Charakterisierung der Produktionsmöglichkeitengrenze im Mehrsektorenmodell

Von Harald Dyckhoff*

Produktionsmöglichkeitengrenze und Transformationskurve werden hier als zwei, im allgemeinen verschiedene Produktmengen begriffen, welche sich mittels Optimierungsprobleme beschreiben lassen. Untersucht wird, wie sich diese beiden Mengen im Mehrsektorenmodell ohne Zwischen- oder Kuppelprodukte grundsätzlich charakterisieren lassen. Dabei wird die Fragestellung auf sektorale Produktionsfunktionen ausgedehnt, die nicht konkav sind und variable Skalenerträge aufweisen.

Üblicherweise werden die Begriffe „Produktionsmöglichkeitengrenze" und „Transformationskurve" synonym benutzt, wobei — zumindest in der neoklassischen Theorie — achsenparallele Randstücke der Produktionsmenge kaum betrachtet werden. Ohne weitere Annahmen können solche Randstücke jedoch auch im Mehrsektorenmodell einer Wirtschaft nicht von vornherein ausgeschlossen werden. Um sie miterfassen zu können, wird hier der Begriff „Produktionsmöglichkeitengrenze" allgemeiner definiert.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine *grundsätzliche* Charakterisierung der so determinierten Teile der Produktionsmenge für das Mehrsektorenmodell ohne Zwischen- oder Kuppelprodukte. Dabei werden gewisse Annahmen über die Eigenschaften der sektoralen Produktionsfunktionen gemacht. Es wird sich zeigen, daß diese Annahmen auch nichtkonvexe Produktionsmengen zulassen. Selbst bei konvexer Produktionsmenge brauchen die Produktionsfunktionen nicht konkav zu sein und können steigende Skalenerträge aufweisen (vgl. *Herberg* (1973) bezüglich hinreichender Kriterien für die Konvexität der Produktionsmenge).

1. Produktionsgrenze und Transformationskurve

Eine Produktionskorrespondenz (bezüglich einer Inputmenge) ist eine Abbildung Φ, die einer gegebenen Faktorkombination V die *Produktions*(möglichkeiten)*menge* $\Phi(V)$, d. h. die Menge der mit V produzierbaren Produktkombination X zuordnet[1]. Bei n Produkten der Endnach-

* Der Autor schuldet den Herren *L. Altenburg*, Prof. Dr. *G. Gabisch*, Dr. *J. Martiensen* und *E. Wallenwein* Dank für fruchtbare Anregungen in kritischer Diskussion.

[1] *Shepard* (1970), 179.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

frage und m primären Faktoren sind die Güterbündel des Output $X = (x_1, \ldots, x_n)$ und des Input $V = (v_1, \ldots, v_m)$ als Element des jeweiligen nichtnegativen Orthanten $\mathbf{R}^n_{\geqq}$ (Produktraum) bzw. $\mathbf{R}^m_{\geqq}$ (Faktorraum) des entsprechend dimensionalen, reellen Zahlenraumes $\mathbf{R}^n$ bzw. $\mathbf{R}^m$ zu verstehen[2]. Wir unterstellen hier, daß die Produktionsmenge kompakt und nicht leer, sowie zusammenhängend und dicht ist[3]; die beiden letzten Eigenschaften sind bei konvexer Produktionsmenge oder im später behandelten Mehrsektorenmodell stets gegeben.

Unter der *Produktionsmöglichkeitengrenze* oder kurz *Produktionsgrenze* $\Gamma(V)$ verstehen wir den Teil des Randes der Produktionsmenge $\Phi(V)$, der nicht auf den Koordinatenachsen (oder exakter Koordinatenhyperebenen) als trivialer Grenze liegt; das sind die Randpunkte in $\mathbf{R}^n_{>}$ und außerdem noch deren Berührungspunkte mit einer Koordinatenachse. Produktbündel auf der Produktionsgrenze kann man demnach als solche bezeichnen, die „äußerstenfalls möglich"[4] sind, hier in dem Sinn, daß von einigen Produkten (lokal) nicht mehr oder weniger produziert werden kann, ohne den Ausstoß anderer Güter zu beeinträchtigen.

Die *Transformationskurve* (oder der *effiziente Rand*) $\Theta(V)$ ist die Menge aller effizienten, herstellbaren Produktkombinationen. Eine Produktkombination heißt *effizient,* wenn keine andere hergestellt werden kann, für die der Ausstoß keines Produktes geringer und mindestens eines größer wäre, wenn also für jedes Produkt eine Vermehrung höchstens auf Kosten einer Verringerung anderer Produkte möglich ist, d. h. wenn Mengeneinheiten anderer Produkte in das gewünschte „transformiert" werden müßten.

Bei nur zwei Produkten lassen sich die so definierten Mengen wie in Abbildung 1 veranschaulichen. Die Transformationskurve ist die Menge aller jener Produktbündel, von denen aus „nordöstlich" kein weiteres herstellbares Bündel existiert; in Abbildung 1 und den folgenden Schaubildern sind diese Punkte fett eingezeichnet. Die Transformationskurve ist also im allgemeinen eine echte Teilmenge der Produktionsgrenze. Es ist aber offensichtlich, daß die beiden Mengen übereinstimmen, wenn man sich die in der neoklassischen Literatur gängigen

---

[2] Skalare und skalarwertige Abbildungen werden durch kleine, Vektoren und vektorwertige Abbildungen durch große Buchstaben symbolisiert. Vektoren sind hier als Zeilenvektoren zu verstehen. Mit „′" bezeichnen wir die Transponierung eines Vektors zum Spaltenvektor und mit „·" das innere Vektorprodukt. Es sei O^n der Nullpunkt (Ursprung) und $\mathbf{R}^n_{>}$ der positive Orthant von $\mathbf{R}^n$. Weiter gelte:

$$X \geqq O^n \Leftrightarrow X \in \mathbf{R}^n_{\geqq}\ ; \quad X \geq O^n \Leftrightarrow X \in \mathbf{R}^n_{\geqq}\ , \quad X \neq O^n\ ; \quad X > O^n \Leftrightarrow X \in \mathbf{R}^n_{>}\ .$$

[3] Vgl. *Henn und Opitz* (1972), 2 ff.

[4] *Woll* (1976), 33.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Schaubilder vor Augen hält (vgl. auch Abbildungen 2 d und 3 a). Der hier benutzte Begriff der Produktions(möglichkeiten)grenze (für fest gegebenen Input) stellt demnach eine Verallgemeinerung des üblichen Begriffes dar.

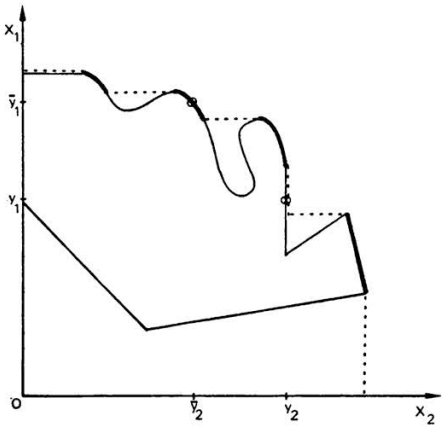

Abb. 1

Das in Abbildung 1 durch die fetten und gestrichelten Linien sowie durch die Koordinatenachsen begrenzte Gebiet wird als *Auffüllung*[5] der Produktionsmenge bezeichnet: Das sind alle die Punkte $X \geqq O^n$, für die ein effizienter Punkt $Y \in \Phi(V)$ existiert mit $X \leqq Y$.

Punkte auf der Produktionsgrenze, wie z. B. (y_1, y_2), die gleichzeitig auf dem Rand der Auffüllung liegen (mit Ausnahme einiger weniger Schnittpunkte gestrichelter Linien) besitzen eine *schwache Effizienzeigenschaft:* Bei mindestens einem Produkt ist eine Vermehrung nicht mehr möglich, zumindest nicht ohne den Ausstoß anderer Produkte zu senken. Manche Autoren[6] fordern, daß die Produktionsmenge identisch mit ihrer Auffüllung ist, d. h. *Güterverschwendung* ist *erlaubt.* In diesem Fall stimmt die Produktionsgrenze mit der Transformationskurve bis auf solche Randstücke überein, die parallel zu einer Koordinatenachse sind, und nahezu jedes Produktbündel auf der Produktionsgrenze ist schwach effizient, wenn nicht sogar effizient (Abbildungen 2 und 3).

---

[5] *Fandel* (1972), 52.
[6] Z. B. *Henn* und *Opitz* (1972), 2.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

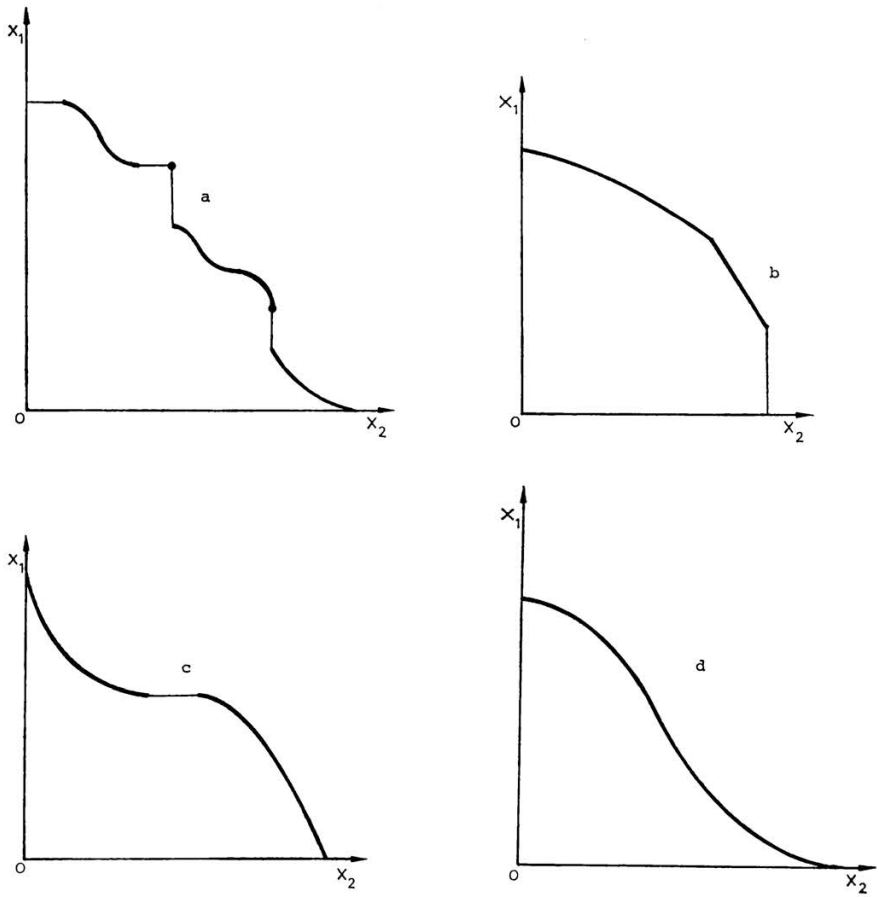

Abb. 2

2. Charakterisierung durch Optimierungsprobleme

Die Transformationskurve $\Theta(V)$ entspricht der „vollständigen Lösung"[7] des folgenden Vektormaximumproblems (*VMP*).

(VMP) *„Maximiere" X bezüglich* $X \in \Phi(V)$.

Eine Produktkombination $Y \in \Phi(V)$ ist definitionsgemäß genau dann effizient, wenn sie für jedes Produkt (mit dem Index) i, $i = 1, \ldots, n$, folgendes gewöhnliche Maximierungsproblem (*YMPi*) löst:

(YMPi) *Maximiere* x_i *bezüglich* $X \in \Phi(V)$ *und* $X \geqq Y$.

[7] Die vollständige Lösung eines Vektormaximumproblems ist die Menge aller Lösungen, d. h. aller „funktional-effizienten" (hier: effizienten) Punkte (vgl. *Fandel,* (1972), 15).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Es reicht nicht aus, daß Y nur für ein oder mehrere Produkte i eine Lösung von ($YMPi$) ist. Zum Beispiel löst das Güterbündel (y_1, y_2) in Abbildung 1 das zugehörige Problem (YMP 2), ist jedoch nicht effizient; dafür ist (y_1, y_2) ein schwach effizienter Punkt der Produktionsgrenze $\Gamma(V)$. Definitionsgemäß gilt: Y ist schwach effizient, wenn ein Produkt i existiert, für das Y eine Lösung von ($YMPi$) ist, d. h. aber auch genau dann, wenn ein Vektor $P = (p_1, \ldots, p_n) \geq O^n$ nichtnegativer Zahlen existiert, von denen mindestens eine positiv ist, so daß Y eine Lösung des folgenden Problems (YMP) ist:

(YMP) *Maximiere* $P \cdot X'$ *bezüglich* $X \in \Phi(V)$ *und* $X \geqq Y$.

Die Zahlen p_i stellen Gewichtungen der Produkte dar und lassen sich als (fest vorgegebene) Preise interpretieren; der Zielfunktionswert kann somit als Produktionswert (Sozialprodukt, Umsatz, usw.) aufgefaßt werden. Falls Y eine Lösung von (YMP) mit $P > O^n$ ist, so ist Y sogar effizient.

Die Probleme ($YMPi$) und (YMP) sind nicht konstruktiv, da sie das gesuchte Güterbündel Y explizit verwenden. Dies gilt nicht für (ZMP):

(ZMP) *Maximiere* $P \cdot X'$ *bezüglich* $X \in \Phi(V)$ *und* $X \geqq Z$.

Dabei sei $Z \leqq Y$; in Extremfällen $Z = O^n$ oder $Z = Y$. Ist Y eine Lösung von (ZMP), so auch des entsprechenden Problems (YMP), und Y ist ein schwach effizienter Punkt der Produktionsgrenze, falls $P \geq O^n$, und liegt auf der Transformationskurve, falls $P > O^n$. Letztes bedeutet: Produktionswertmaximierung bei (beliebig, aber fest gegebenen) positiven Güterpreisen führt zu effizienter Produktion.

Die durch Kreise in Abbildung 1 angedeuteten Punkte (y_1, y_2) und ($\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$) zeigen, daß die Umkehrung dieser Aussagen nicht ohne weiteres zutrifft[8]. Falls jedoch der durch $X \in \Phi(V)$, $X \geqq Z$ definierte Teil $\Phi(V, Z)$ der Produktionsmenge *konvex* ist, so existiert zu jedem Produktvektor Y auf der Produktionsgrenze mit $Y \geqq Z$ ein Vektor $P \in \mathbf{R}^n$, $P \neq O^n$, reeller Gewichte, die auch negativ sein können, so daß Y eine Lösung von (ZMP) ist; ist Y schwach effizient oder effizient, so existiert (auch) ein nichtnegativer Gewichtsvektor $P \geq O^n$ [9]. Bei konvexer Pro-

[8] *Scarf* (1981) behandelt den Fall nicht konvexer Produktionsmengen aufgrund nicht beliebig teilbarer Gütermengen.

[9] Diese Charakterisierungen insbesondere effizienter Produktvektoren sind aus der Aktivitätsanalyse bekannt (*Hildenbrand* (1966); vgl. *Krelle* (1969), 167, oder *Takayama* (1974), 52), welche auf *Koopmans* (1951) zurückgeht. Dieselben Aussagen lassen sich auch unmittelbar aus einem Hauptsatz der Vektormaximumtheorie gewinnen. Der Beweis dieses Satzes kann nahezu unverändert übernommen werden, um auch die Aussagen hinsichtlich der nicht effizienten Punkte auf der Produktionsgrenze zu zeigen; vgl. z. B. den Beweis bei *Fandel* (1972), 51 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

duktionsmenge $\Phi(V)$ kann man sich demnach zur Charakterisierung der Produktionsgrenze auf das Problem (*ZMP*) mit $Z = O^n$ beschränken[10].

3. Mehrsektorenmodell

Im *Mehrsektorenmodell* mit Alternativproduktion ohne Zwischenprodukte wird jedes Produkt in nur einem „Sektor" i hergestellt, und zwar in der Höhe x_i. Der gesamte Ausstoß ist $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Die verfügbare Faktorausstattung $V = (v_1, \ldots, v_m) > O^m$ ist vollkommen unelastisch. Davon zu unterscheiden ist der tatsächliche Einsatz $V^i = (v_1^i, \ldots, v_m^i)$ des Sektors i. In Abhängigkeit von diesem Faktoreinsatz gibt die *sektorale Produktionsfunktion* f_i den maximal produzierbaren Ausstoß des Produktes i an. Die Produktionsmenge ist damit bestimmt durch

$$\Phi(V) = \{X \geqq O^n \mid x_i \leqq f_i(V^i), V^i \geqq O^m \ (i = 1, \ldots, n); \textstyle\sum_{i=1}^n V^i \leqq V\} \ .$$

Wir nennen eine *Faktoraufteilung* $V^1, \ldots, V^n$ auf die Sektoren *zulässig,* wenn sie nichtnegativ ist und die verfügbare Faktorausstattung nicht überbelastet ($V^i \geqq O^m$, $\sum_{i=1}^n V^i \leqq V$); wir nennen sie *zu* $X \in \Phi(V)$ *gehörig,* wenn sie zulässig ist und gilt: $x_i \leqq f_i(V^i)$ für alle i. Im folgenden sei stets vorausgesetzt, daß die Funktionen f_i nichtnegativ und nach oben halbstetig auf dem Faktorraum $\mathbf{R}^m_{\geqq}$ sind. Dann ist die Produktionsmenge abgeschlossen und beschränkt, d. h. kompakt[11]. Sie ist außerdem nicht leer, da $O^n \in \Phi(V)$. Güterverschwendung ist erlaubt, so daß die Produktionsmenge identisch mit ihrer Auffüllung und damit auch zusammenhängend und dicht ist. Die Produktionsgrenze stimmt mit der Transformationskurve überein, bis auf Teile des Produktionsrandes, die parallel zu einer Koordinatenachse verlaufen (Abbildungen 2 und 3).

Offensichtlich impliziert effiziente Produktion für jeden Sektor *technische Effektivität,* d. h. es gilt $x_i = f_i(V^i)$ für alle i; bei Produktion auf der Produktionsgrenze braucht dies im allgemeinen nur für einen

---

[10] *Geoffrion* (1968) hat den Begriff der „eigentlichen Effizienz" eingeführt. Ohne hier näher darauf einzugehen, sei festgehalten, daß ein Produktbündel bei konvexer Menge $\Phi(V, Z)$ genau dann *eigentlich effizient* ist, wenn es das Problem (*ZMP*) für einen *positiven* Preisvektor $P > O^n$ löst. „Uneigentlich effiziente" Produktbündel weisen also für mindestens 2 Produkte eine Transformationsrate von Null oder Unendlich auf; sie können als Grenzwert einer Folge eigentlich effizienter Produktbündel charakterisiert werden, für die ein oder mehrere Preise p_i gegen Null konvergieren, so daß man sich im wesentlichen mit der Charakterisierung eigentlich effizienter Produktbündel begnügen kann. (Den Hinweis auf den Artikel von *Geoffrion* (1968) verdanke ich Herrn Prof. Dr. *G. Fandel.)*

[11] Vgl. *Shepard* (1970), 295 ff. oder *Herberg* (1973).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Sektor zu gelten. Sind die sektoralen Produktionsfunktionen streng monoton wachsend, gilt also $f_i(V^i) > f_i(W^i)$ für $V^i \geq W^i$, so sind bei effizienter Produktion außerdem die *Faktoren ausgelastet*, d. h. $\sum_{i=1}^{n} V^i = V$. (Dies braucht für klassische Produktionsfunktionen mit negativen Grenzerträgen nicht zuzutreffen; vgl. Abb. 3 d.)

Die genannten Bedingungen sind (unter diesen Umständen) zwar notwendig, aber nicht hinreichend, um effiziente Produktion zu charakterisieren, wie das folgende einfache Beispiel mit 2 Produkten, 2 Faktoren, den linearen Funktionen $f_1 = 2\,v_1 + v_2$, $f_2 = v_1 + 2\,v_2$, und der Faktorausstattung $V = (1,1)$ zeigt: Die Faktoraufteilung $V^1 = (0,1)$, $V^2 = (1,0)$ mit dem zugehörigen maximalen Produktvektor $X = (1,1)$ ist technisch effektiv und lastet die Faktoren aus; sie wird aber absolut von der Aufteilung $W^1 = (1,0)$, $W^2 = (0,1)$ mit dem Ausstoß $Y = (2,2)$ dominiert. Auch bei Auslastung der Faktoren muß technisch effektive Produktion somit — aufgrund falscher Allokation der Ressourcen — nicht zu effizienter Produktion führen und kann sogar, wie das Beispiel zeigt, im Innern der Produktionsmenge liegen.

Im Mehrsektorenmodell handelt es sich bei (*ZMP*) um ein Problem der mathematischen Programmierung. Das spezielle Problem (*YMP*), d. h. $Z = Y$, zu betrachten, ist wenig sinnvoll, da der Lösungsbereich dieses Problems entartet ist und für $P > O^n$ aus nur einem Punkt besteht, so daß man keine Information hinsichtlich des Verhältnisses zu benachbarten Produktkombinationen gewinnen kann.

Für *konkave* sektorale Produktionsfunktionen ist die Produktionsmenge konvex, und die Produktionsgrenze ist konkav zum Ursprung[12]. (*ZMP*) ist dann ein konvexes Programmierungsproblem, dessen Lösungen sich durch ein entsprechendes *Sattelpunktproblem* und bei Differenzierbarkeit auch durch ein *lokales Kuhn-Tucker-Problem* hinreichend und bei Vorliegen der Regularitätsvoraussetzungen auch notwendig charakterisieren lassen[13]. Eine explizite Berechnung der Produktionsgrenze ist nur in einfachen Fällen und dann im allgemeinen auch nur approximativ möglich. Speziell für *lineare* sektorale Produktionsfunktionen existieren Algorithmen der parametrischen linearen Programmierung, allerdings (noch) ziemlich aufwendige, mit denen die Transformationskurve in der Gestalt von Facetten des nun konvexen Polyeders $\Phi(V)$ bestimmt werden kann[14].

Damit die Produktionsmenge $\Phi(V)$ oder ihre Teilmenge $\Phi(V, Z) := \{X \mid X \in \Phi(V), X \geqq Z\}$ konvex ist, brauchen die sektoralen Produktionsfunktionen nicht konkav zu sein. Hinreichend ist es, wenn die

---

12 Vgl. *Herberg* (1973) und Abb. 2 b.
13 Vgl. *Herberg* (1973) und Abb. 2 b.
14 *Gal* (1977).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Restriktionsfunktionen des nichtlinearen Programmierungsproblems (*ZMP*) quasikonkav sind, und das auch nur im Bereich der zu herstellbaren Produktbündeln gehörigen Faktoraufteilungen. Denn Quasikonkavität einer Funktion $g(U)$ ist äquivalent zur Konvexität der Niveaumengen $\{U \mid g(U) \geqq \alpha\}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ [15]. Es stellt sich also die Frage, unter welchen Bedingungen die Restriktionen $g_i(X, V^1, \ldots, V^n) := f_i(V^i) - x_i$ quasikonkav in gewissen Bereichen von $\mathbf{R}_{\geqq}^{n+nm}$ sind. Da die Summe zweier quasikonkaver Funktionen im allgemeinen selbst nicht quasikonkav ist[16], ist es weder hinreichend noch notwendig zu fordern, daß die betreffende sektorale Produktionsfunktion quasikonkav ist. Mit ein paar Umformungsschritten läßt sich folgendes Kriterium beweisen:

Lemma 1.

Notwendig und hinreichend dafür, daß die Teilmenge $\Phi(V, Z) = \{X \in \Phi(V) \mid X \geqq Z\}$ der Produktionsmenge im Mehrsektorenmodell konvex ist, ist folgende Bedingung: Für alle $\lambda, \mu \geqq 0$ mit $\lambda + \mu = 1$ und alle Produktbündel $X, Y \in \Phi(V, Z)$ mit den zu X bzw. Y gehörigen Faktoraufteilungen $V^1, \ldots, V^n$ bzw. $W^1, \ldots, W^n$ existiert eine zu $\lambda X + \mu Y$ gehörige Faktoraufteilung $U^1, \ldots, U^n$, so daß für alle Sektoren i gilt: $\lambda f_i(V^i) + \mu f_i(W^i) \leqq f_i(U^i)$.

Im Falle konkaver Funktionen ist diese Bedingung stets dadurch zu erfüllen, daß man $U^i := \lambda V^i + \mu W^i$ setzt. Dabei brauchen $f_1, \ldots f_n$ nur für diejenigen Faktoreinsätze $V^1, \ldots, V^n$ konkav zu sein, die zu den Produktbündeln $X \in \Phi(V, Z)$ gehören. Dies zeigt das Beispiel eines Zweisektorenmodells mit nur einem Faktor und identischen sektoralen Produktionsfunktionen $f(v) = (2v/(1 + v^2))^\alpha$ vom „verallgemeinerten *Sato*-Typ“[17] mit $\alpha = 5$. Für $\alpha > 1$ ist diese Produktionsfunktion klassisch mit einem Maximum bei $v = 1$ und Wendepunkten für $\alpha = 5$ bei $v = \sqrt{1/3} \approx 0{,}58$ und $v = \sqrt{2}$. Je nach der verfügbaren Faktorausstattung berechnet man für die Produktionsgrenze eine unterschiedliche Gestalt: Eine zum Ursprung konvexe Kurve erhält man für $V \leqq 1$ (Abb. 3 a), eine zum Ursprung konkave für $V \geqq 1{,}2$ (Abb. 3 c); für $V \geqq 2$ (Abb. 3 d) entspricht die Produktionsgrenze dem nordöstlichen Rand eines Quadrates mit dem einzigen effizienten Produktbündel $(y_1, y_2) = (1{,}1)$; im Bereich von $V \approx 1{,}15$ (Abb. 3 b) enthält die Produktionsgrenze sowohl zum Ursprung konkave wie auch konvexe Teile. Setzt man $Z = (z_1, z_2)$ mit $z_i = 0{,}49$, so muß in beiden Sektoren mehr als $v^i = 0{,}58$ vom Faktor eingesetzt werden, so daß wegen der Konkavität

[15] *Mangasarian* (1969), 133. Eine Funktion $g = g(U)$ ist quasikonkav in V bezüglich einer Menge $\mathfrak{M}$, wenn für jedes $U \in \mathfrak{M}$ und alle $\lambda, \mu \geqq 0$ mit $\lambda + \mu = 1$ gilt: $g(\lambda U + \mu V) \geqq min\{g(U), g(V)\}$.

[16] *Mangasarian* (1969), 147.

[17] *Herberg* (1967).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

der Funktionen f_i in diesem Bereich die Produktionsgrenze für Produktbündel Y mit $Y \geqq Z$, insbesondere für eine Faktorausstattung $V \geqq 1{,}58$ *gemäß dem Lemma konkav zum Ursprung zu verlaufen hat.*

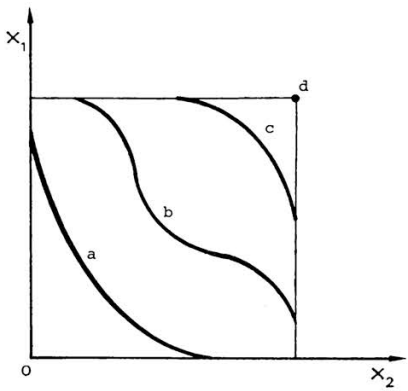

Abb. 3

Die zum Ursprung konkaven Teile der Produktionsgrenze $\Gamma(V)$ für $1 < V \leqq 1{,}57$ lassen sich nicht mehr dadurch erklären, daß beide sektoralen Produktionsfunktionen konkav sind; im Gegenteil, mindestens eine Funktion ist für die betreffenden Faktoreinsätze konvex. Trotzdem muß die Bedingung des Lemmas hier erfüllt sein. Dies jedoch nachzuweisen, ist im allgemeinen keine leichte Aufgabe, weshalb dieses Kriterium nur von geringem praktischen Interesse sein dürfte.

4. Charakterisierung durch Kuhn-Tucker Probleme

Den Ungleichungen $x_i \leqq f_i(V^i)$, $\sum_{i=1}^{n} v_j^i \leqq v_j$ und $x_i \geqq z_i$ im Optimierungsproblem (*ZMP*) kann man sogenannte *duale Variablen* (Lagrange-Multiplikatoren) π_i, ω_j und ξ_i zuordnen. Im Optimum lassen sich π_i und ω_j als *Güterpreise* im Sinne von Opportunitätskosten (Schattenpreise) interpretieren. Mit $\Omega := (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ heißt deshalb

$$(1) \qquad g_i(W^i) = max\,\{g_i(V^i) \mid g_i(V^i) := \pi_i f_i(V^i) - \Omega \cdot V^{i\prime},\ V^i \geqq O^m\}$$

das *Gewinnmaximierungsproblem* des Sektors i. Bei einer in W^i differenzierbaren Funktion f_i müssen die *Grenzproduktivitätsbedingungen*[18]:

$$(2) \qquad \pi_i \nabla f_i(W^i) \leqq \Omega\ ;\quad \pi_i\, \partial f_i(W^i)/\partial w_j^i = \omega_j\ ,\quad falls\ w_j^i > 0\ .$$

[18] $\nabla f(W)$ bezeichnet den Gradienten von f, d. h. den Vektor der ersten partiellen Ableitungen, berechnet an der Stelle W.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

für den gewinnmaximalen Einsatz W^i erfüllt sein. Umgekehrt führt jeder Einsatz W^i, der (2) genügt, zu einem maximalen Gewinn, falls die Gewinnfunktion g_i in W^i strikt quasikonkav[19] ist, insbesondere also, falls die sektorale Produktionsfunktion f_i konkav ist.

Für einen gegebenen Gewichtsvektor $P = (p_1, \ldots, p_n)$ definieren wir nun die (*ZMP*) entsprechenden Probleme (*ZSP*) und (*ZKT*):

Finde eine herstellbare Produktkombination $Y \in \Phi(V, Z)$ *mit einer zugehörigen Faktoraufteilung* $W^1, \ldots, W^n$ *und geeigneten, nichtnegativen, dualen Variablen* $\Pi := (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, $\Omega := (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ *und* $\Xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *so daß folgendes gilt:*

Bei einem positiven Produktionspreis π_i *ist die Produktion in Sektor i technisch effektiv; bei einem positiven Faktorpreis* ω_j *ist der Faktor j ausgelastet; für* $y_i > z_i$ *gilt* $\xi_i = 0$; *es gilt* $\Pi \geqq P + \Xi$, *mit* $\pi_i = p_i + \xi_i$ *für* $y_i > 0$; *außerdem genügt für jeden Sktor i der jeweilige Faktoreinsatz* W^i

— im Fall (*ZSP*): *der Gewinnmaximierungsbedingung* (1), bzw.

— im Fall (*ZKT*): *den Grenzproduktivitätsbedingungen* (2).

Hier, wie im folgenden, sei bei der Nennung von (2) und (*ZKT*) die Differenzierbarkeit der Funktionen f_i in W^i stets vorausgesetzt. Das Problem (*ZSP*) ist — wie man leicht zeigen kann[20] — äquivalent zu dem (*ZMP*) entsprechenden (*Kuhn/Tucker-*)*Sattelpunktproblem,* in seiner Formulierung entspricht es einem *Maximumprinzip*; das Problem (*ZKT*) entspricht dem *lokalen Kuhn/Tucker-Problem* zu (*ZMP*). Die Theorie der nichtlinearen Programmierung liefert damit folgende hinreichende Charakterisierungen der Produktionsgrenze im Mehrsektorenmodell[21].

Theorem 1 (Hinreichende Charakterisierung).

Zu einem gegebenen Mindestproduktionsniveau $Z \geqq O^n$ und Gewichtsvektor $P \geq O^n$ sei Y ein Produktbündel, für das eine Lösung von (*ZSP*) oder (*ZKT*) mit einer Faktoraufteilung $W^1, \ldots, W^n$ (und dualen Variablen) existiert, wobei im Fall (*ZKT*) die Produktionsfunktionen f_i der technisch effektiv produzierenden Sektoren i konkav in W^i bezüglich derjenigen Einsätze V^i sind, die in zu $\Phi(V, Z)$ gehörenden Faktoraufteilungen $V^1, \ldots, V^n$ vorkommen. Dann ist Y schwach effizient und liegt auf der Produktionsgrenze $\Gamma(V)$; für $P > O^n$ ist Y effizient und liegt auf der Transformationskurve $\Theta(V)$.

---

[19] *Mangasarian* (1969), 139.

[20] Dazu braucht man nur die additive Separabilität der Lagrange-Funktion in den primalen Variablen x_i und V^i bei der Maximierung bzw. in den dualen Variablen π_i, ω_i, ξ_i bei der Minimierung im Sattelpunkt auszunutzen.

[21] *Mangasarian* (1969), 74 bzw. 151 f.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Es sei bemerkt, daß die Forderung der lokalen Konkavität der sektoralen Produktionsfunktionen im Fall (*ZKT*) nicht mehr abgeschwächt werden kann, um noch *Mangasarians*[22] „hinreichendes Optimalitätstheorem" anwenden zu können. Im Fall (*ZKT*) muß also vorausgesetzt werden, daß die Produktionsgrenze in Y (lokal) konkav zum Ursprung verläuft; für (*ZSP*) gilt das nicht.

Damit die Umkehrung der Aussagen von Theorem 1 erlaubt ist, setzen wir im folgenden voraus, daß die Menge $\Theta(V, Z)$ konvex ist. Damit die Umkehrung sinnvoll ist, unterstellen wir in der Regel $Z < Y$, wobei jedoch der Abstand zwischen Z und Y beliebig klein sein kann. Letztes bedeutet, daß die Produktionsgrenze nur *lokal* konkav zum Ursprung zu sein braucht und im übrigen nicht-konkave Teile aufweisen darf (vgl. Abbildungen 2 und 3, außer 3 a).

Theorem 2 (Notwendige Charakterisierung).

Sei Y eine schwach effiziente Produktkombination auf der Produktionsgrenze $\Gamma(V)$ mit einer zugehörigen Faktoraufteilung $W^1, \ldots, W^n$ auf die Sektoren. Sei $Z < Y$ und $\Phi(V, Z)$ konvex. Dann existieren nichtnegative Gewichte $P \geq O^n$ und duale Variablen Π, Ω, Ξ, so daß Y zusammen mit $W^1, \ldots, W^n$ und Π, Ω, Ξ, für P eine Lösung von

— (*ZKT*) ist, falls die sektoralen Produktionsfunktionen f_i jeweils in W^i differenzierbar sind bzw. von

— (*ZSP*) ist, falls die sektoralen Produktionsfunktionen f_i konkav sind.

In beiden Fällen muß f_i bei $z_i = y_i$ sogar linear für alle diejenigen Einsätze V^i sein, welche in Faktoraufteilungen $V^1, \ldots, V^n$ vorkommen, die zu Produktkombinationen in $\Phi(V, Z)$ gehören.

Theorem 2 ergibt sich aus der Anwendung notwendiger Optimalitätskriterien der Theorie der nichtlinearen Programmierung[23], welche allerdings gewisse Regularitätsbedingungen („constraint qualifications") voraussetzen. Es zeigt sich, daß im Mehrsektorenmodell bei Differenzierbarkeit die „*Schwache Arrow/Hurwicz/Uzawa-Bedingung*"[24] stets erfüllt ist, während die „*abgeschwächte Slater-Bedingung*"[25] der zusätzlich in Theorem 2 im Fall (*ZSP*) genannten Voraussetzung bedarf.

Takayama[26] hat Charakterisierungen effizienter Produktion bewiesen, die den hier abgeleiteten entsprechen und auch Zwischen- und

---

[22] *Mangasarian* (1969), 151.
[23] Siehe z. B. *Martos* (1975), 130, oder *Künzi, Krelle* und *von Randow* (1979), 56.
[24] *Mangasarian* (1969), 154.
[25] *Blum* und *Oettli* (1975), 76.
[26] *Takayama* (1974), 136 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Kuppelprodukte zulassen. Allerdings setzen sie eine konvexe Menge zulässiger Güterbündel voraus[27], weshalb Produktionsgrenzen der Art, wie sie in den Abbildungen 2 und 3, ausgenommen 2 b, 3 c und 3 d, dargestellt sind, nicht erfaßt werden. Indem wir in Theorem 2 bei (*ZKT*) lediglich die *Konvexität einer Teilmenge der Produktionsmenge voraussetzen,* läßt sich jede Produktkombination, die auf einem lokal konkav zum Ursprung verlaufenden Teil der Produktionsgrenze liegt, durch ein lokales *Kuhn/Tucker-Problem* notwendig charakterisieren. Damit sind begrenzt auch steigende Skalenerträge zugelassen. Kurven wie in Abbildung 3 a bleiben so aber weiterhin von der Betrachtung gänzlich ausgeschlossen[28].

5. Charakterisierung durch duale Probleme

Für den Fall quasikonkaver Produktionsfunktionen und verbundener Faktoren[29] hat *Rader*[30] einen Weg gewiesen, wie man über duale Optimierungsprobleme auch konvex zum Ursprung verlaufende Transformationskurven charakterisieren kann.

Lemma 2.

Für eine Faktorausstattung $W > O^m$ sei Y eine zulässige Produktkombination mit zugehöriger Faktoraufteilung $W^1, \ldots, W^n$ auf die Sektoren. Die sektoralen Produktionsfunktionen f_i seien in einer Umgebung von W^i stetig und streng monoton wachsend. Y ist genau dann ein (schwach) effizientes Produktbündel, wenn W eine „effiziente Faktorausstattung" ist, d. h. wenn W das folgende (zu (*VMP*) duale) Vektormaximumproblem (*DVP*) löst:

$$(DVP) \qquad \text{„}Minimiere\text{"}\ V\ bezüglich\ V \in \Psi(Y)\ .$$

wobei $\Psi(X)$ die Menge (für X) zulässiger Faktorausstattungen ist:

$$\Psi(X) = \{V \mid V \geqq \textstyle\sum_{i=1}^{n} V^i\ ;\quad V^i \geqq O^m, f_i(V^i) \geqq x_i\ (i = 1, \ldots, n)\}\ .$$

---

[27] a.a.O., 150, Fußn. 5.

[28] Ein Ansatz, um lokal *konvex* zum Ursprung verlaufende Teile einer Transformationskurve charakterisieren zu können, ist möglicherweise die Analyse der Optimierungsprobleme

$$Minimiere\ P \cdot X'\ bezüglich\ O^n \leqq X \leqq Z\ ,\quad X \notin \Phi(V)\ .$$

die konvex sind, falls Z mit $Z > Y$ nahe genug an dem effizienten Produktbündel Y liegt. Sattelpunktartige Verläufe lassen sich aber auch so nicht erfassen.

[29] Zur Definition von *„Faktorverbundenheit"* siehe *Rader* (1970), 816. Im Mehrsektorenmodell ist die Produktion faktorverbunden, falls ein Faktor in allen Sektoren tatsächlich eingesetzt wird und jeder Faktor in mindestens einem Sektor produktiv ist, d. h. ein erhöhter Einsatz den Ausstoß dieses Sektors vermehrt.

[30] *Rader* (1970).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Der Beweis von Lemma 2[31] beruht darauf, daß die Faktoren in den verschiedenen Sektoren aufgrund der Stetigkeit und strengen Monotonie untereinander verbunden sind, so daß man durch marginale Umallokation von Ressourcen zu jedem nicht effizienten Produktbündel $X \in \Phi(V)$ eine Faktorausstattung $W \leq V$ finden kann mit $W \in \Psi(X)$ und umgekehrt zu jeder nicht effizienten Faktorausstattung $V \in \Psi(X)$ eine Produktkombination $Y \geq X$ mit $Y \in \Phi(V)$. Außerdem ist unter den genannten Voraussetzungen ein schwach effizientes Produktbündel bzw. eine schwach effiziente Faktorausstattung auch effizient.

Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 2 läßt sich nun ein *duales Minimierungsproblem* (*DMP*) formulieren:

(*DMP*) *Minimiere* $Q \cdot V'$ *bezüglich* $V \in \Psi(X)$.

Dabei ist $Q = (q_1, \ldots, q_m) \geq O^m$ ein nichtnegativer Vektor, der sich als System fest vorgegebener Faktorpreise interpretieren läßt, so daß es sich bei (*DMP*) um ein Problem der Minimierung der Kosten für die Produktion eines gegebenen Ausstoßes X handelt. Jede Lösung von (*DMP*) liefert eine effiziente Faktorausstattung W, falls $Q > O^m$, bzw. falls $Q \geq O^m$ und die Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt sind. Da $\Psi(X)$ für quasikonkave Produktionsfunktionen konvex ist, gilt dann auch die umgekehrte Behauptung. Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 4 läßt sich zu (*DMP*) folgendes duale *Kuhn/Tucker-Problem* (*DKT*) formulieren, sowie seine Äquivalenz zu (*DVP*) und mit Lemma 2 auch zu (*VMP*) zeigen.

(*DKT*) *Finde eine Faktorausstattung* $W \in \Psi(V)$ *mit einer zu* Y *gehörigen Faktoraufteilung* $W^1, \ldots, W^n$ *und geeigneten Güterpreisen* $\Pi \geqq O^n$, $\Omega \geqq O^m$, *so daß in allen Sektoren die Grenzproduktivitätsbedingungen* (2) *gelten und bei einem positiven Produktpreis* π_i *die Produktion in Sektor* i *technisch effektiv ist und bei einem postiven Faktorpreis* ω_j *der Faktor* j *ausgelastet ist, wobei* $\Omega \leqq Q$ *mit* $\omega_j = q_j$ *für* $w_j > 0$.

Theorem 3[32].

Falls die Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt sind und die Produktionsfunktionen f_i der technisch effektiv produzierenden Sektoren i quasikonkav in W^i sind, so ist Y genau dann (schwach) effizient, wenn Gewichte $Q \geq O^m$ und Güterpreise Π, Ω existieren, so daß die Faktorausstattung W das duale, lokale *Kuhn/Tucker-Problem* (*DKT*) löst.

---

[31] Vgl. *Rader* (1970) Lemma 4.
[32] Vgl. *Rader* (1970) Theorem 3.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

6. Anwendungen

Für Anwendungen dürfte die notwendige Charakterisierung in Theorem 3 von größerer Bedeutung sein als die von Theorem 2 bezüglich (*ZKT*), da viele Autoren von Produktionsfunktionen per Definition fordern, daß sie quasikonkav sind[33]. Außerdem läßt Theorem 3 steigende Skalenerträge zu, während bei Theorem 2 nichtkonkave Funktionen nur eingeschränkt erlaubt sind, wie Untersuchungen von *Herberg* (1969) für homogene und von *Herberg* und *Kemp* (1969) für homothetische sektorale Produktionsfunktionen zeigen[34]. Andererseits zeigt das Beispiel der verallgemeierten *Sato*-Funktion, daß bei den Theoremen 1 und 2 eine Einschränkung durch eine Forderung nach Faktorverbundenheit in Form strenger Monotonie der Produktionsfunktionen nicht berücksichtigt zu werden braucht und somit auch *schwach* effiziente Produktbündel charakterisiert werden können. Im folgenden werden wir einige Schlußfolgerungen aus den bisher gewonnenen Ergebnissen ziehen.

Unter den Voraussetzungen von Lemma 2 ist, wie schon bemerkt, jedes schwach effiziente Produktbündel sogar effizient.

Korollar 1.

Die sektoralen Produktionsfunktionen f_i seien stetig und quasikonkav für $O^m \leqq V^i \leqq V$, sowie streng monoton wachsend, sofern ein positiver Ausstoß erzeugt wird; letztes bedeute: aus $f_i(V^i) \leqq f_i(W^i)$ für $V^i \geq W^i$ folgt $f_i(V^i) = f_i(W^i) = 0$. Außerdem gelte $f_i(O^m) = 0$ und $f_i(V) > 0$. Dann sind Produktionsgrenze und Transformationskurve identisch, d. h. $\Gamma(V) = \Theta(V)$.

Die Voraussetzungen des Korollars 1 werden z. B. von allen *CES*-Funktionen beliebiger Substitutionselastizität $\sigma > 0$ und beliebigen Homogenitätsgrades $\varepsilon > 0$ für jede positive Faktorausstattung V erfüllt; im Falle der in Abschnitt 3 verwendeten *Sato*-Funktion muß $V \leqq 1$ gelten (Abb. 3 a). Schwach effiziente Produktkombinationen, wie sie in Abbildung 2 c dargestellt sind, können höchstens dann vorkommen, wenn zumindest eine sektorale Produktionsfunktion, hier die von Sektor 1, eine „Flachstelle" besitzt, d. h. eine Funktion f_i in der Umgebung eines Faktoreinsatzes V^i konstant ist.

Korollar 2.

Sei $Y > O^n$ für $Y \in \Phi(V)$ ein (schwach) effizientes Produktbündel mit einer zugehörigen Faktoraufteilung $W^1 > O^m, \ldots, W^n > O^m$. Zu-

[33] Z. B. *Shepard* (1970), 22.
[34] Vgl. auch *Panagariya* (1980).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

sätzlich zu den Voraussetzungen von Korollar 1 gelte, daß die Funktionen f_i jeweils in W^i differenzierbar mit $\nabla f_i(W^i) > O^m$ sind. Dann sind alle Güterpreise positiv, die Faktoren sind ausgelastet, die Produktion aller Sektoren ist technisch effektiv, und die Grenzproduktivitätsbedingungen (2) gelten mit Gleichheit.

Korollar 2 folgt aus Theorem 3 und folgenden Überlegungen: Wegen $W^i > O^m$ folgt die Gleichheit in (2); also $\Pi > O^n$, da mindestens ein Faktorpreis positiv ist; dann gilt aber auch $\Omega = Q > O^m$ aufgrund der positiven Grenzerträge.

Die Voraussetzung $W^i > O^m$ ist stets erfüllt, falls jeder Faktor j wesentlich (unverzichtbar) in der Produktion ist ($f_i(W^i) = 0$ für $w_j^i = 0$) oder falls die Grenzerträge bei verschwindendem Einsatz der Faktoren unendlich groß werden ($\partial f_i(W^i)/\partial w_j^i \to \infty$ für $w_j^i \to 0$). Mindestens eine dieser Eigenschaften ist bei den *CES*-Funktionen immer gegeben.

Unter den Annahmen von Korollar 2 wird der Zusammenhang zwischen einem Produktbündel Y auf der Transformationskurve und einer effizienten Faktorausstattung W implizit durch ein System aus $n + m + mn$ Gleichungen und $2n + 2m + mn$ positiven Variablen $Y, W, W^1, \ldots, W^n, \Pi, \Omega$ beschrieben. Da die Preise hinsichtlich der Multiplikation mit einer positiven Zahl unbestimmt sind, kann man durch Normierung der Preise einen Freiheitsgrad eliminieren, so daß $n + m - 1$ Freiheitsgrade verbleiben. Die so definierte Produktionskorrespondenz ordnet einer Faktorausstattung W die $(n - 1)$-dimensionale Transformationskurve $\Theta(W)$ bzw. einem Produktbündel Y die $(m - 1)$-dimensionale Menge effizienter Faktorausstattungen W aus $\Psi(Y)$ zu, von Entartungsfällen einmal abgesehen. Im ersten Fall handelt es sich um ein „Output-", im zweiten um eine „Inputkorrespondenz", die das effiziente Angebot an Produkten bzw. die effiziente Nachfrage nach Faktoren charakterisieren. Bei gegebener Faktorausstattung W und gegebenem Produktpreissystem Π werden durch das Gleichungssystem die zu diesen Preisen effizienten Produktbündel bestimmt. Diese brauchen nicht eindeutig zu sein; nicht zu jedem Preissystem existieren effiziente Produktkombinationen, bei streng konkav zum Ursprung verlaufender Transformationskurve höchstens eine. Sind die sektoralen Produktionsfunktionen f_i zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung des jeweiligen Einsatzes W^i, so hat die Transformationskurve in einer Umgebung von Y eine glatte Gestalt ($\Theta(W)$ ist „richtungsdicht" in Y). Eckige Kurvenverläufe (vgl. Abb. 2 b) können demnach bei sektoralen Produktionsfunktionen vom *CES*-Typ nicht vorkommen, im Unterschied etwa zu dem Grenzfall linearer Funktionen.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Korollar 3.

Die Produktionsfunktion des Sektors k sei positiv auf $\mathbf{R}^m_>$ und homogen vom Grad $\varepsilon < 1$. Es existiere ein Produktbündel $Z \geqq O^n$ mit $z_k = 0$, so daß die Funktionen f_i für die zu $\Phi(V, Z)$ gehörenden Faktoraufteilungen konkav sind, insbesondere also $\Phi(V, Z)$ konvex und die Produktionsgrenze in der Nähe der durch $E_k = \{X \in \mathbf{R}^n \mid x_k = 0\}$ definierten Koordinatenachse konkav zum Ursprung ist. Dann schneidet die Produktionsgrenze die Koordinatenachse E_k orthogonal[35].

Korollar 3 folgt mit Theorem 2 in Verbindung mit dem Sattelpunktproblem (*ZSP*) und dem Gewinnmaximierungsproblem (1) aus der bekannten Tatsache, daß für eine homogene Produktionsfunktion mit abnehmenden Skalenerträgen bei einem positiven Produktpreis stets ein maximaler Gewinn $g_k(W^k) > \pi_k f_k(O^m)$ zu erzielen ist, d. h. daß Sektor k produziert: $y_k > f_k(O^m)$. Für $0 \leqq y_k \leqq f_k(O^m)$ muß somit der Preis des Produkts k den Wert Null haben, weshalb der Preisvektor Π parallel zu E_k ist.

Hesse und *Linde*[36] haben dieses Resultat für den speziellen Fall zweier Sektoren (und zweier Faktoren) mit homogenen Produktionsfunktionen und *übereinstimmenden* Faktorintensitäten bewiesen. Sie haben außerdem gezeigt, daß für $\varepsilon > 1$ die Transformationskurve parallel zu E_k ist. (Abbildung 2 d veranschaulicht einen Fall, wo Sektor 1 steigende und Sektor 2 fallende Skalenerträge aufweist.) Ohne Beweis sei hier bemerkt, daß diese Aussage für $\varepsilon > 1$ mit Theorem 3 in ähnlicher Weise wie bei Korollar 3 für $\varepsilon < 1$ verallgemeinert werden kann, wobei jedoch die Annahmen von Korollar 2 gemacht werden und zusätzlich verlangt wird, daß die Produktionsfunktionen stetig differenzierbar sind, sowie bei einem verschwindenden Ausstoß in Sektor k ($y_k = f_k(W^k) \to 0$) die Faktorintensitäten nahezu konstant sind (d. h. $W^k/\lambda \to \overline{W}^k$ mit $\lambda^\varepsilon \bar{y}_k = y_k$; $\overline{W}^k$, $\bar{y}_k$ konstant).

Zusammenfassung

Im Mehrsektorenmodell einer Wirtschaft (ohne Zwischen- und Kuppelprodukte) lassen sich die schwach effizienten und die effizienten Produktbündel auf der „Produktionsgrenze" bzw. Transformationskurve mit Hilfe der Theorie der nichtlinearen Programmierung durch Sattelpunktprobleme und lokale Kuhn/Tucker Probleme charakterisieren, vorausgesetzt gewisse Konvexitätsbedingungen sind erfüllt: (a) die Produktionsgrenze verläuft

[35] Eine Konsequenz von Korollar 3 ist, daß eine Außenhandel treibende Wirtschaft, deren Sektoren homogene Produktionsfunktionen mit abnehmenden Skalenerträgen aufweisen, sich stets „vollständig diversifiziert" (*Chipman* (1966)). Vgl. hierzu auch *Panagariya* (1981).

[36] *Hesse* und *Linde* (1976), 69 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

lokal konkav zum Ursprung (Theoreme 1 und 2), oder (b) die sektoralen Produktionsfunktionen sind quasikonkav und die Faktoren verbunden (Theorem 3). In beiden Fällen, jedoch bei (a) nur begrenzt, sind steigende Skalenerträge zugelassen.

Summary

For the case of several final (no joint)-products which can be produced with a given bundle of primary factors (without intermediate goods) non-linear programming theory is used to characterize the weakly efficient and the efficient bundles of products on the "production frontier" and on the transformation curve, respectively. Either one of the following convexity assumptions is supposed: (a) the characterized bundles of products lie on those parts of the production frontier which are locally concave to the origin, or (b) the production functions are quasiconcave and the factors are connected. In both cases, increasing returns to scale are permitted, in (a), however, under particular, additional conditions, only.

Literatur

Blum, E. und W. *Oettli* (1975), Mathematische Optimierung. Heidelberg et al.

Chipman, J. S. (1966), A Survey of the Theory of International Trade: Part 3, The Modern Theory. Econometrica 34, 18 - 76.

Fandel, G. (1972), Optimale Entscheidung bei mehrfacher Zielsetzung. Heidelberg et al.

Gal, T. (1977), A General Method for Determining the Set of All Efficient Solutions to a Linear Vectormaximum Problem. European Journal of Operational Research 1, 307 - 322.

Geoffrion, A. M. (1968), Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization. Journal of Mathematical Analysis and Applications 22, 618 - 630.

Henn, R. und O. *Opitz* (1972), Konsum- und Produktionstheorie II. Heidelberg et al.

Herberg, H. (1967), Der Variationsbereich der Substitutionselastizität einer verallgemeinerten Sato-Funktion. Konjunkturpolitik 13, 382 - 390.

— (1969), On the Shape of the Transformation Curve in the Case of Homogeneous Production Functions. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 125, 202 - 210.

— (1973), On the Convexity of the Production Possibility Set under General Production Conditions. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 129, 205 - 214.

— und M. C. *Kemp* (1969), Some Implications of Variable Returns to Scale. Canadian Journal of Economics 2, 403 - 415.

Hesse, H. und R. *Linde* (1976), Gesamtwirtschaftliche Produktionstheorie, Teil II. Würzburg.

Hildenbrand, W. (1966), Mathematische Grundlagen zur nichtlinearen Aktivitätsanalyse. Unternehmensforschung 10, 65 - 80.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Koopmans, T. (1951), Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities, in: T. Koopmans (Hrsg.), Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Comission Monograph 13, New York.

Krelle, W. (1969), Produktionstheorie. Tübingen.

Künzi, H. P., W. *Krelle* und R. *von Randow* (1979), Nichtlineare Programmierung. Heidelberg et al.

Mangasarian, O. L. (1969), Nonlinear Programming. New York et al.

Martos, B. (1975), Nonlinear Programming: Theory and Methods. Amsterdam et al.

Panagariya, A. (1980), Variable Returns to Scale in General Equilibrium Theory Once Again. Journal of International Economy 10, 499 - 526.

— (1981), Variable Returns to Scale in Production and Patterns of Spezialization. American Economic Review 71, 221 - 230.

Rader, T. (1970), Resource Allocation with Increasing Returns to Scale. American Economic Review 60, 814 - 825.

Scarf, H. E. (1981), Production Sets with Indivisibilities, Part I: Generalities. Econometrica 49, 1 - 32.

Shepard, R. W. (1970), Theory of Cost and Production Functions. Princeton.

Takayama, A. (1974), Mathematical Economics. Hinsdale.

Woll, A. (1976), Allgemeine Volkswirtschaftslehre. München.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.2.155 | Generated on 2025-07-20 06:21:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/