Zur Messung der Progression und Umverteilungswirkung der Steuern

Von Wilhelm Pfähler

In diesem Beitrag wird gezeigt, wie das neuere Progressionsmaß von *Kakwani* und das (revidierte) Umverteilungsmaß der Steuern von *Musgrave-Thin sachlogisch* zu interpretieren sind, welche Zusammenhänge unter Monotonieannahmen mit den verschiedenen Punkt-Elastizitäten der Steuern bzw. des Nettoeinkommens existieren, welche Theoreme einer Lorenz-gerechten Besteuerung bei ceteris-paribus Änderungen des Steuersystems oder der Einkommensverteilung gelten und wie Freibeträge, steuerfreie Einkünfte usw. in die Analyse einbezogen werden können. Anlaß dieses Beitrags ist ein jüngst in dieser Zeitschrift erschienener Artikel von *Petersen*.

I. Einleitung

Vor kurzem hat *Petersen* (1981) in dieser Zeitschrift den in jeder Hinsicht verdienstvollen Versuch unternommen, für die Verteilungen der Einkommensteuer (in der Lohnsteuerklasse I) der Jahre 1965, 1975 und 1978 in der Bundesrepublik Deutschland das neuere Progressionsmaß von *Kakwani* (1977 a) und das bereits viel ältere Maß der „effective progression“ von *Musgrave-Thin* (1948) zu berechnen. Letzteres ist ursprünglich von *Musgrave-Thin* definiert worden als der Quotient G^*/G zwischen dem Gini-Koeffizienten G^* der Netto-Einkommensverteilung und dem Gini-Koeffizienten G der Brutto-Einkommensverteilung. Es wurde von *Kakwani* (1977 a) umdefiniert zur Differenz $G^* - G$ beider Gini-Koeffizienten. Da diese Differenz nach *Kakwani* die *Umverteilungseffekte* eines Steuersystems in einer Maßzahl erfaßt, hatte er vorgeschlagen, den *Progressionseffekt*, der diesen Umverteilungseffekt bewirkt, getrennt in einer weiteren Maßzahl zu erfassen. Sie ist definiert als die Differenz $P = C - G$ der Gini-Koeffizienten C der Steuerlast und G der Brutto-Einkommensverteilung.

Der größte Teil des Beitrags von *Petersen* ist allerdings nicht der empirischen Analyse, sondern vielmehr einer theoretischen und statistischen Kritik des neuen Progressionsmaßes von *Kakwani* und der Rezeption des *Musgrave-Thin*-Maßes durch *Kakwani* gewidmet. In diesem Beitrag wird nun gezeigt, daß alle wesentlichen theoretischen (nicht statistischen) Einwände von *Petersen* entweder falsch oder irrelevant oder vorschnell formuliert sind. Dieser Nachweis erfolgt im Rahmen einer systematischen Analyse der sachlogischen Interpretation dieser Maße (Abschn. II), der Intervallgrenzen sowie des Vorzeichens dieser Maße in Abhängigkeit von bekannten Punkt-Maßen des Tarifs (Abschn. III), der Determinanten der Größe (innerhalb eines Intervalls) bzw. Größenveränderungen im lokalen oder Zeitvergleich (Abschn. IV) und der analytischen Erweiterungsmöglichkeiten um Freibeträge, steuerfreie Einkünfte etc. (Abschn. V). Abschn. IV beinhaltet gleichzeitig eine zusammenfassende (Kurz-)Darstellung bekannter Theoreme der Lorenz-gerechten (bzw. -dominanten) Besteuerung von *Jacobsson* (1976) und *Kakwani* (1977 b) und die Verallgemeinerung eines dieser Theoreme für die Fall nicht-proportionaler (aber monotoner) Änderungen der Brutto-Einkommensverteilung.

II. Zur sachlogischen Interpretation der Progressions- und Umverteilungsmaße

Petersen behauptet, *Kakwani* hätte sein Maß $P = C - G$ falsch interpretiert. Es sei kein Maß der Progressivität („measure of progressivity“), sondern vielmehr ein Maß für die Verteilung der Steuerlast („measure of the distribution of the tax burden“)[1]. Diese Behauptung ist offenkundig falsch. Ein Maß für die Verteilung der Steuerlast ist der Gini-Koeffizient C der Steuerverteilung — und nicht die Differenz $P = C - G$. Wie aber ist nun das Maß $P = C - G$ *sachlogisch* zu interpretieren? Nach *Kakwani* sollte ein Progressionsmaß (über die gesamte Spannweite des Tarifs) „measure the deviation of a tax system from proportionality“[2]. Eben diese Funktion erfüllt *Kakwani*'s P. Der bei *Kakwani* fehlende Nachweis sei hier nachgeholt.

Es bezeichnete $T(x) - t \cdot x$ die Abweichung des tatsächlich existierenden Steuertarifs von einem hypothetischen proportionalen Tarif $T^p = t \cdot x$. Als hypothetischer Proportionalsteuersatz wird jener Steuersatz herangezogen, der bei *gegebener* Verteilung des zu versteuernden Einkommens x zu exakt demselben Steueraufkommen führt wie der tatsächliche Tarif $T(x)$. Offenkundig kann es sich hierbei nur um die gesamtwirtschaftliche Steuerquote, d. h. das Verhältnis zwischen dem beobachteten Steueraufkommen und der Gesamtsumme des zu versteuernden Einkommens, handeln. Diese ist wiederum identisch mit dem Verhältnis zwischen dem arithmetischen Mittel m_T der Steuern und m_x des zu versteuernden Einkommens, d. h. $t = m_T / m_x$.

[1] *Petersen* (1981), 49.
[2] *Kakwani* (1977 a), 74.

Nimmt man nun im kontinuierlichen Fall an, daß das zu versteuernde Einkommen x im Intervall (a, b) definiert und die Dichtefunktion $f(x)$ des Einkommens bekannt ist, so ist die mittlere Abweichung δ_{T, T^p} der tatsächlichen Steuer $T(x)$ von einer proportionalen Steuer $T^p = t \cdot x$ definiert als

$$\text{(1.1)} \qquad \delta_{T, T^p} = \int_a^b | T(x) - t \cdot x | f(x)\, dx = \int_0^1 | T\{G(F)\} - t \cdot G(F) | \, dF$$

wobei $x = G(F) = G\{F(x)\}$, die von *Piesch* (1967) und unabhängig von *Gastwirth* (1971) eingeführte inverse Verteilungsfunktion des Einkommens und $T(x) = T\{G(F)\}$ die monoton transformierte inverse Verteilungsfunktion der Steuern darstellen[3]. Die Gleichung (1.1) für die mittlere Abweichung läßt sich umformulieren zu (siehe Appendix I)

$$\text{(1.2)} \qquad \delta_{T, T^p} = 2 m_T \{L_x(F_t) - L_T(F_t)\}$$

wobei $L_x(F)$ bzw. $L_T(F)$ die Lorenz-Kurve des Einkommens bzw. der Steuern darstellt. $L_x(F_t)$ bzw. $L_T(F_t)$ gibt den von unten kumulierten Anteil am Gesamteinkommen bzw. am Steueraufkommen an, der auf den von unten kumulierten Anteil $F_t = F\{t(x) \leqq t\}$ der Haushalte entfällt, die einem Durchschnittssteuersatz $t(x) = T(x)/x$ in Höhe der gesamtwirtschaftlichen Steuerquote t *und darunter* unterliegen. So besagen etwa $L_x(F_t = 0.75) = 0.5$ und $L_T(F_t = 0.75) = 0.25$, daß 50 % des Gesamteinkommens und 25 % des Steueraufkommens auf jene 75 % der Haushalte entfallen, die einen Durchschnittssteuersatz von maximal $t = m_T/m_x$ zu tragen haben. Man kann F_t — analog zur Durchschnittslage („equal share coefficient") F_{m_x} bzw. F_{m_T} — auch als Proportionallage („proportional share coefficient") bezeichnen.

Normiert man die mittlere Abweichung δ_{T, T^p} auf das Intervall $(0, |1|)$ für Proportionalverteilung (= 0) und extreme Progression (= 1) bzw. Regression (= − 1), so erhält man einen dem *Schutz*-Koeffizienten nachgebildeten Koeffizienten $D_{T, T^p} = \delta_{T, T^p}/2\, m_T$, der als „Proportionalverteilungskoeffizient bezeichnet werden kann. Er gibt den Anteil des Steueraufkommens an, der von Steuerpflichtigen mit einer Durchschnittsbelastung *über* der Steuerquote t auf Steuerpflichtige mit einer Durchschnittsbelastung *unter* der Steuerquote t umverteilt werden müßte, um eine durchgehend proportionale Steuerlastverteilung zu erzielen. Graphisch wird D_{T, T^p} repräsentiert durch den maximalen vertikalen Abstand zwischen den Lorenz-Kurven $L_x(F)$ des Einkommens und $L_T(F)$ der Steuern. Es kann gezeigt werden (siehe Appendix II), daß dieses

[3] Siehe *Piesch* (1975), 65 f.

Abstandsmaximum bei der Proportionallage F_t erreicht wird, so daß der „Proportionalverteilungskoeffizient" definiert ist als (siehe Abbildung)

$$(1.3) \qquad D_{T,Tp} = \frac{\delta_{T,Tp}}{2m_T} = \operatorname*{Max}_F \{L_x(F) - L_T(F)\} = L_x(F_t) - L_T(F_t)$$

Obwohl sachlogisch sinnvoll interpretierbar, machen *Kakwani* u. a. keine Verwendung von diesem Index.

Kakwani's Maß $P = C - G$ mißt die doppelte Summe aller Abstände zwischen beiden Lorenz-Kurven, d. h. die doppelte Fläche zwischen den Lorenz-Kurven $L_x(F)$ und $L_T(F)$. Sie ist statistisch sinnvoll interpretiert als die auf das Intervall $(0, |1|)$ normierte *mittlere Differenz* $\Delta_{T,Tp}$ aller Abweichungen $T(x) - t \cdot x$ der tatsächlichen von einer hypothetisch proportionalen Steuerlastverteilung, d. h.[4] (siehe Abbildung)

$$(1.4) \quad P = C - G = \frac{\Delta_{T,Tp}}{2m_T} = \frac{1}{2m_T} \int_0^1 \delta_{T,Tp}(F)\,dF = 2 \int_0^1 \{L_x(F) - L_T(F)\}\,dF$$

Damit ist nachgewiesen, daß und wie *Kakwani*'s P sachlogisch sinnvoll als Progressionsmaß über die gesamte Spannweite des Tarifs — unter Berücksichtigung der jeweiligen Besetzungsdichte — interpretiert werden kann.

Eine weitere Behauptung von *Petersen* lautet, daß *Kakwani* die „effective progression" von *Musgrave-Thin* (1948) im Sinne des Verhältnisses zwischen den Gini-Koeffizienten G^* der Netto-Einkommensverteilung und G der Verteilung des Einkommens vor Steuer falsch als „measure of the distributive effects of the tax system" interpretiert, anstatt als „measure of the redistribution of income"[5]. Auch diese Behauptung ist entweder falsch oder unverständlich.

Tatsächlich ist festzustellen, daß die ursprüngliche Version G^*/G von *Musgrave-Thin* überhaupt *nicht sachlogisch* sinnvoll interpretiert werden kann[6]. Verändert man dieses Maß im Sinne von *Kakwani*[7] zur Differenz $EP = G^* - G$, dann gibt diese Differenz — analog zur Differenz $P = C - G$ — die normierte *mittlere Differenz* der Abweichungen des

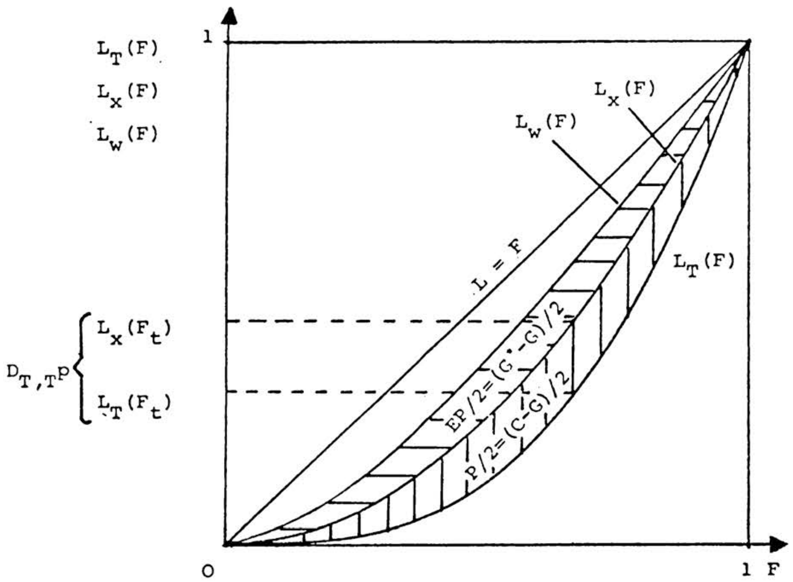
[4] Die mittlere Differenz läßt sich immer als Integral der mittleren Abweichungen darstellen. Siehe *Piesch* (1975), 59.

[5] *Petersen* (1981), 49.

[6] Unter einer sinnvollen *sach*logischen Interpretation wird verstanden, daß sich das Maß im Sinne der Abweichung der Verteilung einer steuerlich relevanten Variablen von einer Proportionalverteilung rekonstruieren läßt. Der *zahlen*logische Sinn der ursprünglichen Version ist — wie die Tabelle im Text zeigt — gleichfalls anzuzweifeln.

[7] *Kakwani* (1977 a), 73.

tatsächlichen Netto-Einkommens $w(x) = x - T(x)$ von einem hypothetischen Netto-Einkommen $w^p = r \cdot x = (1 - t)\,x$ unter Verwendung der gesamtwirtschaftlichen Netto-Einkommensquote $r = m_w/m_x = 1 - t$ an, d. h. (siehe Abbildung)



$$\text{(1.5)}\quad EP = G^* - G = \frac{\Delta_{w,\,w^p}}{2m_w} = \frac{1}{2m_w}\int_0^1 \delta_{w,\,w^p}(F)\,dF = 2\int_0^1 \{L_x(F) - L_w(F)\}\,dF$$

Zwischen EP und P existiert die einfache, bereits bei *Kakwani*[8] zu findende Beziehung (siehe auch Appendix VI)

$$\text{(1.6)}\qquad EP = -\frac{t}{1-t}\,P, \text{ wobei } \frac{t}{1-t} = \frac{m_T}{m_w}$$

Im Falle eines konstanten Durchschnittssteuersatzes $t(x) = t$, der eine durchgehend proportionale Verteilung der Steuern und des Nach-Steuer-Einkommens impliziert, nehmen *Kakwani*'s P und das revidierte *Musgrave-Thin*-Maß EP den Wert Null an. Das bedeutet, daß eine strikt proportionale Steuer zwar einen Niveaueffekt auf die Nach-Steuer-Einkommen, aber keinen Umverteilungseffekt zur Folge hat. Eine nicht-proportionale Steuer zeigt Niveau- *und* Umverteilungseffekte auf das Nach-Steuer-Einkommen. Als Disparitätsmaß zeigt das

[8] Ebenda, 73.

Musgrave-Thin-Maß nur die Umverteilungseffekte an, die aus dem Progressionseffekt resultieren.

Ob man nun *EP* als „measure of the redistribution of income (due to taxes, W. P.)“ bezeichnet, wie *Petersen* empfiehlt, oder, wie *Kakwani*, als „measure of the redistributive effects of taxes“ ist völlig gleichgültig, da keinerlei Bedeutungs- oder Sachunterschiede auszumachen sind. Von einer „faulty interpretation“[9] des *Musgrave-Thin*-Maßes seitens *Kakwani*, wie von *Petersen* behauptet, kann keine Rede sein.

III. Zum Vorzeichen und Intervall der Progressions- und Umverteilungsmaße

Petersen behauptet, daß *Kakwani*'s P den Wert Null annimmt, falls entweder das Einkommen völlig egalitär verteilt ist ($G = 0$) oder sich vollständig auf die oberste Einkommensklasse konzentriert ($G = 1$), weil dann die Steuerlastverteilung gleichfalls entweder völlig egalitär ist ($C = 0$) oder die gesamte Steuer von der obersten Einkommensklasse getragen werden müßte ($C = 1$)[10]. Diese Behauptung ist zwar richtig, aber für die *sachlogische* Interpretation von *Kakwani*'s P irrelevant.

Sachlogisch sinnvoll ist es vielmehr von der „Steuerseite“ aus zu argumentieren und eine normale, d. h. weder völlig egalitäre noch völlig konzentrierte Einkommensverteilung vor Steuer ($0 < G < 1$) der Betrachtung zugrundezulegen. Das Vorzeichen und das Intervall des Progressionsmaßes P werden dann allein durch den *Typ* der *Steuerlastverteilung* determiniert. Ist die Steuerlastverteilung eine strikt monotone Transformation der Einkommensverteilung, dann — und nur dann — werden beide allein durch den *Tariftyp* bestimmt. Zwischen dem Spannweiten-Maß P und den Punkt-Maßen der Progression bzw. Regression existieren in diesem Fall die folgenden Beziehungen:

$$\text{(1.4.1)} \qquad \left.\begin{array}{r} 0 < \\ -G < \\ -(1+G \leqq \end{array}\right\} P = C - G \left\{\begin{array}{l} \leqq 1 - G \\ \leqq 0 \\ \leqq -G \end{array}\right. , \text{ falls } \left.\begin{array}{r} 0 < \\ -1 < \\ -\infty \leqq \end{array}\right\} e_{t,x} = e_{T,x} - 1 \left\{\begin{array}{l} \leqq \infty \\ \leqq 0 \\ \leqq -1 \end{array}\right.$$

wobei $e_{t,x} = t'(x) \cdot x / t(x) = e_{T,x} - 1 = T'(x)/t(x) - 1$

Der Extremfall einer an P gemessenen Progression ist dadurch gekennzeichnet, daß bei normaler Einkommensverteilung das gesamte Steueraufkommen allein von der obersten Einkommensklasse ($x_{\max}$)

[9] *Petersen* (1981), 48.
[10] Ebenda, 47.

zu tragen ist. Das entspricht einem Tarif mit einer Steuerfreigrenze bis zum maximalen Einkommen, so daß $e_{T,x}(x < x_{\max}) = 0/0$ und $e_{T,x}(x = x_{\max}) = \infty$. Daraus folgt $C = 1$ und somit $P = 1 - G$. Im Extremfall einer an P gemessenen Regression hat die unterste Einkommensklasse ($x_{\min}$) das gesamte Steueraufkommen zu tragen. Das entspricht einem Tarif mit einer Steuerbefreiung über einem Mindesteinkommen, so daß $e_{T,x}(x = x_{\min}) = -\infty$ und $e_{T,x}(x > x_{\min}) = -0/0$. Daraus folgt $C = -1$ und somit $P = -(1 + G)$. Einen Sonderfall eines regressiven Tarifs stellt eine Kopfsteuer dar. Sie führt zu einer egalitären Steuerlastverteilung, so daß wegen $e_{T,x} = 0$ für alle x man $C = 0$ und somit $P = -G$ erhält. Die an P gemessene Disparität ist also gleich dem negativen Wert des Gini-Koeffizienten des Vor-Steuer-Einkommens (siehe die Tabelle).

Das Theorem (1.4.1) folgt aus der relativen Lage der Lorenz-Kurve $L_T(F)$ der Steuern zur Lorenz-Kurve $L_x(F)$ des Einkommens. $L_T(F)$ liegt unterhalb (oberhalb) von $L_x(F)$, so daß $P > 0$ ($P < 0$), falls die zweite Ableitung von $L_T(F)$ in bezug auf $L_x(F)$ positiv (negativ) ist. Man erhält die zweite Ableitung als

$$\text{(1.4.2)} \qquad \frac{d^2 LT(F)}{dL_x^2(F)} = \frac{m_x^2\, T(x)}{m_T\, x^3 f(x)} \{e_{T,x}(x) - 1\} \gtreqless 0 \text{ für } e_{T,x} \gtreqless 1 \,,$$

wobei $x = G(F)$

Die Gleichung (1.4.2) entspricht der auf Lorenz-Kurven übertragenen Gleichung (2.3) in *Kakwani* (1977 b) für $g(x) = T(x)$ und $g^*(x) = x$[11].

Zwischen dem Spannweiten-Maß EP des Typs der Netto-Einkommensverteilung und den Punkt-Maßen des Netto-Tariftyps existieren die folgenden analogen Beziehungen:

$$\left.\begin{matrix} 0 < \\ -G < \\ -(1+G) \leqq \end{matrix}\right\} EP = G^* - G = -\frac{t}{1-t}\{C - G\} = -\frac{t}{1-t} P \left\{\begin{matrix} \leqq 1 - G \\ \leqq 0 \\ \leqq -G \end{matrix}\right. \text{, falls}$$

(1.5.1)

$$\left.\begin{matrix} -0 < \\ -1 < \\ -\infty \leqq \end{matrix}\right\} e_{r,x} = e_{w,x} - 1 = -\frac{t(x)}{1-t(x)}\, e_{T,x} - 1 = -\frac{t(x)}{1-t(x)} e_{t,x} \left\{\begin{matrix} \leqq \infty \\ \leqq 0 \\ \leqq -1 \end{matrix}\right.$$

wobei $e_{r,x} = r'(x) \cdot x/r(x)$ mit $r(x)\ \dfrac{w(x)}{x}$ und $e_{w,x} = w'(x)/r(x)$

[11] *Kakwani* (1977 b), 720 f. unterlegt seiner Beweisführung die erste Moment-Verteilung $L\{g(x)\}$ bzw. $L\{g^*(x)\}$ und nicht die Lorenzkurve. (Außerdem wird bei Kakwani L durch F_1 repräsentiert.)

Vorzeichen und Intervall der Progressions- und Umverteilungsmaße

Verteilung ↓ / Maße →	$P = C - G$ (Kakwani)	$EP = G^* - G$ (Musgrave/Thin)	G^*/G (Musgrave/Thin)	(Suits) S
extreme Progression $e_{T,x} = 0/0 \ (x < x_{\max})$ $e_{T,x} = \infty \ (x = x_{\max})$	$= 1 - G < 1$	$= -\frac{t}{1-t}(1 - G) < 0$	$= \frac{1}{G} > 1$	$= 1$
Proportionalität $e_{T,x} = 1 \ (x > 0)$	$= 0$	$= 0$	$= 1$	$= 0$
Kopfsteuer $e_{T,x} = 0 \ (x > 0)$	$= -G < 0$	$= \frac{t}{1-t} G > 0$	$= \frac{1}{(1-t)\,G} > 1$	$= -G < 0$
extreme Regression $e_{T,x} = -0/0 \ (x < x_{\min})$ $e_{T,x} = -\infty \ (x = x_{\min})$	$= -(1 + G) < -1$	$= \frac{t}{1-t}(1 + G) > 0$	$= \frac{1+t}{(1-t)\,G} > 1$	$= -1$

Das Theorem (1.5.1) folgt unmittelbar aus (1.4.2), falls man dort die Lorenz-Kurve der Steuern $L_T(F)$ durch die Lorenz-Kurve des Netto-Einkommens $L_w(F)$ ersetzt. Die Interpretation von (1.5.1) erfolgt analog zur Interpretation von (1.4.1.).

Anstatt die in Gleichung (1.5.1) dargelegte Analogiebeziehung aufzuzeigen, die *Kakwani*'s Interpretation des *Musgrave-Thin*-Maßes als „measure of the redistributive effects of taxes" *bestätigt*, will *Petersen* anhand der obigen Definitionsgleichung für $e_{r,x}$, die nochmals sehr ausführlich abgeleitet wird, obwohl sie zu den Grundlagenkenntnissen der Steuertariflehre gehört, *Kakwani*'s „faulty interpretation" des Maßes *EP* nachweisen.[12] Selbst bei sorgfältiger Lektüre der entsprechenden Ausführungen von *Petersen* ist kein Ansatzpunkt für die vermeintliche „faulty interpretation" *Kakwani*'s zu entdecken. Die Analogiebeziehung gibt allenfalls einen Hinweis auf *Petersen*'s Fehlinterpretation von *Kakwani*'s Maß *P*. Korrespondierende Größen sind nämlich *P* und $e_{t,x}$ und nicht — wie *Petersen* (zumindest implizit) unterstellt — die Größen *P* und $e_{T,x}$. Nur so ist zu verstehen, daß *Petersen* das Maß *P* als „measure of the distribution of tax burden" fehlinterpretiert.

Als Disparitätsmaß (hier: zwischen tatsächlicher und proportionaler Verteilung) hat *Kakwani*'s *P* den gravierenden Nachteil, daß es nicht im Intervall (— 1,1) für extreme Regression (— 1), Proportionalität (0) und extreme Progression (+ 1) definiert ist.[13] Dieser Nachteil wird nicht geteilt von einem Progressionsmaß, das auf die relative Lorenz-Kurve $L_T(L_x)$ aufbaut, die die Beziehung zwischen der normalen Lorenz-Kurve $L_T(F)$ der Steuern (entlang der Ordinate) und der normalen Lorenz-Kurve $L_x(F)$ des Einkommens (entlang der Abszisse) angibt. Der Gini-Koeffizient *S* dieser relativen Lorenz-Kurve $L_T(L_x)$ wurde jüngst von *Suits* (1977) als Progressionsmaß für die gesamte Spannweite des Tarifs vorgeschlagen und von *Pfähler* (1981 a, b) analysiert. Er ist in die Tabelle aufgenommen.

IV. Zu den Determinanten der Größe der Progressions- und Umverteilungsmaße (Lorenz-gerechte Besteuerung)

Die Größe von *Kakwani*'s *P* bzw. *Musgrave-Thin*'s *EP* wird determiniert durch (1.) die Einkommensverteilung und (2.) die Steuerlastverteilung. Beide zusammen bestimmen die gesamtwirtschaftliche Steuer-

[12] *Petersen* (1981), 48 ff.

[13] Man kann zwar das Kakwani-Maß *P* auf das Intervall (0,1) wie folgt normieren

$$0 \leqq P^* = P/2 + (1 + G)/2 \leqq 1 \text{ mit } P^* = (1 + G)/2 \text{ für } P = 0 .$$

Die Zahlenlogik dieser Normierung findet freilich kein Pendant in der Sachlogik, die für eine Proportionalverteilung einen Wert von Null nahelegt.

quote $t = m_T/m_x$ bzw. die gesamtwirtschaftliche Netto-Einkommensquote $r = 1 - t = m_w/m_x$. Falls die Steuerlastverteilung eine strikt monotone Transformation der Einkommensverteilung darstellt — *und nur dann* —, wird die Größe von P bzw. EP determiniert durch (1.)* die Einkommensverteilung und (2.)* die Tariffunktion $T(x)$. Beide zusammen bestimmen dann die Steuerlastverteilung und die gesamtwirtschaftlichen Quoten. Die Tariffunktion $T(x)$ läßt sich alternativ beschreiben durch alle abgeleiteten Größen, wie etwa die Durchschnittssteuersatzfunktion $t(x)$ oder die Elasitizitätsfunktion $e_{T,x}(x)$. Dasselbe gilt für die Netto-Einkommensfunktion $w(x) = x - T(x)$ mit ihren abgeleiteten Beziehungen $r(x) = 1 - t(x)$ oder $e_{w,x}(x)$.

Ein weiterer kritischer Einwand von *Petersen* lautet nun, daß jeder gegebene Wert von *Kakwani*'s $P = C - G$ mit einer Vielzahl unterschiedlicher Konstellationen in bezug auf die Steuer- und Einkommensteilung vereinbar sei und man zweifeln müsse, ob und wie genau dieses Progressionsmaß zu deuten ist.[14] Die sachlogische Interpretation des Progressionsmaßes von *Kakwani* haben wir oben im Sinne der normierten mittleren Differenz der Abweichungen zwischen der tatsächlichen von einer hypothetisch proportionalen Steuerverteilung rekonstruiert. Identische Werte von P für dramatisch unterschiedliche Konstellationen in bezug auf die Einkommens- und Steuerverteilung sind eine logische Folge der Konstruktion dieses Maßes. Dieses „Schicksal" teilt das Progressionsmaß P mit allen übrigen Disparitätsmaßen. Auch der Gini-Koeffizient G des Einkommens und der Variationskoeffizient etc. können identische Werte für völlig unterschiedliche Verteilungen annehmen. Gravierend wird dieses Interpretationsproblem freilich erst dann, wenn sich — im lokalen Vergleich oder im Zeitvergleich — die dem *Kakwani*-Maß zugrundeliegenden Lorenz-Kurven *schneiden*. Aber selbst für diese Fälle lassen sich sachlogisch adäquate Verfahren entwickeln, die es ermöglichen, veränderte Werte sinnvoll zu interpretieren. An dieser Stelle beschäftigen wir uns nur mit der einfacheren Frage, unter welchen Bedingungen sich die Lorenz-Kurven *nicht schneiden,* so daß eine zweifelsfreie Interpretation von Wertänderungen möglich ist. Das ist zugleich die Frage nach der sogenannten *Lorenz-dominanten* (bzw. Lorenz-gerechten) Besteuerung.

Angenommen, die Steuerbelastung aller Haushalte wachse (bzw. sinke) immer monoton mit dem Einkommen, gleichgültig ob eine neue *Steuer* $T_2(x)$ oder die alte Steuer $T_1(x)$ bei *gegebener Brutto-Einkommensverteilung* angewendet wird. Dann steigt (bzw. sinkt) das Progres-

[14] *Petersen* (1981), 47.

sionsmaß P, falls die neue Steuer T_2 in allen Einkommensklassen eine höhere (bzw. niedrigere) Steuerbetragselastizität $e_{T,x}$ aufweist, d. h.

$$(2.1) \qquad P_{T2(x)} \gtreqless P_{T1(x)} \quad \text{falls} \quad e_{T2,x} \gtreqless e_{T1,x} \quad \text{für alle } x \ .$$

Dieses von *Jakobsson* (1976)[15] und *Kakwani* (1977 b)[16] stammende Theorem folgt unmittelbar aus der relativen Lage der Lorenz-Kurve $L_{T2}(F)$ der neuen Steuer zur Lorenz-Kurve $L_{T1}(F)$ der alten Steuer — bei gleichbleibender Lage der Lorenz-Kurve $L_x(F)$ des Einkommens vor Steuer. $L_{T2}(F)$ liegt unterhalb (bzw. oberhalb) von $L_{T1}(F)$, so daß $P_{T2} > P_{T1}$ (bzw. $P_{T2} < P_{T1}$), falls die zweite Ableitung von $L_{T2}(F)$ in Bezug auf $L_{T1}(F)$ positiv (negativ) ist. Man erhält diese zweite Ableitung als

$$(2.2) \quad \frac{d^2 L_{T2}(F)}{dL_{T1}^2(F)} = \frac{d\left\{\dfrac{dL_{T2}(F)}{dL_{T1}(F)}\right\}\Big/ dF}{dL_{T1}(F)/dF} = \frac{m_{T1}^2\, T_2(x)}{m_{T2}\, T_1^2(x)\, x\, f(x)} \{e_{T2,x} - e_{T1,x}\} \gtreqless 0$$

falls $e_{T2,x} \gtreqless e_{T1,x}$ für alle x, wobei $x = G(F)$.

Daraus folgt unmittelbar das Theorem (2.1). Die Gleichung (2.2) entspricht der auf Lorenz-Kurven übertragenen Gleichung (2.3) in *Kakwani* (1977 b), falls man $T_2(x)$ als $g(x)$ und $T_1(x)$ als $g^*(x)$ interpretiert.

Aus dem Theorem (2.1) folgt auch, daß jede Steueränderung, die die Gleichheit der Elastizitäten in allen Einkommensklassen sicherstellt, keinen Einfluß auf die an *Kakwani*'s P gemessene Progression ausübt. Zu solcherart Steueränderungen zählt etwa die lineare Erhöhung bzw. Senkung der Steuerschuld im Sinne von $T_2(x) = (1 + a)\, T_1(x)$ mit $a \gtrless 1$ zum Zwecke der Verstärkung oder Abschwächung der built-in-flexibility oder des Steueraufkommens. Freilich berührt diese Maßnahme die an $e_{w,x}$ bzw. $EP = G^* - G$ gemessene Umverteilungswirkung des Steuersystems, da sie in allen Einkommensklassen zu einer Vervielfachung des Durchschnittssteuersatzes bzw. insgesamt zu einer Vervielfachung der gesamtwirtschaftlichen Quoten führt. Der fragliche Einfluß ergibt sich unmittelbar aus Gleichung (1.5.1) und wird auch bei *Petersen* anhand der Elastizitätsgleichung $e_{r,x}$ diskutiert.[17] Wie bereits mehrfach kritisiert, schließt *Petersen* aus der Analyse dieses Einflusses — in unerfindlicher Weise — auf *Kakwani*'s vermeintliche Fehlinterpretation des Maßes EP von *Musgrave-Thin*. Berechtigt wäre ein Einwand nur, falls man die Punkt-Progression nicht anhand des Elastizitätskriteriums, sondern, wie etwa *Pollak*[18], anhand der Veränderung $t'(x)$ des Durch-

[15] *Jakobsson* (1976), propositions 1 und 3, 165 und 167.
[16] *Kakwani* (1976 b), theorem 1, 720.
[17] *Petersen* (1981), 50 f.
[18] *Pollak* (1980), 243.

schnittssteuersatzes mißt. In diesem Falle besteht keine äquivalente Beziehung zwischen einer linearen Erhöhung der Progression im Sinne von $t'(x)$ und einer Erhöhung der Progression im Sinne von P. P bliebe konstant, obwohl die Punkt-Progression sich erhöht hätte.

Bleibt dagegen das Steuersystem $T(x)$ *konstant*, während sich die Einkommensverteilung in der Weise ändert, daß die neue Einkommensverteilung eine monotone Transformation $x_2 = h(x_1) = h\{G(F)\}$ der alten Einkommensverteilung $x_1 = G(F)$ darstellt, dann steigt (bzw. sinkt) die Disparität P, falls das Verhältnis $e_{T,x2}/e_{T,x1}$ der Steuerbetragselastizitäten größer (bzw. kleiner) ist als die Elastizität $e_{x1,x2}$ der alten in Bezug auf die neue Einkommensverteilung, d. h.

$$(3.1) \qquad P_{T(x2)} \gtreqless P_{T(x1)} \quad \text{falls } \frac{e_{T,x2}}{e_{T,x1}} \gtreqless e_{x1,x2}$$

Dieses in der Literatur neue Theorem gilt dann, falls die Lorenz-Kurve $L_{T(x2)}(F)$ der Steuern unterhalb (bzw. oberhalb) der Lorenz-Kurve $L_{T(x1)}(F)$ der Steuern bei der alten Einkommensverteilung liegt. Das wird dann der Fall sein, falls die zweite Ableitung von $L_{T(x2)}$ in Bezug auf $L_{T(x1)}$ positiv (bzw. negativ) ist. Man erhält diese zweite Ableitung als (siehe Appendix III)

$$(3.2) \quad \frac{d^2 L_{T(x2)}(F)}{dL^2_{T(x1)}(F)} = \frac{d\left\{\dfrac{dL_{T(x2)}(F)}{dL_{T(x1)}(F)}\right\}\Big/ dF}{dL_{T(x1)}(F)/dF} = \frac{m^2_{T1}\, T(x_2)\,\{e_{T,x2}\, e_{x2,x1} - e_{T,x1}\}}{m_{T2}\, T^2(x_1)\, x_2\, f(x_1)}$$

wobei $x_2 = h(x_1) = h\{G(F)\}$.

Daraus folgt unmittelbar das Theorem (3.1).

Einen *Sonderfall* von Theorem (3.1) hat bereits *Jakobsson* (1976)[19] nachgewiesen. Er bezieht sich auf das verfügbare Einkommen $w(x)$ und die korrespondierende Elastizität $e_{w,x}$ des Netto-Einkommens. Bezogen auf den hier vorliegenden Fall folgt aus (3.1), daß die Progressivität P konstant bleibt, falls (i) alle Einkünfte eine identische proportionale Änderung erfahren, so daß $e_{x1,x2} = 1$ für alle x und falls (ii) die gegebene Steuerfunktion eine konstante Elastizität $e_{T,x} = a$ bzw. $e_{t,x} = a - 1$ aufweist, d. h. $T(x_2) = b(\lambda x_1)^a = \lambda^a bx^a = \lambda^a T(x_1)$, so daß $t_2 = \lambda^{a-1} t_1$ die neue gesamtwirtschaftliche Steuerquote ist. Ein analoges Ergebnis erhält man für einen *Edgeworth*-Tarif $T(x) = x - bx^a$ mit dem Netto-Einkommen $w(x) = bx^a$ und der Elastizität der Netto-Quote $e_{r,x} = a - 1$. Unter diesem Tarif bleibt das *Musgrave-Thin*-Maß *EP* konstant. Eine gewisse Bedeutung in praktischer Hinsicht hat dieser Sonderfall für

[19] *Jakobsson* (1976), proposition 2, 166.

die Frage, unter welchen Bedingungen Inflation und/oder Wachstum, die alle Einkommensklassen in gleicher Weise betreffen, *keine* Auswirkungen auf die Progressivität P (bei $T(x) = bx^a$) oder den Umverteilungseffekt der Steuern EP (bei $T(x) = x - bx^a$) haben.

Somit bleibt festzustellen, daß unter gewissen Monotoniebedingungen und unter der Bedingung sich nicht schneidender Lorenz-Kurven ein *eindeutiger* Zusammenhang zwischen den Punkt-Elastizitäten und den Spannweiten-Maßen P und EP existiert. In weiteren Details wird dieser Zusammenhang z. B. für *Kakwani*'s Progressionsmaß $P(F = 1) = P$ sichtbar, wenn man die vierte Ableitung untersucht, die die Beschleunigung der Krümmungen der Lorenz-Kurve $L_x(F)$ des Einkommens und $L_T(F)$ der Steuern wiederspiegelt. Man erhält sie als (siehe Appendix IV)

$$(4.1) \quad \frac{d^4 P(F)}{dF^4} = \frac{2f(x)}{m_T\, x\, f^3(x)} \left\{ T'(x) \{e_{f,x} - e_{t,x}\} - t \cdot e_{f,x} - T(x) \frac{de_{T,x}}{dx} \right\} .$$

Sie enthält die Elastizität der Dichtefunktion $e_{f,x}$, die Durchschnittssteuersatzelastizität $e_{t,x}$ und die Veränderung der Steuerbetragselastizität $de_{T,x}/dx$ zur Charakterisierung des Progressionstyps. Eine detaillierte Analyse dieses Ausdrucks soll an dieser Stelle unterbleiben.

Einen erfolgversprechenden Ansatzpunkt für eine Dekomposition des *Kakwani*-Maßes P nach *Einkommens- bzw. Steuerklassen* oder *Einkunftsarten* erhält man aus einer Umformulierung des Maßes in der Form (siehe Appendix V)

$$(4.2) \qquad P = \frac{1}{m_T} \int_a^b \{F(x)\,[1 - F(x)]\}\,\{T'(x) - t\}\,dx$$

wobei $F(x)$ die von unten und $1 - F(x)$ die von oben kumulierte Verteilungsfunktion des Einkommens und $T'(x)$ die Grenzsteuersatzfunktion darstellen. Der Leser sei davor gewarnt, die Relation $t \lesseqgtr T'(x)$ als Bedingung für $P \gtreqless 0$ zu interpretieren. Dieser Fehler findet sich zum Beispiel bei *Piesch*[20] in einem analogen Zusammenhang. Die Formel (4.2) kann mithilfe von Zerlegungsverfahren, wie z. B. von *Bhattacharya-Mahalanobis* (1967), *Taguchi* (1968) und *Piesch* (1975), so weiterentwikkelt werden, daß die Beiträge der einzelnen Einkommens- bzw. Steuerklassen oder Einkommensarten zu einem Gesamtwert P sichtbar werden. Das sei freilich einer anderen Stelle vorbehalten.

Damit sind Möglichkeiten einer differenzierten Analyse aufgezeigt, die dem pauschalen kritischen Einwand von *Petersen*, das Progressionsmaß P wäre nicht in der Lage, das komplexe Bild der Steuerlastvertei-

---

[20] *Piesch* (1975), 71.

lung und Tarifstruktur zutreffend zu erfassen, zumindest teilweise die Berechtigung entziehen. Man kann sinnvollerweise auch an Konzentrations- bzw. Disparitätsmaße nicht Informationsanforderungen stellen, die sie *ex definitione* nicht zu befriedigen in der Lage sind. Die Angabe eines Wertes von P ersetzt nicht die Kenntnis der zugrundeliegenden Dichtefunktion $f(x)$ des Einkommens und der Tariffunktion $T(x)$. Dasselbe gilt auch vice versa. Eine noch so detailliert aufbereitete Darstellung der Tarif- oder Elastizitätsfunktion ersetzt nicht die Antwort auf die Frage, wie im *gesamtwirtschaftlichen Durchschnitt* die Abweichungen der tatsächlichen von einer proportionalen Steuerlastverteilung beschaffen sind.

Eine andere Art von Dekomposition hat *Kakwani* (1977 a) in die Diskussion eingebracht. Er glaubt, Veränderungen in der Verteilung des Nach-Steuer-Einkommens (G^*) im einzelnen den Veränderungen der Verteilung des Vor-Steuer-Einkommens (G), der Progression (P) und des Besteuerungsniveaus (t) zurechnen zu können. Ausgehend von der umformulierten Gleichung (1.6) zur Gleichung

$$(5.1) \qquad G^* = G - \frac{t}{1-t} P \quad \text{entspricht} \quad e_{w,x} = 1 - \frac{t(x)}{1-t(x)} e_{t,x}$$

stellt er die folgende Elastizitätsgleichung auf[21]:

$$(5.2) \qquad \frac{dG^*}{G^*} = \frac{G}{G^*} \cdot \frac{dG}{G} + e_{G^*,P} \cdot \frac{dP}{P} + e_{G^*,t} \frac{dt}{t}$$

Dabei gibt $e_{G^*,P} = -Pt/(1-t)G^*$ die Elastizität von G^* in Bezug auf P an, während $e_{G^*,t} = -Pt/(1-t)^2 G^*$ (bei *Kakwani* fehlt das Minuszeichen!) die Elastizität von G^* in Bezug auf t anzeigt. Eine Dekomposition der Einflußfaktoren gemäß dieser Elastizitätsgleichung ist undurchführbar. Der Grund ist in der *Interdependenz* aller Faktoren zu suchen. Der Gini-Koeffizient des Brutto-Einkommens G hängt über $m_x = m_T/t$ von der gesamtwirtschaftlichen Steuerquote ab, die Progression P über $P = C - G$ von dem Gini-Koeffizienten des Brutto-Einkommens G, der gesamtwirtschaftlichen Steuerquote t und dem Steuertarif $T(x)$ und schließlich die Steuerquote t über m_T und m_x von den Gini-Koeffizienten C und G. *Separabilität* ist nur in dem eben aufgezeigten *Sonderfall* des Theorems (3.1) mit $dG = 0$, $dP = 0$ und $dt = \lambda$ gegeben. Nur in diesem Sonderfall läßt sich die relative Veränderung der Konzentration des Nach-Steuer-Einkommens eindeutig einer relativen (linearen) Veränderung der volkswirtschaftlichen Steuerquote zurechnen.

21 *Kakwani* (1977 a), 73.

V. Zur Berücksichtigung von Freibeträgen u. dgl.

Die Berücksichtigung eines weiteren, auch von *Petersen* angesprochenen Aspekts der differenzierten Tarifstruktur, nämlich die Existenz von Freibeträgen, steuerfreien Einkünften usw., bereitet keine sonderlichen theoretischen („nur“ statistischen) Schwierigkeiten. Eine kleine Einführung in die Möglichkeiten einer erweiterten Progressionsanalyse anhand von *Kakwani*'s P soll hier genügen.

Das verfügbare Einkommen $v(y)$ in Abhängigkeit vom Brutto-Einkommen („Basis-Einkommen“) y mit der Dichtefunktion $f(y)$ ist äquivalent definiert als

$$(6.) \qquad v(y) = y - T\{x(y)\} = x + R(y) - T\{x(y)\} = R(y) + w\{x(y)\}$$

wobei y = Brutto-Einkommen, x = zu versteuerndes Einkommen, $T(x)$ = Steuern auf das Einkommen, $w(x)$ = Residualeinkommen und $R(y)$ = Freibeträge und steuerfreie Einkünfte. *Kakwani*'s Maß P kann man nun alternativ beziehen auf das Brutto-Einkommen y oder das zu versteuernde Einkommen x. Man erhält dann

$$(6.1) \qquad P_{T,y} = C - G_y \quad \text{oder} \quad P_{T,x} = C - G_x \; .$$

Die Differenz gibt den „indirekten“ Progressionseffekt infolge der Berücksichtigung von $R(y)$ an und ist gleich der Differenz zwischen dem Gini-Koeffizienten des zu versteuernden Einkommens und des Brutto-Einkommens, d. h. (siehe Appendix VI)

$$(6.2) \qquad P_{T,y} - P_{T,x} = G_x - G_y = q\,(G_x - G_R) \; .$$

wobei $q = m_R/m_y$ die gesamtwirtschaftliche Beanspruchungsquote von Freibeträgen u. dgl. und G_R den Gini-Koeffizienten dieser Beträge angibt. Ist das zu versteuernde Einkommen stärker konzentriert als die Freibeträge usw., dann ist der „indirekte“ Progressionseffekt positiv und vice versa. Aus einer Umformulierung von (6.2) erhält man die gesamte Progression als Summe der „direkten“ Progression $P_{T,x}$ und der eben definierten „indirekten Progression“ als

$$(6.3) \qquad \begin{aligned} P_{T,y} &= P_{T,x} + q\,(G_x - G_R) \\ &= P_{T,x} + qG_x = C - (1-q)\,G_x \quad \text{für} \quad R(y) = R \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung nur der gesetzlich allen zustehenden fixen Freibeträge $\bar{R}$ ist der „indirekte Progressionseffekt“ (wegen $G_R = 0$) gleich einem konstanten Bruchteil q des Gini-Koeffizienten G_x. Ohne jede Berücksichtigung von Freibeträgen ist (wegen $G_R = 0$ *und* $q = 0$) $P_{T,y} = P_{T,x}$ mit $y = x$.

Stellt man dieselben Überlegungen für das Umverteilungsmaß von *Musgrave-Thin* an, erhält man die alternativ auf das Brutto-Einkommen und das zu versteuernde Einkommen bezogenen Maße als

$$\text{(7.1)}\; EP_{v,y} = G_v - G_y = -\frac{t^*}{1-t^*}P_{T,y}\,bzw.\; EP_{w,x} = G_w - G_x = \frac{t}{1-t}P_{T,x}\,.$$

wobei $t^* = m_T/m_y$ die auf das Brutto-Einkommen und $t = m_T/m_x$ die auf das zu versteuernde Einkommen bezogene gesamtwirtschaftliche Steuerquote sind. Der über die Freibeträge usw. bewirkte „indirekte" Umverteilungseffekt der Steuern ist gleich der Differenz zwischen $EP_{y,y}$ und $EP_{w,x}$, so daß man — analog zu (6.3) — den gesamten, auf das Brutto-Einkommen bezogenen Umverteilungseffekt in einen „direkten" und „indirekten" Effekt wie folgt aufspalten kann (siehe Appendix VI)

$$\text{(7.2)} \qquad EP_{v,y} = EP_{w,x} + \{q\,(G_x - G_R) - \frac{q}{1-t^*}(G_w - G_R)\}$$

Der „indirekte" Umverteilungseffekt ist geringer (größer) als der „indirekte" Progressionseffekt, falls das Residualeinkommen w stärker (schwächer) konzentriert ist als die Freibeträge. Andere Umformulierungen von (7.2) erschließen weitere Zusammenhänge, die dem Leser überlassen werden sollen.

VI. Ergebnisse im Überblick

Alle Ergebnisse in den vorangegangenen Abschnitten wurden unter der Annahme abgeleitet, daß die Steuerlastverteilung eine monotone Transformation der Einkommensverteilung (vor und/oder nach Steuer) darstellt. Unter dieser zentralen Annahme lassen sich die Ergebnisse wie folgt zusammenfassen:

1. *Kakwani*'s Progressionsmaß P über die gesamte Spannweite der Einkommensverteilung ist sachlogisch zu interpretieren als die normierte *mittlere Differenz* $\Delta_{T,Tp}$ des Unterschieds zwischen der tatsächlichen und einer hypothetisch-proportionalen Steuerlastverteilung mit identischem Steueraufkommen. Das revidierte *Musgrave-Thin*-Maß $EP = G^* - G$ für die Umverteilungswirkung der Steuern ist analog zu interpretieren als die normierte mittlere Differenz $\Delta_{w,wp}$ des Unterschieds zwischen der tatsächlichen und einer hypothetisch-proportionalen Verteilung des Nach-Steuer-Einkommens mit identischer Gesamtsumme des Nach-Steuer-Einkommens. Die jeweils zugehörigen *normierten mittleren Abweichungen* $D_{T,Tp}$ bzw. $D_{w,wp}$ sind graphisch interpretiert als der maximale vertikale Abstand zwischen der Lorenz-Kurve $L_x(F)$ des Vor-Steuer-Einkommens und der Lo-

renz-Kurve $L_T(F)$ bzw. $L(F)$ der Steuern bzw. des Nach-Steuer-Einkommens.

2. Es existiert ein logisch äquivalenter Zusammenhang zwischen dem Maß $P = C - G$ über die gesamte Spannweite der Einkommensverteilung und dem Punkt-Maß $e_{t,x} = e_{T,x} - 1$, wobei $e_{t,x}$ die Elastizität des Durchschnittssteuersatzes und $e_{T,x}$ die Steuerbetragselastizität darstellen. Analog existiert eine logisch äquivalente Beziehung zwischen dem Maß $EP = G^* - G$ und dem Punkt-Maß $e_{r,x} = e_{w,x} - 1$, wobei $e_{r,x}$ die Elastizität des durchschnittlichen Netto-Steuersatzes $r(x) = 1 - t(x)$ und $e_{w,x}$ die Elastizität des Netto-Einkommens $w(x) = x - T(x)$ darstellen. Infolgedessen ist $P \gtreqless 0$ für $e_{t,x} \gtreqless 0$ und $EP \gtreqless 0$ für $e_{r,x} \gtreqless 0$.

3. Die grundlegenden Theoreme einer Lorenz-gerechten (bzw. -dominanten) Besteuerung lauten: Bei konstanter Verteilung des Vor-Steuer-Einkommens und variablem Steuertarif ist $P_{T2} \gtreqless P_{T1}$, falls $e_{t2,x} \gtreqless e_{t1,x}$ für alle x. Bei konstantem Steuertarif und variabler Verteilung des Vor-Steuer-Einkommens ist $P_{T2} \gtreqless P_{T1}$, falls $e_{t,x2}/e_{t,x1} \gtreqless e_{x1,x2}$ für alle x, wobei $x_2 = h(x_1)$. Im *Jakobsson*-Sonderfall einer proportionalen Änderung aller Vor-Steuer-Einkommen mit $e_{x1,x2} = 1$ und einer Steuerfunktion mit konstanter Elastizität a des Steuerbetrages bzw. $a - 1$ des Durchschnittssteuersatzes gilt, wie oben, $P_{T2} \gtreqless P_{T1}$, falls $e_{t,x2} \gtreqless e_{t,x1}$. (*Jakobsson* hat diesen Sonderfall nicht für die Steuerfunktion, sondern für die Funktion des Netto-Einkommens abgeleitet.) Nur in diesem Sonderfall herrscht *Separabilität*, so daß eine Änderung in der Konzentration des Nach-Steuer-Einkommens eindeutig auf eine Änderung der gesamtwirtschaftlichen Steuerquote zurückgeführt werden kann. In allen anderen Fällen herrscht *Interdependenz* zwischen $EP = G^* - G$, der gesamtwirtschaftlichen Steuerquote t und der Progression P. Die Zerlegung *Kakwani*'s ist dann nicht durchführbar.

4. Unter Berücksichtigung von Freibeträgen, steuerfreien Einkünften usw. ist es möglich zwischen einer „direkten" und einer „indirekten" Progression über die gesamte Spannweite des Einkommens zu unterscheiden. Ist das zu versteuernde Einkommen stärker konzentriert als die Verteilung der Freibeträge usw., dann ist der „indirekte" Progressionseffekt positiv und vice versa. Auf derselben Linie ist es möglich, zwischen einem „direkten" und „indirekten" Umverteilungseffekt über die gesamte Spannweite des Einkommens zu unterscheiden.

Läßt man die Monotonie-Annahme fallen, was gleichbedeutend ist mit einer *nicht-vollständigen* (linearen oder nicht-linearen, positiven oder negativen) *Korrelation* zwischen den steuerlich relevanten Variablen, bewahren alle Ergebnisse — zumindest in dieser Form — *nicht* länger ihre Gültigkeit. Daraus resultiert *der* zentrale Kritikpunkt gegen eine undifferenzierte Anwendung und Interpretation der Globalmaße P bzw. EP der Progression bzw. des Umverteilungseffekts infolge der Progression.

Anhang

I. Zu Gleichung (1.2)

Aus Gleichung (1.1) folgt

$$\delta_{T,Tp} = \int_0^{F_t} [t \cdot G(F) - T\{G(F)\}]\, dF + \int_{F_t}^{1} [T\{G(F)\} - t \cdot G(F)]\, dF$$

und wegen (siehe *Piesch* (1975), S. 23 und S. 65)

$$(*) \quad L_x(F) = \frac{1}{m_x} \int_0^F G(u)\, du \quad \text{bzw.} \quad L_T(F) = \frac{1}{m_T} \int_0^F T\{G(u)\}\, du$$

$$\delta_{T,Tp} = tm_x L_x(F_t) - m_T L_T(F_t) + m_T(1 - L_T(F_t)) - tm_x(1 - L_x(F_t))$$

oder wegen $tm_x = m_T$

$$\delta_{T,Tp} = 2\, m_T \{L_x(F_t) - L_T(F_t)\}$$

Q. E. D.

II. Zu Gleichung (1.3)

Der maximale vertikale Abstand zwischen $L_x(F)$ und $L_T(F)$ ist erreicht, falls (unter Verwendung von (*))

$$\frac{d\{L_x(F) - L_T(F)\}}{dF} = \frac{G(F)}{m_x} - \frac{T\{G(F)\}}{m_T} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{T\{G(F)\}}{G(F)} = \frac{m_T}{m_x} = t\ .$$

Wegen $T\{G(F)\}/G(F) = t\{G(F)\}$ und $t\{G(F_t)\} = t$ gilt Gleichung (1.3).

III. Zu Gleichung (3.2) (und analog Gleichung (2.2))

Aus (*) folgt

$$\frac{dL_{T(x2)}/dF}{dL_{T(x1)}/dF} = \frac{dL_{T(x2)}}{dL_{T(x1)}} = \frac{T\{h[G(F)]\}}{T\{G(F)\}} \cdot \frac{m_{T1}}{m_{T2}}$$

Differenziert man diesen Ausdruck mit Hilfe der Quotientenregel und dividiert ihn mit $dL_{T(x1)}/dF$, erhält man nach einer Umformulierung Gleichung (3.2) bzw. für $e_{x2,x1} = 1$ die Gleichung (2.2). Zu berücksichtigen ist dabei lediglich, daß die erste Ableitung der inversen Verteilungsfunktion definiert ist als $dG(F)/dF = 1/f[G(F)]$ (Siehe *Piesch* (1975), 18, Fn. 1).

IV. Zu Gleichung (4.1)

Aus Gleichung (1.4) folgt die vierte Ableitung der „Progressionsfunktion" $P(F)$

$$\frac{d^4 P(F)}{dP^4} = 2\left\{\frac{d^3 L_x(F)}{dF^3} - \frac{d^3 L_T(F)}{dF^3}\right\} = 2\left\{\frac{d^2 G(F)}{dF^2 m_x} - \frac{d^2 T\{G(F)\}}{dF^2 m_T}\right\}$$

Wegen $d^2 G(F)/dF^2 = -f'(x)/f^3(x)$ und $d^2 T\{G(F)\}/dF^2 = -T''(x)\, f'(x)/f^3(x)$ (siehe *Piesch* (1975), 18, Fn. 1) mit $x = G(F)$ und $T''(x) = (de_{t,x}/dx)\, t(x) - t'(x)\, e_{T,x}$ folgt daraus — nach entsprechender Substitution und Umformulierung — die Gleichung (1.4).

V. Zu Gleichung (4.2)

Nach Produktintegration gilt für den Gini-Koeffizienten G bzw. C die Gleichung (siehe *Piesch* (1975), 31 f. für G und analog für C)

$$m_x G = 2m_x \int_0^1 \{F - L_x(F)\}\, dF = \int_0^1 \{F\, G(F) - m_x L_x(F)\}\, dF$$
$$= \int_a^b \{F(x) - F^2(x)\}\, dx$$

$$m_T C = 2m_T \int_0^1 \{F - L_T(F)\}\, dF = \int_0^1 \{F\, T\{G(F)\} - m_T L_T(F)\}\, dF$$
$$= \int_{T(a)}^{T(b)} \{F\{T(x)\} - F^2\{T(x)\}\}\, dT(x) = \int_a^b \{F(x) - F^2(x)\}\, T'(x)\, dx$$

Bildet man die Differenz $P = C - G$, erhält man Gleichung (4.2).

VI. Zu Gleichung (5.2) und (7.2)

Die Gleichung (6.) entsprechende Gleichung für die Gini-Koeffizienten erhält man als

$$G_v = \frac{1}{1-t} G_y - \frac{t}{1-t} G_T = \frac{1-q}{1-t} G_x + \frac{q}{1-t} G_R - \frac{t}{1-t} R_T$$
$$= \frac{q}{1-t} G_R + \frac{(1-t)-q}{1-t} G_w$$

Aus dieser grundlegenden Identitätsgleichung lassen sich die Zusammenhänge zwischen den Gini-Koeffizienten aller interessierenden Variablen leicht ermitteln.

Zusammenfassung

Der Beitrag zeigt, wie das Progressions- und Umverteilungsmaß von *Kakwani* und *Musgrave-Thin sachlogisch* zu interpretieren sind, welchen (Punkt-)Elastizitätsmaßen sie entsprechen, welche Theoreme einer lorenzgerechten Besteuerung gelten und wie Freibeträge etc. berücksichtigt werden können. Anlaß des Beitrags ist der Artikel von *Petersen* in dieser Zeitschrift (Heft 1, 1981).

Summary

In this article, the *Kakwani* and *Musgrave-Thin* range-measures of tax progessivity and redistribution are reconstructed and interpreted in terms of deviations from proportionality and in terms of point-elasticity measures. Tax allowances are incorporated into the range-measures. Well known theorems on 'Lorenz dominance' are restated and generalized.

Literatur

Bhattacharya, N. and B. *Mahalanobis* (1967), Regional Disparities in Household Consumption in India. Journal of the American Statistical Association 62 (1967), 143 - 161.

Gastwirth, J. L. (1971), A General Definition of the Lorenz Curve. Econometrica 39 (1971), 1037 - 1040.

Jakobsson, U., (1976), On the Measurement of the Degree of Progression. Journal of Public Economics 5 (1976), 161 - 168.

Kakwani, N. C. (1977 a), Measurement of Tax Progressivity: An International Comparison. The Economic Journal 87 (1977), 71 - 80.

— (1977 b), Applications of Lorenz Curves in Economic Analysis. Econometrica 45 (1977), 719 - 727.

Musgrave, R. A. and T. *Thin (1948),* Income Tax Progression 1929 - 48. Journal of Political Economy 56 (1948), 498 - 514.

Petersen, H.-G. (1981), Some Further Results on Income Tax Progression. Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften 101 (1981), 45 - 59.

Pfähler, W. (1981 a), A General Definition on the Relative Lorenz Curve. Göttingen 1981 (Veröffentlichung in Vorbereitung).

— (1981 b), Measurement of Tax Progressivity and Redistribution by Lorenz Curves. Göttingen 1981 (Veröffentlichung in Vorbereitung).

Piesch, W. (1967), Konzentrationsmaße von aggregierten Verteilungen, in: A. E. Ott (Hrsg.), Theoretische und empirische Beiträge zur Wirtschaftsforschung, Tübingen.

— (1975), Statistische Konzentrationsmaße, Tübingen.

Pollak, H. (1980), Steuertarife, in: F. Neumark unter Mitwirkung von N. Andel und H. Haller (Hrsg.), Handbuch der Finanzwissenschaft, Bd. II, 3. Aufl., Tübingen.

Suits, D. (1977), Measurement of Tax Progressivity. American Economic Review 67 (1977), 747 - 752.

Taguchi, T. (1968), Concentration-Curve and Structures of Skew Populations. Annals of the Institute of Statistical Mathematics 20 (1968), 107 - 141.