfeinern und generalisieren. So sollten Transport, landwirtschaftliche und industrielle Produktion als Inputs auch die beiden Produkte enthalten. Ein Versuch in dieser Richtung ist von R. B. *Vernon*² unternommen worden.

² *Vernon* (1972).

Interessant wäre auch die Frage, ob nicht durch weitere geschickte Vereinfachung das Problem auf eine Form gebracht werden kann, bei der sich alle Größen als Funktionen der Bevölkerung N ausdrücken lassen. Das ist bisher noch nicht gelungen.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird von Thünen's „Isolierter Staat“ als ein allgemeines Gleichgewichtssystem interpretiert. Um seine Fähigkeit als ein allgemeines räumliches Gleichgewichtsmodell zu zeigen, wird der denkbar einfachste Fall gewählt: ein Agrar- und Industrieprodukt, konstante Inputkoeffizienten der Produktion, logarithmische Nutzenfunktion, einen nur Arbeit erfordern- den Gütertransport. Dieses Modell ermöglicht die Diskussion der Ressourcen- allokation auf den Transport und die Produktion der zwei Güterarten im Gleichgewicht. Es läßt sich zeigen, Ertragssenkungen resultieren aus dem Bevölkerungswachstum: ein ständig zunehmender Teil der Arbeit (wie auch anderer Ressourcen) muß als Input für den Transport eines sich ständig aus- weitenden Agrar- und Industriegebietes verwandt werden.

Summary

In this paper an attempt is made to interpret von Thünen's „Isolated State“ as a general equilibrium system. To demonstrate its potential as a model of general spatial equilibrium we choose the simplest possible case: an agri- cultural and an urban good, fixed coefficients in production, a logarithmic utility function, and labor as the only input in transportation. This permits us to discuss the allocation of resources to transportation and production of the two goods in equilibrium. It serves to demonstrate the diminishing returns resulting from population increase: an ever larger proportion of labor (and of other resources) must be devoted to transportation as the zones of cultivation of land for the production of urban and agricultural goods must be expanded.

Literatur

- Beckmann*, M. J. (1952), A Continuous Model of Transportation. *Econometrica* 20, 643- 660.
- von Thünen*, J. H. (1826), *Der Isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie*. Hamburg.
- Vernon*, R. B. (1972), *Structure and Growth of a von Thünen Economy*. Ph. D. Thesis, Brown University.