

# Zur Informationseffizienz des Kapitalmarktes\*

Von Martin Hellwig

Die Arbeit diskutiert die Möglichkeit der Informationseffizienz eines Wertpapiermarktes anhand eines intertemporalen Modells mit rationalen Erwartungen unter der Voraussetzung, daß die Erwartungen sich jeweils an vergangenen, nicht aber schon an laufenden Preisen orientieren.

## 1. Allgemeine Problemstellung

Eine zentrale Hypothese der Kapitalmarkttheorie besagt, daß ein wettbewerbsmäßig organisierter Kapitalmarkt ein effizientes Kommunikationssystem ist, in dem Information zwischen den verschiedenen Marktteilnehmern weitgehend störungsfrei übermittelt wird<sup>1</sup>. Die vorliegende Arbeit untersucht diese Hypothese anhand eines expliziten theoretischen Modells des Kommunikationsprozesses in einem Kapitalmarkt. Insbesondere werde ich mich kritisch mit der Gegenthese von *Grossman* und *Stiglitz*<sup>2</sup> auseinandersetzen, wonach Kommunikation über den Markt auch nicht annähernd störungsfrei ablaufen kann, wenn die Marktteilnehmer Ressourcen aufwenden müssen, um sich gegebene Informationen als erste zu beschaffen.

Die Vorstellung, daß der Kapitalmarkt ein Kommunikationssystem ist, läßt sich an einem Beispiel veranschaulichen. Wenn eine Gruppe von Marktteilnehmern erfährt, daß die Ertragsaussichten eines Unternehmens sich verbessert haben, werden sie vermutlich mehr Aktien dieses Unternehmens nachfragen. Der Kurs der Aktien wird daher ansteigen. Dieser Kursanstieg ist ein Signal für andere Marktteilnehmer. Wenn sie aus dem Kursanstieg auf die ursprüngliche Information über verbesserte Ertragsaussichten zurückschließen, dann hat der

---

\* Vortrag auf einer Arbeitstagung des Vereins für Socialpolitik, „Information in der Wirtschaft“, Graz 21. - 23. 9. 1981.

Die vorliegende Arbeit gibt eine zusammenfassende Darstellung von Ergebnissen, die an anderer Stelle ausführlich abgeleitet werden (*Hellwig* (1981 a, b)). Einige der hier behandelten Ideen wurden gemeinsam mit *Michael Rothschild* entwickelt, der jedoch keine Verantwortung für etwaige Fehler dieser Arbeit trägt. Ich danke der National Science Foundation (Grant SOC 75-13437) und der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Sonderforschungsbereich 21) für finanzielle Unterstützung.

<sup>1</sup> *Fama* (1970, 1977).

<sup>2</sup> *Stiglitz* (1976, 1980).

Markt als Kommunikationssystem Information von der ersten Gruppe an die übrigen Marktteilnehmer durch den Aktienkurs übermittelt.

Allgemein ist zu fragen, welcher Teil der vorhandenen Information auf diese Weise durch den Markt übermittelt werden kann. Dabei kommt es nicht so sehr darauf an, ob am Ende auch alle Marktteilnehmer alle Details der vorhandenen Informationen über die Ertragsaussichten der einzelnen Wertpapiere kennen. Wichtig ist vielmehr die Frage, wie nahe die Preise und die Allokation der Wertpapiere denjenigen Preisen und der Allokation kommen, die sich einstellen würden, wenn alle Marktteilnehmer die vorhandene Information von Anfang an besäßen. Der Kapitalmarkt wird als *informationseffizient* bezeichnet, wenn die Wertpapierpreise zu jedem Zeitpunkt alle am Markt verfügbare Information „voll widerspiegeln“ und dabei auch den Preisen entsprechen, die sich bei einer „richtigen“ Auswertung dieser Information durch alle Marktteilnehmer ergeben müßten<sup>3</sup>.

Um den Prozeß der Kommunikation durch den Markt im Detail zu analysieren, muß man spezifizieren, wie diejenigen Marktteilnehmer, die zunächst keine Information haben, aus den Preisen auf die Ertragsaussichten der Wertpapiere zurückschließen. Diese Anleger müssen davon ausgehen, daß Preise und Erträge der Wertpapiere miteinander korreliert sind, d. h. sie müssen Preise und Erträge als stochastisch abhängige Zufallsvariable betrachten. Der Rückschluß vom Preis auf die Ertragsaussichten läßt sich dann als Präzisierung einer subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung der Erträge infolge der Beobachtung des Preises als bedingender Variablen interpretieren, d. h. die Anleger

---

<sup>3</sup> Dieser Begriff der Informationseffizienz des Kapitalmarkts geht sehr viel weiter als die von *Hayek* (1945) und *Eucken* (1952) diskutierte Informationseffizienz von Wettbewerbsmärkten überhaupt. Hayek und Eucken stellen lediglich darauf ab, daß das Preissystem die dezentralisierten Entscheidungen vieler Marktteilnehmer auf gesellschaftlich Pareto-optimale Weise koordiniert, ohne daß der einzelne etwas über die Präferenzen und Technologien der anderen Marktteilnehmer erfahren muß. Als Beispiel diskutiert Hayek die Situation, wenn eine neue Verwendungsmöglichkeit für Zinn gefunden wird und der daraufhin erfolgende Anstieg im Zinnpreis den anderen Wirtschaftssubjekten alles mitteilt, was für sie relevant ist, ohne daß sie die neue Verwendungsmöglichkeit selbst kennen müssen. Der Kapitalmarkt unterscheidet sich von den von Hayek und Eucken betrachteten Gütermärkten insofern, als Wertpapiere nicht wegen ihrer unmittelbaren Verwendungsmöglichkeiten nachgefragt werden, sondern wegen der Erträge, die sie abwerfen. Die Anleger müssen dabei versuchen, diese Erträge so gut wie möglich zu bestimmen, ehe sie ihre Anlageentscheidungen treffen. Dieses Informationsproblem ist insofern neu, als die Anleger hier ihre „richtigen“ Präferenzen über Wertpapiere in Abhängigkeit von den Ertragswartungen bestimmen müssen, während die Präferenzen bei Hayek und Eucken weitgehend exogen sind. Der hier verwandte Begriff der Informationseffizienz des Kapitalmarkts verlangt, daß der Markt auch die Informationen über Ertragsaussichten der Wertpapiere soweit übermittelt, wie sie für die Anlageentscheidungen der Marktteilnehmer relevant sind.

ersetzen die Randverteilung durch eine auf den Preis bedingte Verteilung der Erträge.

Die Hypothese, daß die verfügbare Information „richtig“ ausgewertet wird, bedeutet dabei, daß die Erwartungen der Anleger *rational* im Sinne von *Muth* (1961) sind, d. h. daß die subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilung der Erträge, bedingt auf einen gegebenen Informationsstand, bei allen Anlegern gleich der entsprechenden objektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung ist<sup>4</sup>. Da hier die Wertpapierpreise als bedingende Variable verwandt werden, müssen die Anleger die zugrundeliegende gemeinsame Verteilung von Erträgen und Preisen kennen. Sie müssen wissen, unter welchen Umständen welcher Preis eintritt und den Markt räumt, denn nur dann können sie richtig von den beobachteten Preisen auf die zugrundeliegenden Umstände, d. h. auf die vorhandenen Informationen über Ertragsaussichten zurückschließen.

Für die Analyse des Kommunikationsprozesses im Markt ergibt sich die Schwierigkeit, daß Erwartungsbildung, Nachfrageverhalten und Marktgleichgewicht nicht nacheinander, sondern gleichzeitig betrachtet werden müssen. Die Nachfrage nach Wertpapieren hängt von den Preisen nicht nur über die Budgetrestriktionen, sondern auch über die bedingten Ertragserwartungen ab. Eine rationale Erwartungsbildung setzt aber die Kenntnis der Markträumungsbedingungen voraus, die ihrerseits wieder auf dem Nachfrageverhalten beruhen. In einem „Gleichgewicht mit rationalen Erwartungen“ ist der Preis jeweils so zu bestimmen, daß der Markt geräumt wird, wenn die Anleger die im Preis enthaltene Information in ihrem Nachfrageverhalten berücksichtigen.

Allgemein stellt sich also die Frage, wieviel Information in einem Gleichgewicht mit rationalen Erwartungen durch den Markt übermittelt wird und wie nahe der Markt der vollkommenen Informationseffizienz im oben beschriebenen Sinn kommen kann.

## 2. Die These von Grossman und Stiglitz

In zwei wichtigen Aufsätzen zeigen *Grossman* und *Stiglitz* (1976, 1980), daß es für die Beurteilung der Informationseffizienz des Kapitalmarktes ganz wesentlich darauf ankommt, ob man die zugrundeliegenden Informationen als exogen gegeben ansieht, oder ob man davon ausgeht, daß die Marktteilnehmer unter Abwägung von Nutzen und Kosten selbst entscheiden, welche Informationen sie sich beschaffen. Insbesondere stellen *Grossman* und *Stiglitz* die These auf, daß der

---

<sup>4</sup> Vgl. *Fama* (1977) Kap. 5, *Grossman* und *Stiglitz* (1976, 1980).

*Kapitalmarkt nicht einmal annähernd informationseffizient sein kann, wenn die Beschaffung von Information Kosten verursacht.*

Zur Begründung dieser These behaupten sie, daß es in einem informationseffizienten Kapitalmarkt keinen Anreiz zur Beschaffung von Information gibt. Wenn ein Anleger wählen kann, ob er sich unter Aufwendung von Kosten Informationen über die Ertragsaussichten eines Unternehmens beschaffen soll, oder ob er die gleichen Informationen ohne Kosten aus dem Aktienkurs erschließen soll, so wird er immer die zweite Alternative wählen. Insbesondere zeigen *Grossman* und *Stiglitz* für ein statisches Modell des Wertpapiermarktes, daß ein Gleichgewicht bei Berücksichtigung der Beschaffung der Information überhaupt nur dann möglich ist, wenn der Markt *nicht* informationseffizient ist, so daß die Information, die man aus dem Preis erschließen kann, weniger aufschlußreich ist als die Information, die man unmittelbar kauft.

Im einzelnen untersuchen *Grossman* und *Stiglitz* den Markt zwischen einem risikofreien und einem riskanten Wertpapier mit den Bruttoertragsraten  $R$  und  $\tilde{X}$  je Einheit. Alle Anleger kennen die Wahrscheinlichkeitsverteilung des unsicheren Ertrags  $\tilde{X}$ . Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, unter Aufwendung von Kosten  $c > 0$  die Realisierung der Zufallsvariablen  $\tilde{X}$  zu erfahren. Das Angebot des riskanten Wertpapiers ist konstant und beträgt  $\bar{Z}$  je Anleger. Die Nachfrage der informierten und der nicht informierten Anleger nach dem riskanten Papier hängt von ihrer Ertragserwartung, der risikofreien Ertragsrate  $R$  und dem relativen Preis  $p$  der beiden Wertpapiere ab. Ein Anleger, der die Realisierung  $X$  des Ertrags  $\tilde{X}$  kennt, fragt zum Preis  $p$  die Menge

$$(2.1) \quad z_I = X - Rp$$

des riskanten Wertpapiers nach. Ein Anleger, der die Realisierung  $X$  nicht kennt, der aber den Preis  $p$  als Realisierung einer Zufallsvariablen  $\tilde{p}$  betrachtet, fragt die Menge

$$(2.2) \quad z_U = E [\tilde{X} | \tilde{p} = p] - Rp$$

des riskanten Wertpapiers nach. Der Preis  $p$  beeinflusst seine Nachfrage also auch über die bedingte Erwartung  $E [\tilde{X} | \tilde{p} = p]$ . Wenn nun ein Anteil  $\lambda$  aller Anleger die Realisierung  $X$  unmittelbar kennt, so trägt die aggregierte Nachfrage pro Anleger:

$$(2.3) \quad \lambda (X - Rp) + (1 - \lambda) (E [\tilde{X} | \tilde{p} = p] - Rp) .$$

Für gegebenes  $\lambda$  entspricht die Zufallsvariable  $\tilde{p}_\lambda$  einem Gleichgewicht mit rationalen Erwartungen, wenn die Realisierungen  $(X, p)$  der

Zufallsvariablen  $(\tilde{X}, \tilde{p}_\lambda)$  den Wertpapiermarkt mit Wahrscheinlichkeit Eins räumen, so daß:

$$(2.4) \quad \bar{Z} = \lambda (X - Rp) + (1 - \lambda) (E [\tilde{X} | \tilde{p}_\lambda = p] - Rp) .$$

Man sieht nun sofort, daß für  $\lambda > 0$  der zufällige Preis

$$(2.5) \quad \tilde{p}_\lambda = \frac{1}{R} (\tilde{X} - \bar{Z})$$

das einzige Gleichgewicht mit rationalen Erwartungen ist. In diesem Gleichgewicht gilt:

$$(2.6) \quad E [\tilde{X} | \tilde{p}_\lambda] = R\tilde{p}_\lambda + \bar{Z} = X ,$$

d. h. diejenigen Anleger, die die Realisierung des zufälligen Ertrags  $\tilde{X}$  nicht unmittelbar erfahren, können sie statt dessen mit der gleichen Genauigkeit aus dem Preis erschließen.

Auf den ersten Blick wird so die Hypothese der Informationseffizienz des Kapitalmarktes bestätigt. Der Preis und die Allokation der Wertpapiere im Gleichgewicht mit rationalen Erwartungen sind dieselben, die sich einstellen würden, wenn alle Anleger von Anfang an über die Ertragsrealisierungen informiert würden. Es spielt keine Rolle, ob alle Anleger von Anfang an informiert werden oder ob ein Teil der Anleger seine Information erst aus dem Preis des riskanten Papiers bezieht.

In dieser Situation besteht aber kein Anreiz, den Betrag  $c > 0$  aufzuwenden, um die Ertragsrealisierung unmittelbar zu erfahren. Alle Anleger werden es vorziehen, die gleiche Information ohne Kosten aus dem Preis abzulesen. Wenn aber kein Anleger Information „kauft“, kann der Anteil  $\lambda$  der Anleger, die die Ertragsrealisierung unmittelbar kennen, nicht positiv sein. Bei Berücksichtigung der Entscheidung über den Kauf von Information gibt es demnach kein Gleichgewicht mit  $\lambda > 0$ .

Nimmt man aber an, daß niemand Information „kauft“, so daß  $\lambda = 0$ , so kann der Preis auch keine Information „widerspiegeln“. Im Gleichgewicht mit rationalen Erwartungen gilt einfach:

$$(2.7) \quad \tilde{p}_0 = \frac{1}{R} (E\tilde{X} - \bar{Z}) .$$

Sind nun die Informationskosten  $c$  relativ klein, so kann es sich wieder lohnen, Information zu kaufen, da diese ja aus dem Preis nicht abzulesen ist. In diesem Fall gibt es auch kein Gleichgewicht mit  $\lambda = 0$ .

Aus diesen Überlegungen schließen *Grossman* und *Stiglitz*, daß es im allgemeinen kein Gleichgewicht geben könnte, wenn der Kapitalmarkt informationseffizient wäre. Damit es bei Berücksichtigung der Entscheidung über den Kauf von Information überhaupt ein Gleichgewicht gibt, muß der Kommunikationsprozeß im Markt durch verschiedene Zufallseinflüsse gestört sein, so daß die Anleger, die Information unmittelbar kaufen, immer einen Informationsvorsprung vor den anderen Anlegern haben.

Als Beispiel für solches „Rauschen“ untersuchen *Grossman* und *Stiglitz* stochastische Schwankungen im Wertpapierangebot, d. h. sie betrachten das Angebot  $\tilde{Z}$  als Realisierung einer Zufallsvariablen  $\tilde{Z}$ . Die nicht informierten Anleger können dann nicht mehr genau unterscheiden, ob ein überdurchschnittlich hoher Preis auf eine gute Ertragsrealisierung oder auf ein knappes Wertpapierangebot zurückzuführen ist. Sie können nicht genau vom Preis auf die Erträge zurückschließen.

Nimmt man beispielsweise an, daß der Ertrag  $\tilde{X}$  und das Angebot  $\tilde{Z}$  stochastisch unabhängig und normalverteilt mit den Varianzen  $\sigma_x^2$  und  $\sigma_z^2$  sind, so ergibt sich für  $\lambda > 0$  das Gleichgewicht mit rationalen Erwartungen:

$$(2.8) \quad \tilde{p}_\lambda = \frac{1}{R} (E\tilde{X} - E\tilde{Z}) + \gamma [\lambda (\tilde{X} - E\tilde{X}) - (\tilde{Z} - E\tilde{Z})] ,$$

wobei:

$$\gamma = \frac{\lambda^2 \sigma_x^2 + \sigma_z^2}{R (\lambda^2 \sigma_x^2 + \sigma_z^2) - (1 - \lambda) \lambda^2 \sigma_x^2} .$$

In diesem Gleichgewicht mit rationalen Erwartungen haben die nicht informierten Anleger die Ertragserwartung:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} E [\tilde{X} | \tilde{p}_\lambda] &= E\tilde{X} + \frac{\lambda^2 \sigma_x^2}{\lambda^2 \sigma_x^2 + \sigma_z^2} \frac{\tilde{p}_\lambda - E\tilde{p}_\lambda}{\gamma \lambda} \\ &= E\tilde{X} + \frac{\lambda^2 \sigma_x^2}{\lambda^2 \sigma_x^2 + \sigma_z^2} \left[ \tilde{X} - E\tilde{X} - \frac{\tilde{Z} - E\tilde{Z}}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

Sofern die Angebotsvarianz  $\sigma_z^2$  positiv ist, gilt fast immer  $E [\tilde{X} | \tilde{p}_\lambda] \neq \tilde{X}$ . Die nicht informierten Anleger können den anfänglichen Informationsvorsprung der informierten Anleger nicht dadurch ausgleichen, daß sie die im Preis enthaltene Information verwenden. Es ist daher von Vorteil, wenn man den Ertrag  $\tilde{X}$  und nicht nur die Erwartung  $E [\tilde{X} | \tilde{p}_\lambda]$  kennt.

Im einzelnen hängt der Informationsvorsprung eines informierten Anlegers vom Anteil  $\lambda$  der informierten Anleger und der Angebotsvarianz  $\sigma_z^2$  ab. Ceteris paribus kommt die bedingte Erwartung  $E[\tilde{X}|\tilde{p}_\lambda]$  dem tatsächlichen Ertrag  $\tilde{X}$  um so näher, je größer  $\lambda$  und je kleiner  $\sigma_z^2$  ist.

Bei Berücksichtigung der Entscheidung über den Kauf von Information zeigen *Grossman* und *Stiglitz*, daß es bei gegebener Angebotsvarianz  $\sigma_z^2 > 0$  genau einen Wert  $\lambda^*$  gibt, so daß ein Anteil  $\lambda^*$  von Anlegern bereit ist, die Kosten  $c$  für die Beschaffung von Information aufzuwenden, wenn der Preis  $\tilde{p}_{\lambda^*}$  vorherrscht. Für  $\lambda > \lambda^*$  enthält der Preis  $\tilde{p}_\lambda$  zu viel Information: Der Informationsvorsprung der informierten Anleger ist dann zu klein, um die Kosten  $c$  aufzuwiegen. Für  $\lambda < \lambda^*$  ist der Informationsvorsprung der informierten Anleger so groß, daß der Kauf von Information zu den Kosten  $c$  sich für alle Anleger lohnen würde. Nur die Kombination  $(\lambda^*, \tilde{p}_{\lambda^*})$  ergibt ein Gleichgewicht bei Berücksichtigung der Entscheidung über den Kauf von Information.

Der Preis und die Allokation der Wertpapiere in diesem Gleichgewicht unterscheiden sich signifikant von dem Preis und der Allokation, die sich einstellen würden, wenn die Information der informierten Anleger allen Marktteilnehmern bekannt wäre. Selbst wenn die Angebotsvarianz  $\sigma_z^2$  klein ist, kommt der Markt der vollkommenen Informationseffizienz nicht näher. Wenn die Angebotsvarianz  $\sigma_z^2$  sinkt, geht ceteris paribus der Informationsvorsprung der informierten Anleger zurück, und der Kauf von Information wird weniger attraktiv. Daher geht der Anteil  $\lambda^*$  der Anleger, die im Gleichgewicht die Kosten  $c$  zur Beschaffung von Information aufwenden, zurück. Der Preis  $\tilde{p}_{\lambda^*}$  reagiert dann weniger stark auf die Information der informierten Anleger über den Ertrag  $\tilde{X}$ . Die gleichzeitige Senkung von  $\sigma_z^2$  und  $\lambda^*$  läßt die Erwartungen der nicht informierten Anleger unverändert. Selbst wenn  $\sigma_z^2$  gegen Null geht, konvergiert die bedingte Ertragserwartung  $E[\tilde{X}|\tilde{p}_{\lambda^*}]$  nicht gegen den tatsächlichen Ertrag  $\tilde{X}$ . Im Gleichgewicht bei Berücksichtigung der Entscheidung über den Kauf von Information ist der Markt nicht einmal annähernd informationseffizient.

### 3. Preise und Kommunikation in einem dynamischen Modell

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit soll die These von *Grossman* und *Stiglitz* in Zweifel gezogen werden. Ich werde zeigen, daß ihr Ergebnis letztlich auf den statischen Charakter ihres Modells zurückzuführen ist, der implizit eine bestimmte zeitliche Struktur des Kommunikationsprozesses im Markt vorschreibt. Für andere zeitliche Struk-

turen des Kommunikationsprozesses zeigt sich in einer Mehr-Perioden-Analyse, daß der Kapitalmarkt der vollkommenen Informationseffizienz beliebig nahekommen kann, ohne daß dadurch der Anreiz zur Beschaffung von Information beeinträchtigt wird.

Im Zentrum der Analyse steht die Frage, *wann* die zunächst nicht informierten Anleger ihre Information aus dem beobachteten Preis ziehen. Bei *Grossman* und *Stiglitz* tun sie dies, noch ehe überhaupt eine Transaktion zu diesem Preis stattfindet. In ihrem Modell verhält es sich ja nicht so, daß die nicht informierten Anleger den Gleichgewichtspreis beobachten, daraus ihre Information ziehen und *dann* ihre Nachfrage bestimmen. Vielmehr müssen sie überlegen, was es bedeuten würde, wenn der gerade angebotene Preis ein Gleichgewichtspreis wäre, noch ehe sie wissen, ob er dies überhaupt ist. Der Gleichgewichtspreis im Modell von *Grossman* und *Stiglitz* räumt den Markt, *nachdem* die nicht informierten Anleger bereits ihre Information aus ihm gezogen haben.

Demgegenüber ist die alternative Vorstellung, daß die zu Anfang nicht informierten Anleger ihre Information erst aus den Preisen tatsächlich beobachteter Transaktionen ziehen, begrifflich einfacher. In einem statischen Modell schließt diese Vorstellung aber die Möglichkeit eines ökonomisch relevanten Kommunikationsprozesses aus. Anders verhält es sich in einem dynamischen Modell mit vielen aufeinanderfolgenden Marktdaten. Hier führt die Vorstellung, daß die zu Anfang nicht informierten Anleger ihre Information erst aus den Preisen tatsächlich beobachteter Transaktionen ziehen, zu einem Kommunikationsprozeß, *in dem die Anleger jeweils aus den Gleichgewichtspreisen vergangener Marktdaten, aber noch nicht aus dem derzeitigen Angebotspreis lernen.*

Die im Preis enthaltene Information steht den Anlegern dann erst mit einer gewissen Verzögerung zur Verfügung. Diese Verzögerung ist zwar klein, gibt aber den informierten Anlegern eine Gelegenheit, ihre Information auszunutzen, ehe die anderen Marktteilnehmer sie aus dem Preis ablesen. Der Anreiz zur Beschaffung von Information ist dann größer als bei *Grossman* und *Stiglitz*, denn die Information steht den Marktteilnehmern, die sie unmittelbar kaufen, früher zur Verfügung als denen, die sie erst aus dem Preis lernen.

Um diese Vorstellung zu präzisieren, untersuche ich einen Kapitalmarkt mit einem riskanten und einem risikofreien Wertpapier in einer Folge von Perioden  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Das risikofreie Papier hat den konstanten Preis  $q_t = 1$  und die konstante Nettoertragsrate  $r$  pro Periode. Der Kauf einer Einheit des risikofreien Papiers in Periode  $t$  erbringt also die Bruttoauszahlung  $R = 1 + r$  in Periode  $t + 1$ .



Das riskante Papier wird in Periode  $t$  zum Preis  $p_t$  gehandelt. Der Käufer einer Einheit des Papiers erhält dann in Periode  $t + 1$  eine Dividende  $D_{t+1}$  und kann außerdem das Papier zum Preis  $p_{t+1}$  wieder verkaufen. Die Bruttoauszahlung in Periode  $t + 1$  beträgt also  $V_{t+1} = D_{t+1} + p_{t+1}$ .

Die Folge  $\{D_t, p_t\}_{t=0}^\infty$  der Dividenden und der Preise ist die Realisierung eines stochastischen Prozesses  $\{\tilde{D}_t, \tilde{p}_t\}_{t=0}^\infty$ . Der Dividendenprozeß  $\{\tilde{D}_t\}_{t=0}^\infty$  ist exogen vorgegeben. Der Preisprozeß  $\{\tilde{p}_t\}_{t=0}^\infty$  wird vom einzelnen Anleger als exogen betrachtet; er ist aber im Gleichgewicht mit rationalen Erwartungen so zu bestimmen, daß der Markt in jeder Periode mit Wahrscheinlichkeit Eins geräumt wird, wenn alle Anleger diesen Preisprozeß selbst ihrer Erwartungsbildung zugrundelegen.

Zur Vereinfachung nehme ich an, daß die Anlageentscheidungen in jeder Periode auf einem gewöhnlichen Ein-Perioden-Mittelwert-Varianz-Kriterium beruhen, d. h. alle Anleger verhalten sich so, als maximieren sie eine Funktion von Mittelwert und Varianz ihres Portefeuilleertrages in der nächsten Periode<sup>5</sup>. Es seien  $E_t^a \tilde{V}_{t+1}$  und  $\text{Var}_t^a \tilde{V}_{t+1}$  der bedingte Erwartungswert und die bedingte Varianz des Bruttoertrags  $\tilde{V}_{t+1} = \tilde{D}_{t+1} + \tilde{p}_{t+1}$ , gegeben die Information, die dem Anleger  $a$  in Periode  $t$  zur Verfügung steht. Dann ist die Nachfrage  $z_t^a$  des Anlegers  $a$  nach dem riskanten Papier gleich der Realisierung der Zufallsvariablen:

$$(3.1) \quad \tilde{z}_t^a = \frac{E_t^a \tilde{V}_{t+1} - R\tilde{p}_t}{\text{Var}_t^a \tilde{V}_{t+1}}.$$

Der Gesamtbestand an riskanten Wertpapieren im Markt sei eine exogene Konstante,  $|A|\bar{Z}$ . Dabei ist  $|A|$  die Zahl der Anleger und  $\bar{Z}$  der Bestand pro Anleger. Der Markt wird in jeder Periode mit Wahrscheinlichkeit Eins geräumt, wenn:

$$(3.2) \quad \bar{Z} = -\frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \tilde{z}_t^a = -\frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{E_t^a \tilde{V}_{t+1} - R\tilde{p}_t}{\text{Var}_t^a \tilde{V}_{t+1}}$$

für  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Durch Auflösen nach  $\tilde{p}_t$  erhält man:

$$(3.3) \quad \tilde{p}_t = \frac{1}{R} \left[ \sum_{a \in A} c^a E_t^a \tilde{V}_{t+1} - kZ \right],$$

<sup>5</sup> In *Hellwig* (1981 b) wird gezeigt, daß für die hier behandelten Dividenden- und Preisprozesse die Mittelwert-Varianz-Nachfrage (3.1) das Kriterium der Maximierung des erwarteten Nutzens aus dem Konsum über viele Perioden approximativ erfüllt, wenn der Anleger eine konstante absolute Risikoaversion in Höhe von Eins hat.

wobei:

$$c^a = \frac{1}{\text{Var}_t^a \tilde{V}_{t+1}} \bigg/ \sum_{a \in A} \frac{1}{\text{Var}_t^a \tilde{V}_{t+1}},$$

$$k = 1 \bigg/ \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{\text{Var}_t^a \tilde{V}_{t+1}}.$$

Die Dividende  $\tilde{D}_t$  setzt sich zusammen aus einem systematischen Term  $\tilde{X}_t$  und weißem Rauschen  $\tilde{\xi}_t$ . Der systematische Term folgt im Zeitablauf einem Zufallspfad. Es gilt also:

$$(3.3.a) \quad \tilde{D}_t = \tilde{X}_t + \tilde{\xi}_t,$$

$$(3.3.b) \quad \tilde{X}_t = \tilde{X}_{t-1} + \tilde{\varepsilon}_t.$$

Dabei sind die Zufallsvariablen  $\tilde{\xi}_t, \tilde{\varepsilon}_t, t = 0, 1, 2, \dots$ , stochastisch unabhängig und normalverteilt mit  $E \tilde{\xi}_t = E \tilde{\varepsilon}_t = 0$  und  $E \tilde{\xi}_t^2 = \sigma_\xi^2, E \tilde{\varepsilon}_t^2 = \sigma_\varepsilon^2$ .

In jeder Periode  $t$  besteht nun die Möglichkeit, daß ein Anleger über die Realisierungen  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+s}$  der systematischen Komponenten  $\tilde{X}_{t+1}, \tilde{X}_{t+2}, \dots, \tilde{X}_{t+s}$  der Dividenden  $\tilde{D}_{t+1}, \tilde{D}_{t+2}, \dots, \tilde{D}_{t+s}$  informiert wird, wobei  $s$  eine exogene Konstante ist. Die übrigen Anleger besitzen diese Information nicht unmittelbar, sondern müssen versuchen, sie aus den Preisen zu erschließen.

Analog zu dem Vorgehen von *Grossman* und *Stiglitz* soll zunächst untersucht werden, welche Gleichgewichtspreise sich einstellen, wenn in jeder Periode ein exogen bestimmter Anteil  $\lambda > 0$  aller Anleger über die Zufallsvariablen  $\tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s}$  informiert wird. Dabei zeigt sich, daß das Ergebnis wesentlich vom Lernverhalten der nicht informierten Anleger abhängt.

Unter der *Grossman/Stiglitz*-Annahme, daß alle Anleger ohne Verzögerung Information aus dem Marktpreis ziehen, kommt man wieder zu dem Ergebnis, daß es keine Rolle spielt, ob ein Anleger unmittelbar über die zukünftigen Dividenden informiert wird, da er die Information auf jeden Fall aus dem Preis ablesen kann. Der Preis des riskanten Papiers in Periode  $t$  wird im Gleichgewicht einfach gleich dem erwarteten Gegenwartswert aller zukünftigen Dividenden abzüglich einer Risikoprämie sein:

---

<sup>6</sup> Die Normalverteilungsannahme ist extrem unrealistisch, da sie eine Beschränkung der Haftung für die Inhaber des riskanten Papiers ausschließt. Diese Annahme ist aber notwendig, wenn man in einem intertemporalen Modell einen Mittelwert-Varianz-Ansatz im Marktgleichgewicht aus der Maximierung des erwarteten Nutzens rechtfertigen will. Siehe *Hellwig* (1977).

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad \tilde{p}_t^* &= E \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{D}_{t+i}}{R^i} \mid \tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s} \right] - \frac{k\bar{Z}}{R-1} \\
 &= \sum_{i=1}^{s-1} \frac{\tilde{X}_{t+i}}{R^i} + \frac{\tilde{X}_{t+s}}{(R-1)R^{s-1}} - \frac{k\bar{Z}}{R-1},
 \end{aligned}$$

wobei  $k = \text{Var}_t \tilde{V}_{t+1} = \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\epsilon}^2 / (R-1)^2 R^2 (s-1)$ . In diesem Gleichgewicht können die nicht informierten Anleger die systematischen Komponenten der Dividenden,  $\tilde{X}_{t+s}, \tilde{X}_{t+s-1}, \tilde{X}_{t+s-2}, \dots$ , rekursiv aus den Preisen  $\tilde{p}_t^*, \tilde{p}_{t-1}^*, \tilde{p}_{t-2}^*, \dots$  ermitteln, indem sie (3.4) einfach nach  $\tilde{X}_{t+s}$  auflösen:

$$(3.5) \quad \tilde{X}_{t+s} = (R-1)R^{s-1} \left[ \tilde{p}_t^* - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{\tilde{X}_{t+i}}{R^i} + \frac{k\bar{Z}}{R-1} \right].$$

Der Markt ist demnach informationseffizient, aber es besteht wieder kein Anreiz, sich unter Aufwendung von Kosten unmittelbar Information zu beschaffen statt sie aus dem Preis zu erschließen.

Anders verhält es sich, wenn die nicht informierten Anleger eine Periode brauchen, um die Information zu verarbeiten, die im Preis  $\tilde{p}_t$  enthalten ist. Dann können die nicht informierten Anleger bestenfalls die Variablen  $\tilde{X}_{t+s-1}, \tilde{X}_{t+s-2}, \dots$  aus den vergangenen Preisen  $\tilde{p}_{t-1}, \tilde{p}_{t-2}, \dots$  ablesen. Sie können aber die jeweils neueste Information  $\tilde{X}_{t+s}$  noch nicht verwenden und müssen sie durch die Erwartung  $E[\tilde{X}_{t+s} \mid \tilde{X}_{t+s-1}] = \tilde{X}_{t+s-1}$  ersetzen.

Der Gleichgewichtspreis in Periode  $t$  ergibt sich nunmehr als gewichtetes Mittel der bedingten Erwartungen der Summe aller abdiskontierten zukünftigen Dividenden aus der Sicht der informierten und aus der Sicht der nicht informierten Anleger abzüglich einer Risikoprämie:

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad \tilde{p}_t^{**} &= cE \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{D}_{t+i}}{R^i} \mid \tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s} \right] \\
 &+ (1-c)E \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{D}_{t+i}}{R^i} \mid \tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s-1} \right] - \frac{k\bar{Z}}{R-1} \\
 &= \sum_{i=1}^{s-2} \frac{\tilde{X}_{t+i}}{R^i} + (1-c) \frac{\tilde{X}_{t+s-1}}{(R-1)R^{s-2}} \\
 &+ c \left[ \frac{\tilde{X}_{t+s-1}}{R^{s-1}} + \frac{\tilde{X}_{t+s}}{(R-1)R^{s-1}} \right] - \frac{k\bar{Z}}{R-1}.
 \end{aligned}$$

Dabei gilt  $c = k \lambda / (\sigma_{\xi}^2 + c^2 \sigma_{\delta}^2)$ ,  $\sigma_{\delta}^2 := \sigma_{\epsilon}^2 / (R-1)^2 R^2 (s-1)$  und:

$$k = 1 / \left[ \frac{\lambda}{(\sigma_{\xi}^2 + c^2 \sigma_{\delta}^2)} + \frac{1-\lambda}{(\sigma_{\xi}^2 + (c^2 + R^2) \sigma_{\delta}^2)} \right].$$

In diesem Gleichgewicht haben die informierten Anleger einen Informationsvorsprung, weil sie für ihre Erwartungsbildung schon die neueste Information  $\tilde{X}_{t+s}$  verwenden, während die nicht informierten Anleger eine Periode benötigen, um diese Information durch Auflösen von (3.6) nach  $\tilde{X}_{t+s}$  aus dem Preis  $\tilde{p}_t^{**}$  zu erschließen. Die Information über  $\tilde{X}_{t+s}$  beeinflusst den Gegenwartswert der zukünftigen Dividenden in Periode  $t$  mit dem Diskontfaktor  $1/R^{s-1} (R - 1)$ . Infolgedessen unterscheiden sich die erwarteten Bruttoerträge auf das riskante Papier aus der Sicht der informierten und aus der Sicht der nicht informierten Anleger in Periode  $t$  genau um den Betrag:

$$(3.7) \quad E[\tilde{V}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s}] - E[\tilde{V}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s-1}] \\ = \frac{\tilde{X}_{t+s} - \tilde{X}_{t+s-1}}{(R-1)R^{s-2}} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{t+s}}{(R-1)R^{s-2}},$$

der sich aus diesem Informationsvorsprung ergibt. Außerdem sind die informierten Anleger im Vorteil, weil die Varianz des Ertrages auf das riskante Papier aus ihrer Sicht geringer ist als aus der Sicht der nicht informierten Anleger. Es gilt nämlich:

$$(3.8) \quad \text{Var}[\tilde{V}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s-1}] - \text{Var}[\tilde{V}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s}] \\ = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(R-1)^2 R^{2(s-2)}} = R^2 \sigma_\delta^2.$$

Auch dieser Unterschied in der Varianz der Erträge liegt an der unterschiedlichen Kenntnis der beiden Gruppen über die Innovation  $\tilde{\varepsilon}_{t+s} = \tilde{X}_{t+s} - \tilde{X}_{t+s-1}$  in der systematischen Komponente des Dividendenprozesses, die in Periode  $t+1$  mit dem Gewicht  $1/(R-1)R^{s-2}$  in den Preis  $\tilde{p}_{t+1}^{**}$  eingehen wird.

Die Bedeutung dieses Informationsvorsprungs zeigt sich sehr deutlich, wenn man untersucht, welche Nettoerträge informierte und nicht informierte Anleger in einer Periode aus ihrer Investition in dem riskanten Papier erhalten. Wenn ein Anleger  $z_t^a$  Einheiten des riskanten Papiers zum Preis  $p_t$  kauft und den Bruttoertrag  $V_{t+1}$  erzielt, betragen die Opportunitätskosten dieser Anlage  $Rp_t z_t^a$ , da dem Anleger in dieser Höhe risikofreie Erträge entgehen. Der Nettoertrag der Investitionen beträgt daher  $\varphi_t^a = z_t^a (V_{t+1} - Rp_t)$ .

Im *Grossman/Stiglitz*-Gleichgewicht ergibt sich dieser Nettoertrag für alle Anleger als Realisierung der Zufallsvariablen:

$$(3.9) \quad \tilde{\varphi}_t^* = \tilde{z}_t^a (\tilde{V}_{t+1} - R\tilde{p}_t^*) = \bar{Z} (\sigma_\xi^2 + \sigma_\delta^2) \tilde{Z} + \xi_{t+1} + \frac{\tilde{\varepsilon}_{t+s+1}}{(R-1)R^{s-1}},$$

so daß der durchschnittliche Nettoertrag  $E \tilde{\varphi}_t^* = (\sigma_\xi^2 + \sigma_\delta^2) \bar{Z}^2$  gerade die Risikoprämie ist, die dem Anleger zusteht, weil er die Varianz  $\text{Var} \tilde{\varphi}_t^* = (\sigma_\xi^2 + \sigma_\delta^2) \bar{Z}^2$  auf sich nimmt.

Nimmt man dagegen an, daß die Anleger erst aus den Preisen tatsächlich beobachteter Transaktionen, d. h. aus vergangenen Preisen lernen, so ergibt sich der Nettoertrag  $\varphi_t^a$  im Gleichgewicht für informierte Anleger als Realisierung der Zufallsvariablen:

$$(3.10) \quad \tilde{\varphi}_t^{**I} = \frac{E [\tilde{V}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s}] - R\tilde{p}_t^{**}}{\text{Var} [\tilde{V}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s}]} (\tilde{V}_{t+1} - R\tilde{p}_t^{**}),$$

für nicht informierte Anleger dagegen als Realisierung der Zufallsvariablen:

$$(3.11) \quad \tilde{\varphi}_t^{**U} = \frac{E [\tilde{V}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s-1}] - R\tilde{p}_t^{**}}{\text{Var} [\tilde{V}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s-1}]} (\tilde{V}_{t+1} - R\tilde{p}_t^{**}).$$

Schreibt man  $\tilde{\delta}_t := \tilde{\varepsilon}_{t+s}/(R-1)R^{s-1}$ , so gilt im Gleichgewicht:

$$(3.12) \quad \tilde{\varphi}_t^{**I} = \frac{k\bar{Z} + (1-c)R\tilde{\delta}_t}{\sigma_\xi^2 + c^2\sigma_\delta^2} (k\bar{Z} + \tilde{\xi}_{t+1} + c\tilde{\delta}_{t+1} + (1-c)R\tilde{\delta}_t),$$

$$(3.13) \quad \tilde{\varphi}_t^{**U} = \frac{k\bar{Z} - cR\tilde{\delta}_t}{\sigma_\xi^2 + (c^2 + R^2)\sigma_\delta^2} (k\bar{Z} + \tilde{\xi}_{t+1} + c\tilde{\delta}_{t+1} + (1-c)R\tilde{\delta}_t),$$

und daher:

$$(3.14) \quad E \tilde{\varphi}_t^{**I} = \frac{k^2 \bar{Z}^2 + (1-c)^2 R^2 \sigma_\delta^2}{\sigma_\xi^2 + c^2 \sigma_\delta^2},$$

$$(3.15) \quad E \tilde{\varphi}_t^{**U} = \frac{k^2 \bar{Z}^2 - c(1-c)R^2 \sigma_\delta^2}{\sigma_\xi^2 + (c^2 + R^2)\sigma_\delta^2}.$$

Der Vergleich von (3.14) und (3.15) zeigt, daß informierte Anleger im Durchschnitt höhere Nettoerträge auf ihre Anlage in dem riskanten Papier bekommen. Dies liegt zum einen daran, daß sie die Risikoprämie  $k\bar{Z}$  je Einheit des riskanten Papiers besser ausnutzen, weil sie in Anbetracht ihrer geringeren Unsicherheit im Durchschnitt mehr Einheiten des riskanten Papiers kaufen. Zum anderen ist für informierte Anleger die Kovarianz zwischen der Nachfrage  $\tilde{z}_t^a$  und dem Nettoertrag pro Einheit,  $\tilde{V}_{t+1} - R\tilde{p}_t^{**}$ , positiv. Die Innovation  $\tilde{\varepsilon}_{t+s} = \tilde{X}_{t+s} - \tilde{X}_{t+s-1}$  schlägt sich in Periode  $t$  noch nicht voll im Preis nieder und geht daher

sowohl in die Nachfrage  $\tilde{z}_t^a$  wie in den Nettoertrag  $\tilde{V}_{t+1} - R\tilde{p}_t^{**}$  positiv ein. Die informierten Anleger verwenden ihren Informationsvorsprung hinsichtlich  $\tilde{\varepsilon}_{t+s}$  dazu, um das riskante Papier genau dann vermehrt nachzufragen, wenn  $\tilde{\varepsilon}_{t+s}$  positiv ist, und genau dann abzustoßen, wenn  $\tilde{\varepsilon}_{t+s}$  negativ ist. Bei den nicht informierten Anlegern dagegen geht  $\tilde{\varepsilon}_{t+s}$  negativ in die Nachfrage ein, weil die nicht informierten Anleger nur die unmittelbare Wirkung von  $\tilde{\varepsilon}_{t+s}$  auf den Preis  $\tilde{p}_t^{**}$  berücksichtigen und die Wirkung auf den Bruttoertrag  $\tilde{V}_{t+s}$  noch nicht erkennen. Für sie ist daher die Kovarianz zwischen Nachfrage und Nettoertrag pro Einheit negativ. Diese negative Kovarianz verringert den durchschnittlichen Nettoertrag  $E\tilde{\varphi}_t^{**U}$ . Der Vergleich der Nettoerträge  $\tilde{\varphi}_t^{I**}$  und  $\tilde{\varphi}_t^{U**}$  zeigt also unmittelbar, wie die informierten Anleger aus ihrer Information Vorteil ziehen können, wenn die nicht informierten Anleger in ihrer Erwartungsbildung nur die Information verwenden, die in den vergangenen Preisen, zu denen tatsächliche Transaktionen stattfanden, enthalten ist.

#### 4. Ein „großer“ Wertpapiermarkt in stetiger Zeit

Im weiteren Verlauf der Arbeit verwende ich die bisher gewonnenen Ergebnisse zur Analyse der *Kommunikation in einem Wettbewerbsmarkt*, d. h. einem Markt mit einer großen Zahl von Anlegern, in dem der einzelne Anleger so unbedeutend ist, daß er den Marktpreis nicht beeinflussen kann. In einem solchen Markt wird der, der als einzelner Information unmittelbar kauft, diese Information ausnutzen können, ohne den Preis zu beeinflussen, d. h. *bevor* die anderen Marktteilnehmer überhaupt eine Gelegenheit haben, seine Information aus dem Preis zu erschließen. Erst nach einiger Zeit, wenn genügend viele Anleger die Information unmittelbar erfahren haben, wird sie in den Preis eingehen, so daß dann alle anderen Marktteilnehmer sie ebenfalls erfahren können.

Um diese Art der Kommunikation über den Markt zu analysieren, benötigt man wieder ein dynamisches Modell. Das statische Modell von *Grossman* und *Stiglitz* eignet sich nur zur Analyse der Kommunikation von Information, die eine „große“ Menge von Marktteilnehmern vom Maß  $\lambda > 0$  gemeinsam kennen, nicht aber zur Analyse der Kommunikation von Information, die zunächst nur eine „kleine“ Menge vom Maß  $\lambda = 0$  kennt und die allmählich verbreitet wird. Im folgenden untersuche ich statt dessen einen Markt in stetiger Zeit mit folgender Eigenschaft: In jedem *Zeitpunkt* erhält eine „kleine“ Menge von Anlegern vom Maß Null Information und kann diese Information ausnutzen, ohne den Preis zu beeinflussen. In jedem *Zeitintervall* erhält eine

„große“ Menge von Anlegern von positivem Maß Information und beeinflusst den Preis.

Wie bisher betrachte ich einen Markt mit einem riskanten und einem risikofreien Papier. In einem „kleinen“ Zeitintervall  $[\bar{t}, \bar{t} + d\bar{t}]$  erbringt eine Einheit des risikofreien Papiers den konstanten Nettoertrag  $\bar{r}d\bar{t}$ .

Eine Einheit des riskanten Papiers erbringt die Dividende  $\int_{\bar{t}}^{\bar{t} + d\bar{t}} (d\bar{D})$ ,

wobei  $\bar{D}$  der stochastischen Differentialgleichung:

$$(4.1) \quad d\bar{D} = \bar{x}d\bar{t} + \bar{\sigma}_\varepsilon d\bar{\zeta}_\varepsilon$$

genügt. Die durchschnittliche Dividende pro Zeiteinheit,  $\bar{x}$ , genügt ihrerseits der stochastischen Differentialgleichung:

$$(4.2) \quad d\bar{x} = \bar{\sigma}_\varepsilon d\bar{\zeta}_\varepsilon .$$

Dabei sind  $\{\bar{\zeta}_\varepsilon\}$  und  $\{\bar{\zeta}_\varepsilon\}$  zwei stochastisch unabhängige Standard-Wiener-Prozesse<sup>7</sup>. Die Dividende folgt also wiederum einem Irrpfad, der durch weißes Rauschen überlagert wird.

Ein Anleger kann zum Zeitpunkt  $\bar{t}$  Information über die Realisierungen der systematischen Komponente  $\bar{x}(\cdot)$  des Dividendenprozesses im Zeitintervall  $[\bar{t}, \bar{t} + \bar{s}]$  erhalten. Dabei nehme ich an, daß für den einzelnen Anleger das Ereignis „Informiert Sein im Zeitintervall  $[\bar{t}, \bar{t} + \Delta]$ “ ein Poissons-Ereignis ist, dessen Wahrscheinlichkeit etwa proportional der Intervalllänge  $\Delta$  ist. Für den Markt als Ganzes folgt dann aus einer geeigneten Version des Gesetzes der großen Zahl, daß der Anteil der Anleger, die zu irgendeinem Zeitpunkt im Zeitintervall  $[\bar{t}, \bar{t} + \Delta]$  Information erhalten, ebenfalls proportional der Intervalllänge  $\Delta$  ist. In jedem Zeitpunkt erhält daher nur eine Menge von Anlegern vom Maß Null Information, in jedem Zeitintervall dagegen eine Menge von Anlegern von positivem Maß, so daß Information erst „mit der Zeit“ in den Preis eingehen sollte. Man würde vermuten, daß der Preis im Zeitpunkt  $\bar{t}$  noch nicht die neueste Information über  $\bar{x}(\bar{t} + \bar{s})$ , wohl aber die neueste Information von gestern,  $\bar{x}(\bar{t} + \bar{\tau})$ ,  $\bar{\tau} < \bar{s}$ , widerspiegelt.

Leider ist es nicht möglich, diesen Markt unmittelbar in stetiger Zeit zu analysieren, da der Begriff des Gleichgewichts in einem Markt mit

<sup>7</sup> Der stochastische Prozeß  $\{\bar{\zeta}(\bar{t})\}_{\bar{t} \in \mathbb{R}_+}$  ist ein Standard-Wiener-Prozeß, wenn für alle  $\bar{t}_1, \bar{t}_2$  die Differenz  $\bar{\zeta}(\bar{t}_1) - \bar{\zeta}(\bar{t}_2)$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz  $|\bar{t}_1 - \bar{t}_2|$  ist. Aus dieser Definition folgt insbesondere, daß für  $\bar{t}_1 < \bar{t}_2 \leq \bar{t}_3 < \bar{t}_4$  die Differenzen  $\bar{\zeta}(\bar{t}_2) - \bar{\zeta}(\bar{t}_1)$  und  $\bar{\zeta}(\bar{t}_3) - \bar{\zeta}(\bar{t}_4)$  stochastisch unabhängig sind.

einer großen Zahl, d. h. einem Kontinuum von Anlegern in stetiger Zeit nicht wohldefiniert ist. Die übliche Definition der Markträumung<sup>8</sup> läßt die Möglichkeit zu, daß die Allokation im temporären Gleichgewicht in einem Zeitpunkt für eine Nullmenge von Anlegern beliebig verändert wird. Diese Indeterminiertheit der temporären Gleichgewichtsallokation entspricht genau der Vorstellung, daß „kleine“ Mengen von Anlegern vom Maß Null ihre Pläne ändern können, ohne dadurch das Verhalten des Marktes insgesamt zu beeinflussen. In statischen oder diskreten dynamischen Modellen spielt diese Indeterminiertheit keine Rolle, weil sie insgesamt nie mehr als eine Nullmenge von Anlegern betrifft. In stetiger Zeit dagegen können Modifikationen der Gleichgewichtsallokationen für je eine Nullmenge von Anlegern in jedem Zeitpunkt letztlich *alle* Anleger betreffen, weil die überabzählbar vielen Nullmengen sich zu einer positiven Menge integrieren können. Damit die Folge von Gleichgewichtsallokationen dann nicht völlig beliebig wird, benötigt man in stetiger Zeit einen schärferen Gleichgewichtsbegriff, als er bislang zur Verfügung steht.

Um einen solchen schärferen Gleichgewichtsbegriff zu gewinnen, muß man zunächst die zweifache Abstraktion der stetigen Zeit und des Kontinuums von Anlegern aufgeben und die Rolle einer „kleinen“ Menge von Anlegern in einem „kleinen“ Zeitintervall genauer untersuchen. In diesem Sinne werde ich das Modell in stetiger Zeit durch eine Folge von Modellen in diskreter Zeit mit abnehmenden „Periodenlängen“ approximieren. Man gewinnt solche diskreten Modelle aus dem zugrundeliegenden stetigen Modell, indem man in regelmäßigen Zeitabständen Momentaufnahmen vom Marktgeschehen macht und nur die Folge von Momentaufnahmen betrachtet. Je schneller die Momentaufnahmen aufeinanderfolgen, desto besser sollte die Approximation zum Verhalten des Marktes in stetiger Zeit sein.

Bei der Analyse der Modelle in diskreter Zeit greife ich auf die oben in Teil 3 behandelten Ergebnisse zurück. Für eine gegebene Periodenlänge  $h > 0$  wird ein diskretes Modell des dort behandelten Typs wie folgt spezifiziert:

(h. a) Der Bruttoertrag auf das risikofreie Papier sei  $R_h = e^{\bar{r}h}$  pro Periode.

(h. b) Der Dividendenprozeß sei:

$$\tilde{D}_t^h = \tilde{X}_t^h + \tilde{\xi}_t^h ,$$

$$\tilde{X}_t^h = h \bar{x}(ht) ,$$

$$\tilde{\xi}_t^h = \bar{\sigma}_\xi [\bar{\xi}_\xi^h(ht) - \bar{\xi}_\xi^h(h(t-1))] ,$$

<sup>8</sup> Vgl. z. B. Hildenbrand (1974), 129.



$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^h &= \tilde{X}_t^h + \tilde{\varepsilon}_t^h \\ \tilde{\varepsilon}_t^h &= h \bar{\sigma}_\varepsilon [\bar{\zeta}_\varepsilon(ht) - \bar{\zeta}_\varepsilon(h(t-1))] . \end{aligned}$$

(h. c) In jeder Periode  $t$  wird ein Anteil  $\lambda_h = \bar{\lambda} h$  aller Anleger über die Realisierungen der Zufallsvariablen  $X_{t+1}, \dots, \tilde{X}_{t+s_h}$  informiert. Dabei ist  $s_h = [\bar{s}/h]$  die größte ganze Zahl, die nicht größer als  $\bar{s}/h$  ist.

(h. d) Das Angebot pro Anleger,  $\bar{Z}_h = \bar{Z}$ , ist unabhängig von  $h$ .

Da  $\{\bar{\zeta}_\xi\}$  und  $\{\bar{\zeta}_\varepsilon\}$  annahmegemäß zwei unabhängige Wiener-Prozesse sind, ergibt sich unmittelbar aus (h. b), daß die Zufallsvariablen  $\tilde{\xi}_t^h, \varepsilon_t^h, t = 0, 1, 2, \dots$ , stochastisch unabhängig und normalverteilt sind mit  $E \tilde{\xi}_t^h = E \varepsilon_t^h = 0$  und:

$$(4.3) \quad \sigma_{\xi^h}^2 = E [(\bar{\zeta}_\xi(ht) - \bar{\zeta}_\xi(h(t-1)))^2] \bar{\sigma}_\xi^2 = h \bar{\sigma}_\xi^2 ,$$

$$(4.4) \quad \sigma_{\varepsilon^h}^2 = h^2 E [(\bar{\zeta}_\varepsilon(ht) - \bar{\zeta}_\varepsilon(h(t-1)))^2] \bar{\sigma}_\varepsilon^2 = h^3 \bar{\sigma}_\varepsilon^2 .$$

Das Modell (h. a) – (h. d) erfüllt somit die in Teil 3 gemachten Annahmen.

Das Gleichgewicht mit rationalen Erwartungen hängt nun wieder davon ab, ob die nicht informierten Anleger in einer Periode Information aus dem Preis der laufenden Periode oder nur aus den Preisen vergangener Perioden ziehen. Unter der *Grossman-Stiglitz*-Annahme, daß alle Anleger ohne Verzögerung Information aus dem Preis ziehen, hat man gemäß (3.4) den Gleichgewichtspreis:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \tilde{p}_t^{h*} &= \sum_{i=1}^{s_h-1} h e^{-\bar{r}ih} \bar{x}(h(t-i)) + \frac{h e^{-\bar{r}(s_h-1)h}}{e^{\bar{r}h} - 1} \bar{x}(h(t+s_h)) \\ &\quad - \bar{Z} \frac{h}{e^{\bar{r}h} - 1} (\bar{\sigma}_\xi^2 + \bar{\sigma}_{\delta h}^2) , \end{aligned}$$

wobei

$$\bar{\sigma}_{\delta h}^2 := h^2 \bar{\sigma}_\varepsilon^2 / (e^{\bar{r}h} - 1)^2 e^{2\bar{r}(s_h-1)} .$$

Im *Grossman-Stiglitz*-Gleichgewicht wird die Information der informierten Anleger unmittelbar durch den Preis übermittelt, auch wenn die Periode sehr kurz und der Anteil der informierten Anleger sehr klein ist. Es ist daher zu bezweifeln, daß dieser Ansatz eine geeignete Approximation für die Situation in stetiger Zeit liefert, wenn die jeweils neueste Information nur einer Nullmenge von Anlegern bekannt ist, die den Preis nicht beeinflussen kann. Gerade hier ist die alter-

native Annahme vorzuziehen, wonach die Anleger nur aus vergangenen Preisen, zu denen tatsächliche Transaktionen stattgefunden haben, Information ziehen. Unter dieser Annahme hat man nach (3.6) den Gleichgewichtspreis:

$$(4.6) \quad \tilde{p}_t^{h^{**}} = \sum_{i=1}^{s_h-2} h e^{-\bar{r}ih} \bar{x}(h(t+i)) + (1-c_h) \frac{h e^{-\bar{r}(s_h-2)h}}{e^{\bar{r}h} - 1} \bar{x}(h(t+s_h)) \\ + c_h e^{-\bar{r}(s_h-1)h} \left[ h\bar{x}(h(t+s_h-1)) + \frac{h}{e^{\bar{r}h} - 1} \bar{x}(h(t+s_h)) \right] \\ - \bar{Z} \frac{k_h}{e^{\bar{r}h} - 1},$$

wobei

$$c_h = k_h \bar{\lambda} / (\bar{\sigma}_\xi^2 + c_h^2 \bar{\sigma}_{\delta h}^2), \quad \bar{\sigma}_{\delta h}^2 = h^2 \bar{\sigma}_\varepsilon^2 / (e^{\bar{r}h} - 1)^2 e^{2\bar{r}(s_h-1)h}$$

und

$$k_h = h / \left[ \frac{\bar{\lambda} h}{\bar{\sigma}_\xi^2 + c_h^2 \bar{\sigma}_{\delta h}^2} + \frac{1 - \bar{\lambda} h}{\bar{\sigma}_\xi^2 + (c_h^2 + e^{2\bar{r}h}) \bar{\sigma}_{\delta h}^2} \right].$$

Die diskreten Preisprozesse  $\{\tilde{p}_t^{h^*}\}$  und  $\{\tilde{p}_t^{h^{**}}\}$  lassen sich als Prozesse in stetiger Zeit interpretieren, wenn man die Periode  $t$  mit dem Zeitintervall  $[ht, h(t+1)]$  identifiziert und annimmt, daß die Preise in diesem Intervall die konstanten Werte  $\tilde{p}_t^{h^*}$  bzw.  $\tilde{p}_t^{h^{**}}$  annehmen. In stetiger Zeit erhält man dann die Prozesse  $\{\bar{p}^{h^*}(\bar{t})\}$  und  $\{\bar{p}^{h^{**}}(\bar{t})\}$ , wobei:

$$(4.7) \quad \bar{p}^{h^*}(\bar{t}) = \tilde{p}_{[\bar{t}/h]}^{h^*},$$

$$(4.8) \quad \bar{p}^{h^{**}}(\bar{t}) = \tilde{p}_{[\bar{t}/h]}^{h^{**}}$$

für alle  $\bar{t} \in \mathbf{R}_+$ . Dabei ist  $[\bar{t}/h]$  die größte ganze Zahl, die  $\bar{t}/h$  nicht übersteigt.

Von besonderem Interesse ist nun das Verhalten der Gleichgewichtspreise bei kleiner Periodenlänge. Man berechnet unmittelbar, daß die Differenz zwischen  $\bar{p}^{h^*}(\bar{t})$  und  $\bar{p}^{h^{**}}(\bar{t})$  mit der Periodenlänge  $h$  gegen Null geht und daß *beide* Preisprozesse mit Wahrscheinlichkeit Eins gegen den Grenzprozeß:

$$(4.9) \quad \bar{p}(\bar{t}) = \int_0^{\bar{s}} e^{-\bar{r}\bar{\tau}} \bar{x}(\bar{t} + \bar{\tau}) d\bar{\tau} + \frac{e^{-\bar{r}\bar{s}}}{\bar{r}} \bar{x}(\bar{t} + \bar{s}) - \frac{\bar{Z}}{\bar{r}} (\bar{\sigma}_\xi^2 + \bar{\sigma}_\delta^2)$$

konvergieren, wobei  $\bar{\sigma}_\delta^2 = \bar{\sigma}_\varepsilon^2 / \bar{r}^2 e^{2\bar{r}\bar{s}}$ . Auch wenn die nicht informierten Anleger nur aus den vergangenen Preisen Information ziehen, ist der

Markt bei kleiner Periodenlänge in dem Sinne *annähernd informationseffizient*, daß der Preis dem *Grossman-Stiglitz-Preis* nahekommt.

Dieses Ergebnis beruht auf der Stetigkeit der *Wiener-Prozesse* (vgl. *Doob* (1953) S. 393): Die Differenz zwischen den Preisen  $\bar{p}^{h*}(\bar{t})$  und  $\bar{p}^{h**}(\bar{t})$  beträgt

$$(1 - c_h) \frac{h e^{-\bar{r}(s_h - 1)h}}{e^{\bar{r}h} - 1} [\bar{x}(h([\bar{t}/h] + s_h)) - \bar{x}(h([\bar{t}/h] + s_h - 1))] - \bar{Z} \frac{h}{e^{\bar{r}h} - 1} (\bar{\sigma}_\xi^2 + \bar{\sigma}_{\delta h}^2 - k_h/h) .$$

Man hat unmittelbar:  $\lim_{h \rightarrow 0} (\bar{\sigma}_\xi^2 + \bar{\sigma}_{\delta h}^2 - k_h/h) = 0$  und daher:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\bar{p}^{h*}(\bar{t}) - \bar{p}^{h**}(\bar{t})] = \frac{e^{-\bar{r}h}}{\bar{r}} \lim_{h \rightarrow 0} [\bar{x}(h([\bar{t}/h] + s_h)) - \bar{x}(h([\bar{t}/h] + s_h - 1))] .$$

Die Stetigkeit der Realisierungen des *Wiener-Prozesses* bedeutet nun, daß die Differenz  $\bar{x}(h([\bar{t}/h] + s_h)) - \bar{x}(h([\bar{t}/h] + s_h - 1))$  mit der Periodenlänge  $h$  fast sicher gegen Null geht. In einer kurzen Periode macht ein stetiger Dividendenprozeß keine großen Sprünge. Daher muß dann auch die Differenz  $\bar{p}^{h*}(\bar{t}) - \bar{p}^{h**}(\bar{t})$  gegen Null gehen. Diese Differenz ist ja darauf zurückzuführen, daß im Gleichgewicht (4.6) bzw. (3.6) die nicht informierten Anleger der Periode  $t$  die neueste Information über die Realisierung der Zufallsvariablen:

$$\frac{\tilde{\epsilon}_{t+s_h}^h}{h} = \bar{x}(h(t + s_h)) - \bar{x}(h(t + s_h - 1))$$

noch nicht verwenden. Wenn die Periode kurz ist, ist diese Information unbedeutend, d. h. annähernd Null, weil in einem stetigen Prozeß in einer kurzen Periode nicht viel passieren kann. Die nicht informierten Anleger der Periode  $t$ , die aus den vergangenen Preisen alles außer der allerneuesten Information kennen, sind dann in Wirklichkeit beinahe vollkommen informiert. Wenn die Periode kurz ist, ist der Markt daher beinahe informationseffizient.

Gleichwohl bleibt der Nettoertrag der Information in einer Periode von Null weg beschränkt. Um dies zu zeigen, untersucht man wieder die Nettoerträge auf das riskante Papier, die informierte und nicht informierte Anleger der Periode  $t$  erhalten. Wenn alle Anleger nur aus vergangenen und nicht gegenwärtigen Preisen lernen, betragen diese Nettoerträge im Modell (h. a) – (h. d) gemäß (3.12) und (3.13):

$$(4.10) \quad \tilde{\varphi}_t^{h**I} = \frac{k_h \bar{Z} + (1 - c_h) e^{\bar{r}h} \tilde{\delta}_t^h}{h (\bar{\sigma}_\xi^2 + c_h^2 \bar{\sigma}_{\delta h}^2)} (k_h \bar{Z} + \tilde{\xi}_{t+1}^h + c_h \tilde{\delta}_{t+1}^h + (1 - c_h) e^{\bar{r}h} \tilde{\delta}_t^h),$$

$$(4.11) \quad \tilde{\varphi}_t^{h**U} = \frac{k_h \bar{Z} - c_h e^{\bar{r}h} \tilde{\delta}_t^h}{h (\bar{\sigma}_\xi^2 + c_h^2 + e^{2\bar{r}h} \bar{\sigma}_{\delta}^2)} (k_h \bar{Z} + \tilde{\xi}_{t+1}^h + c_h \tilde{\delta}_{t+1}^h + (1 - c_h) e^{\bar{r}h} \tilde{\delta}_t^h),$$

wobei wiederum  $\tilde{\delta}_t^h = \tilde{\varepsilon}_{t+s_h}^h / (e^{\bar{r}h} - 1) e^{r(s_h - 1)h}$ ,

Da die Konstanten  $c_h$  und  $k_h$  ungefähr proportional zur Periodenlänge  $h$  sind, beobachtet man zunächst, daß der Nettoertrag der nicht informierten Anleger,  $\tilde{\varphi}_{[t/h]}^{h**U}$ , mit der Periodenlänge  $h$  gegen Null konvergiert. Der nicht informierte Anleger kann in einer kurzen Anlageperiode, z. B. von einer Minute, keine großen Nettoerträge erzielen.

Demgegenüber konvergiert der Nettoertrag der informierten Anleger,  $\tilde{\varphi}_{[t/h]}^{h**I}$ , gegen eine Zufallsvariable  $\tilde{\varphi}^{**}$  der Form

$$(4.12) \quad \tilde{\varphi}^{**} = \frac{\tilde{\chi} (\tilde{\chi} + \tilde{\psi})}{\bar{\sigma}_\xi^2},$$

wobei  $\tilde{\chi}$ ,  $\tilde{\psi}$  zwei stochastisch unabhängige und normalverteilte Zufallsvariable sind mit  $E \tilde{\chi} = E \tilde{\psi} = 0$ ,  $E \tilde{\chi}^2 = \bar{\sigma}_\delta^2 = \bar{\sigma}_\varepsilon^2 / \bar{r}^2 e^{2\bar{r}s}$  und  $E \tilde{\psi}^2 = \bar{\sigma}_\xi^2$ . Insbesondere konvergiert der Erwartungswert des Nettoertrages der informierten Anleger gegen  $E \tilde{\varphi}^{**} = \bar{\sigma}_\delta^2 / \bar{\sigma}_\xi^2 > 0$ . Ein informierter Anleger kann in einer Periode auch dann signifikante Erträge erzielen, wenn die Periode sehr kurz ist. Die Differenz  $\tilde{\varphi}_{[t/h]}^{h**I} - \tilde{\varphi}_{[t/h]}^{h**U}$  als Nettoertrag der Information ist somit von Null weg beschränkt, auch wenn die Periode kurz ist und der Markt der vollkommenen Informationseffizienz nahekkommt.

Dieses Ergebnis ist insofern überraschend, als der Informationsvorsprung der informierten Anleger mit der Periodenlänge gegen Null geht. Dieser Effekt wird aber dadurch kompensiert, daß die informierten Anleger ihren Informationsvorsprung besser ausnutzen, wenn die Periode kurz ist. Dies ist ihnen möglich, weil mit der Periodenlänge  $h$  auch ihre Restunsicherheit über den Bruttoertrag  $\tilde{V}_{[t/h]+1}^h$  gegen Null geht. Die informierten Anleger kennen in Periode  $[t/h]$  noch nicht die Komponente  $\tilde{\xi}_{[t/h]+1}^h + c_h \tilde{\delta}_{[t/h]+1}^h$  des Bruttoertrags  $\tilde{V}_{[t/h]+1}^h$ . Die Varianz dieses unbekanntes Terms beträgt  $h (\bar{\sigma}_\xi^2 + c_h^2 \bar{\sigma}_{\delta h}^2)$  und geht mit der Periodenlänge  $h$  gegen Null. Da nämlich Preise und Dividenden in einer kurzen Periode keine großen Sprünge machen, haben die Anleger auch keine — angenehmen oder unangenehmen — Überraschungen zu befürchten. Diese Verringerung der Restunsicherheit führt dazu,

daß die informierten Anleger auf ihre Information immer stärker reagieren. Sie sind bereit, auf eine gegebene Information hin immer größere Posten des riskanten Papiers zu kaufen oder zu verkaufen, weil sie das Restrisiko je Einheit des Papiers immer niedriger einschätzen.

Die Verringerung der Periodenlänge  $h$  wirkt sich sowohl auf den Zähler wie auf den Nenner der Nachfrage  $z_t^a$  eines informierten Anlegers in (3.1) bzw. dem Bruch in (4.10) aus. Einerseits geht die Informationsvariable  $\tilde{\delta}_t^h = \tilde{\varepsilon}_{t+sh}^h / (e^{\tilde{r}h} - 1) e^{\tilde{r}(sh-1)}$  fast sicher mit  $h$  gegen Null. Es wird also immer weniger wahrscheinlich, daß die Realisierung dieser Variablen einen gegebenen Wert, z. B. von Eins, übersteigt. Wenn die Variable  $\tilde{\delta}_t^h$  aber einen solchen gegebenen Wert übersteigt, dann zieht der informierte Anleger einen immer größeren Vorteil daraus, weil die Varianz im Nenner von  $\tilde{z}_t^a$  ebenfalls mit  $h$  gegen Null geht. Die Varianz der Nachfrage  $\tilde{z}_t^a$  selbst ist für einen informierten Anleger dann ungefähr umgekehrt proportional zu  $h$  und geht gegen Unendlich, wenn  $h$  gegen Null geht. Aus diesem Grunde bleibt die Kovarianz zwischen der Nachfrage  $\tilde{z}_t^a$  und dem Nettoertrag  $\tilde{V}_{t+1}^h - e^{\tilde{r}h} \tilde{p}_t^{h**}$  in (3.12) bzw. (4.10) von Null weg beschränkt und geht in die Zufallsvariable  $\tilde{\varphi}^{**}$  in (4.12) ein.

In einer kurzen Periode kommt dieser Nettoertrag allerdings nur wenigen Anlegern zugute. Da der Anteil der informierten Anleger proportional zur Periodenlänge ist, konvergiert der *aggregierte* Nettoertrag  $\bar{\lambda} h \tilde{\varphi}_{[t/h]}^{h**}$  mit der Periodenlänge  $h$  gegen Null. Daher konvergiert auch die Ertragsminderung für die nicht informierten Anleger gegen Null. Für den Markt als Ganzes fallen die Erträge der informierten Anleger nicht ins Gewicht. Formal äußert sich dies darin, daß das Gewicht  $c_h$ , mit dem die informierten Anleger den Preis  $\tilde{p}_t^{h**}$  in (4.6) beeinflussen, mit  $h$  gegen Null geht.

Das Gleichgewicht (4.6) mit den Nettoerträgen (4.10) und (4.11) erscheint nunmehr als die natürliche diskrete Approximation für den Markt in stetiger Zeit, in dem die Nullmenge von Anlegern, die in einem Zeitpunkt informiert wird, ihren Informationsvorsprung ausnutzen kann, ohne den Preis zu beeinflussen und dadurch ihre Information preiszugeben.

### 5. Approximative Informationseffizienz und der Anreiz zur Beschaffung von Information

Die vorstehenden Ergebnisse lassen vermuten, daß die Anleger im Gleichgewicht (4.6) bereit sind, Ressourcen zur Beschaffung von Information aufzuwenden. Diese Vermutung wird im folgenden bestätigt. Insbesondere soll gezeigt werden, daß die Ressourcen, die im Gleichgewicht zur Beschaffung von Information aufgewandt werden, positiv und von Null weg beschränkt sind, auch wenn die Periode kurz und der Markt annähernd informationseffizient ist. Damit wird die Behauptung von *Grossman* und *Stiglitz* widerlegt, daß der Markt auch nicht annähernd informationseffizient sein kann, wenn die Beschaffung von Information Kosten verursacht.

Für den einzelnen Anleger ist der Empfang von Information ein zufälliges Ereignis, das einer Poisson-Verteilung unterliegt. Die Wahrscheinlichkeit, daß man in einem Zeitintervall  $[\bar{t}, \bar{t} + \Delta)$  mindestens einmal informiert wird, ist also ungefähr proportional der Intervalllänge  $\Delta$ . Ich nehme nun an, daß der Anleger durch die Aufwendung von Ressourcen die durchschnittliche Häufigkeit, mit der er informiert wird, erhöhen kann. Er kann allerdings nicht sicherstellen, daß er in einer gegebenen Periode mit Sicherheit informiert wird.

Diese Spezifizierung entspricht der makroskopischen Hypothese, daß der Anteil der Anleger, die in einem gegebenen Zeitintervall mindestens einmal informiert werden, etwa proportional der Länge des Zeitintervalls ist. Nimmt man an, daß eine geeignete Version des Gesetzes der großen Zahlen gilt, so folgt die Gültigkeit dieser makroskopischen Hypothese unmittelbar aus der Poisson-Annahme<sup>9</sup>.

Es fragt sich nun, wieviel ein Anleger ausgeben würde, um mit der durchschnittlichen Poisson-Häufigkeit  $\bar{\lambda}$  Information zu erhalten. Die Beschaffung von Information ist dabei selbst eine riskante Investition. Mit einer durchschnittlichen Poisson-Häufigkeit  $\bar{\lambda}$  erhält man den zufälligen Nettoertrag  $\tilde{\varphi}_{[\bar{t}/h]}^{h^{**}I}$  anstelle des Nettoertrages  $\tilde{\varphi}_{[\bar{t}/h]}^{h^{**}U}$  auf die Anlage in dem riskanten Papier. Im vorhinein weiß man weder, wie oft

<sup>9</sup> Demgegenüber ist die makroskopische Hypothese *unvereinbar* mit dem Ansatz von *Grossman* und *Stiglitz*, wobei ein Anleger durch die Investition  $c > 0$  sicherstellen kann, daß er in einer bestimmten Periode Information erhält. Bei diesem Ansatz muß der einzelne Anleger entscheiden, ob es sich lohnt, für die Kosten  $c > 0$  den zufälligen Ertrag  $\tilde{\varphi}_i^{h^{**}U} \approx 0$  durch den zufälligen Ertrag  $\tilde{\varphi}_i^{h^{**}I} \approx \tilde{\varphi}^{**}$  zu ersetzen. Wenn  $h$  klein ist, kann man zeigen, daß das Ergebnis dieser Entscheidung weitgehend unabhängig von  $h$  ist. Dann ist es aber nicht möglich, daß der Anteil der informierten Anleger in einer Periode, d. h. der Anteil der Anleger, die in dieser Periode Ressourcen für die Beschaffung von Informationen aufwenden, proportional der Periodenlänge  $h$  ist.

man tatsächlich informiert wird, noch kennt man die Realisierungen der Zufallsvariablen  $\tilde{\varphi}_{[i/h]}^{h***I}$  und  $\tilde{\varphi}_{[i/h]}^{h***U}$ , die den Ertrag der Information im Einzelfall bestimmen.

Die Bereitschaft des Anlegers, für die Beschaffung von Information Ressourcen aufzuwenden, hängt daher ganz wesentlich auch von seiner Einstellung zum Risiko ab. Eine genaue Analyse muß demnach explizit auf die Nutzenmaximierung des Anlegers eingehen. Dabei ist im Rahmen unserer Analyse darauf zu achten, daß die Einstellung des Anlegers zum Risiko bei der Beschaffung von Information nicht unvereinbar ist mit der Einstellung zum Risiko, die implizit in der Mittelwert-Varianz-Nachfrage (3.1) nach dem riskanten Wertpapier zum Ausdruck kommt.

Allgemein läßt sich das Entscheidungsproblem des Anlegers in einem diskreten Modell mit der Periodenlänge  $h$  wie folgt skizzieren. Der Anleger lebt von Periode  $t = [t/h]$  bis Periode  $T = [T/h]$ . In dieser Zeit zieht er Nutzen aus seinem Konsum  $c_\tau^a$  in den Perioden  $\tau = t, t + 1, \dots, T - 1$  und aus dem Vermögen  $w_T^a$ , das er in Periode  $T$  hinterläßt. Am Beginn der Perioden  $\tau = t, t + 1, \dots, T - 1$  hat der Anleger jeweils ein Anfangsvermögen  $w_\tau^a$ . Dieses Anfangsvermögen finanziert den Konsum  $c_\tau^a$ , die risikofreie Anlage  $v_\tau^a$  und die Nachfrage nach dem riskanten Papier  $z_\tau^a$  gemäß der Budgetrestriktion:

$$(5.1) \quad c_\tau^a + v_\tau^a + p_\tau^{**} z_\tau^a = w_\tau^a .$$

Das Anfangsvermögen  $w_\tau^a$  ist exogen vorgegeben. Das Anfangsvermögen  $w_{\tau+1}^a$  am Beginn von Periode  $\tau + 1$  besteht aus den Bruttoerträgen auf das Portefeuille  $(v_\tau^a, z_\tau^a)$ :

$$(5.2) \quad w_{\tau+1}^a = e^{\bar{r}h} v_\tau^a + (D_{\tau+1}^h + p_{\tau+1}^{h**}) z_\tau^a ,$$

für  $\tau = t, t + 1, \dots, T - 1$ . Die Dividenden  $D_\tau^h$  und die Preise  $p_\tau^{h**}$  ergeben sich als Realisierungen der stochastischen Prozesse  $\{\tilde{D}_\tau^h\}, \{\tilde{p}_\tau^{h**}\}$ , die der Anleger als gegeben ansieht.

Bei gegebener Informationshäufigkeit  $\bar{\lambda}$  wählt der Anleger eine Konsum-Anlage-Strategie  $\{\tilde{c}_\tau^a, \tilde{v}_\tau^a, \tilde{z}_\tau^a, \tilde{w}_{\tau+1}^a\}_{\tau=1}^{T-1}$ , d. h. einen Plan, der für jede Periode  $\tau$  seinen Konsum und sein Portefeuille in Abhängigkeit von der Information bestimmt, die er in Periode  $\tau$  haben wird. Sein Ziel ist es, den abdiskontierten erwarteten Nutzen aus seinem Konsum in den Perioden  $\tau = t, t + 1, \dots, T - 1$  und aus seinem Vermögen in Periode  $T$ ,

$$(5.3) \quad E \left[ \sum_{\tau=t}^{T-1} e^{-\bar{e}h(\tau-t)} u^a(\tilde{c}_\tau^a) h + e^{-\bar{e}h(T-t)} B^a h(\tilde{w}_T^a) \right] ,$$

zu maximieren. Die Realisierungen seiner Konsum-Anlage-Strategie müssen dabei die Budgetrestriktionen (5.1) und (5.2) mit Wahrscheinlichkeit Eins erfüllen.

Das Ergebnis dieser Nutzenmaximierung hängt von der Informationshäufigkeit  $\bar{\lambda}$  und vom Anfangsvermögen  $w_t^a$  des Anlegers ab. Je größer  $\bar{\lambda}$  ist, d. h. je häufiger der Anleger im Durchschnitt informiert wird, desto größer ist der erwartete Nutzen (5.3), den der Anleger aus einer optimalen Konsum-Anlage-Strategie erhält. Der Anleger muß sich dann fragen, wieviel eine Erhöhung von  $\bar{\lambda}$  ihm wert wäre, d. h. welche Senkung seines Anfangsvermögens  $w_t^a$  er in Kauf nehmen würde, um häufiger informiert zu werden.

Als Beispiel betrachte ich die Nutzenfunktionen:

$$(5.4) \quad u^a(c) = -e^{-c\bar{r}} ; \quad B^{ah}(w) = -e^{-w} ,$$

bei denen der Anleger konstante absolute Risikoaversion hat. Für diese Nutzenspezifizierung kann man zeigen<sup>10</sup>, daß die Mittelwert-Varianz-Nachfragen (3.1) zu einer annähernd optimalen Konsum-Anlage-Strategie gehören, wenn die Periodenlänge  $h$  hinreichend klein ist. Bei hinreichend kleiner Periodenlänge kann man ferner zeigen, daß ein Informationsempfang mit der Poisson-Häufigkeit  $\bar{\lambda}$  im Zeitintervall  $[\bar{t}, \bar{T}]$  den Wert des erwarteten Nutzens (5.3) bei einer optimalen Konsum-Anlage-Strategie annähernd um den gleichen Betrag erhöht wie ein Anstieg des Anfangsvermögens  $w_t^a$  um den Betrag:

$$(5.5) \quad \Delta w^a(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \frac{1 - e^{-\bar{r}(\bar{T} - \bar{t})}}{\bar{r}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_\xi^2}{\bar{\sigma}_\xi^2 + \bar{\sigma}_\delta^2}} \right] .$$

Daher wird der Anleger bereit sein, annähernd bis zu  $\Delta w^a(\bar{\lambda})$  Einheiten seines Anfangsvermögens aufzugeben, um im Zeitintervall  $[\bar{t}, \bar{T}]$  mit der Poisson-Häufigkeit  $\bar{\lambda}$  Information zu erhalten. Dieser Betrag ist positiv; er ist um so größer, je größer der Koeffizient  $\frac{\bar{\sigma}_\delta^2}{\bar{\sigma}_\xi^2}$  ist, der nach (4.12) den Grenzwert  $E\tilde{\varphi}^{**}$  für den erwarteten Nettoertrag eines informierten Anlegers in einer Periode angibt.

Die Kosten der Informationsbeschaffung werden wie folgt spezifiziert. Der Anleger erhält Information im Zeitintervall  $[\bar{t}, \bar{T}]$  mit der Poisson-Häufigkeit  $\bar{\lambda}$ , wenn er in diesem Zeitintervall den konstanten Strom  $\Gamma(\bar{\lambda})$  pro Zeiteinheit für Information aufwendet. Im Zeitpunkt  $\bar{t}$  hat dieser Strom einen Gegenwartswert von  $\Gamma(\lambda) (1 - e^{-\bar{r}(\bar{T} - \bar{t})})/\bar{r}$ .

<sup>10</sup> Die folgenden Ergebnisse werden im einzelnen in Hellwig (1981 b) bewiesen.



Der Anleger vergleicht Kosten und Nutzen der Information. Einerseits erhöht der Erhalt von Information mit der Poisson-Häufigkeit  $\bar{\lambda}$  seinen erwarteten Nutzen ungefähr um den gleichen Betrag wie eine Vermögenserhöhung um  $\Delta w^a(\bar{\lambda})$ . Andererseits müssen  $\Gamma(\bar{\lambda}) (1 - e^{-\bar{r}(\bar{T}-\bar{t})})/\bar{r}$  Einheiten seines Anfangsvermögens abgezweigt werden, um die Kosten dieser Information zu decken. Bei kleiner Periodenlänge  $h$  ist dann derjenige Wert von  $\bar{\lambda}$  annähernd optimal, für den die Differenz:

$$(5.6) \quad \Delta w^a(\bar{\lambda}) - \Gamma(\bar{\lambda}) \frac{1 - e^{-\bar{r}(\bar{T}-\bar{t})}}{\bar{r}} = \left[ 1 - \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_\xi^2}{\bar{\sigma}_\xi^2 + \bar{\sigma}_\delta^2}} - \Gamma(\bar{\lambda}) \right] \frac{1 - e^{-\bar{r}(\bar{T}-\bar{t})}}{\bar{r}}$$

ein Maximum erreicht.

Unterstellt man, daß die Kostenfunktion  $\Gamma$  konvex und stetig differenzierbar ist mit  $\Gamma'(0) = 0$  und  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow \infty} \Gamma'(\bar{\lambda}) = \infty$ , so ergibt sich die Lösung dieses Maximierungsproblems unmittelbar aus der Bedingung erster Ordnung:

$$(5.7) \quad \Gamma'(\bar{\lambda}^*) = 1 - \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_\xi^2}{\bar{\sigma}_\xi^2 + \bar{\sigma}_\delta^2}},$$

so daß:

$$(5.8) \quad \bar{\lambda}^* = (\Gamma')^{-1} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_\xi^2}{\bar{\sigma}_\xi^2 + \bar{\sigma}_\delta^2}} \right) > 0.$$

Im Falle der quadratischen Kostenfunktion  $\Gamma(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2/2$  hat man beispielsweise:

$$\bar{\lambda}^* = 1 - \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_\xi^2}{\bar{\sigma}_\xi^2 + \bar{\sigma}_\delta^2}}.$$

Wenn die Periodenlänge  $h$  klein ist, gibt der Anleger ungefähr den Betrag  $\Gamma(\bar{\lambda}^*)$  pro Zeiteinheit aus, um mit der gewünschten Häufigkeit  $\bar{\lambda}^*$  Information zu erhalten. Dabei hängen  $\Gamma(\bar{\lambda}^*)$  und  $\bar{\lambda}^*$  gemäß (5.8) von der Kostenfunktion  $\Gamma$  und dem Parameter  $E\tilde{\varphi}^{**} = \bar{\sigma}_\delta^2/\bar{\sigma}_\xi^2$  für den erwarteten Nettoertrag der informierten Anleger in einer Periode ab. Im Bevölkerungsquerschnitt wird aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen in einer Periode ein Anteil  $\bar{\lambda}^* h$  der Bevölkerung Information erhalten. Der Anteil  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^*$  gemäß (5.6) und der dazugehörige Preisprozess  $\{\tilde{p}^{h**}\}$  gemäß (4.6) ergeben dann annähernd ein Gleichgewicht bei Berücksichtigung der Entscheidung über die Beschaffung von Infor-

mation. Wenn die Periodenlänge  $h$  klein ist, ist der Markt in diesem Gleichgewicht annähernd informationseffizient; gleichwohl wendet jeder Anleger ungefähr die Ressourcen  $\Gamma(\lambda^*) > 0$  pro Zeiteinheit zur Beschaffung von Information auf. Dieses Ergebnis widerlegt die These von *Grossman* und *Stiglitz*, wonach positive Kosten der Informationsbeschaffung selbst approximative Informationseffizienz ausschließen.

### Zusammenfassung

Die Arbeit gibt einen Überblick über einige Ergebnisse zur Informations-effizienz eines Wertpapiermarktes, wenn Erwartungen auf *vergangene*, nicht aber auf laufende Preise konditioniert werden: 1) Der Markt ist *nicht vollkommen informationseffizient*, weil in jeder Periode die jeweils neueste Information schon im Marktpreis enthalten, von den Anlegern aber noch nicht ausgenutzt wird. 2) Wenn die „Periodenlänge“ klein ist, ist der Markt *beinahe informationseffizient*, da der Informationsvorsprung der informierten Anleger in jeder Periode klein ist. 3) Unabhängig von der Periodenlänge sind der Ertrag der Information und der Anreiz zur Beschaffung von Information von Null weg beschränkt. Im Gleichgewicht werden positive Ressourcen zur Beschaffung von Information aufgewandt. Diese Ergebnisse widersprechen der *Grossman/Stiglitz-These* von der „Unmöglichkeit informationseffizienter Märkte“.

### Summary

The paper summarizes some results on the informational efficiency of a securities market in which expectations are conditioned on past rather than current prices: 1) The market cannot be fully informationally efficient because in each period the latest information is reflected in the price, but not yet used by investors. 2) If the period is “short”, the market is approximately informationally efficient, because the informational advantage of informed agents in a short period is small. 3) Even if the period is short, the return to being informed and the willingness to pay for information are bounded away from zero. This result contradicts the *Grossman/Stiglitz* proposition on the “impossibility of informationally efficient markets”.

### Literatur

- Doob*, J. L. (1953), *Stochastic Process*. New York.
- Eucken*, W. (1952), *Grundsätze der Wirtschaftspolitik*. Tübingen.
- Fama*, E. F. (1970), *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*. *Journal of Finance* 25 (1970), 383 - 417.
- (1977), *Foundations of Finance*. Oxford.
- Grossman*, S. J. and J. E. *Stiglitz* (1976), *Information and Competitive Price Systems*. *American Economic Review* 66 (1976), *Papers and Proceedings* 246 - 253.
- (1980), *On the Impossibility of Informationally Efficient Markets*. *American Economic Review* 70 (1980), 393 - 408.

- Hayek, F. A.* (1945), *The Use of Knowledge in Society*, *American Economic Review* 35 (1945), 519 - 530.
- Hellwig, M. F.* (1977), *On the Validity of the Intertemporal Capital Asset Pricing Model*, CORE-Discussion Paper No. 7744, Louvain-la-Neuve.
- (1981 a), *Rational Expectations Equilibrium with Conditioning on Past Prices: A Mean-Variance Example*. Discussion Paper No. 82, Projektgruppe „Theoretische Modelle“, Sonderforschungsbereich 21, Universität Bonn. Erscheint in *Journal of Economic Theory Symposium on Rational Expectations*.
- (1981 b), *Approximate Informational Efficiency with Costly Information*. Erscheint als Discussion Paper der Projektgruppe „Theoretische Modelle“, Sonderforschungsbereich 21, Universität Bonn.
- Hildenbrand, W.* (1974), *Core and Equilibria of a Large Economy*. Princeton.
- Muth, J.* (1961), *Rational Expectations and the Theory of Price Movements*. *Econometrica* 29 (1961), 315 - 333.