

# Identifikation und Schätzung ökonomischer Zeitreihenmodelle mit Fehlern in den Variablen

Von Eugen Nowak

An einer Reihe von einfachen ökonomischen Modellen wird demonstriert, daß sich ein lineares Zeitreihenmodell unter den üblichen Annahmen in der Regel auch bei fehlerbehafteten Daten allein aus den Daten konsistent schätzen läßt. Das Schätzverfahren basiert weitgehend auf der Methode der Instrumentenvariablen mit zeitlich verschobenen Daten als Instrumente.

## 1. Einleitung<sup>1</sup>

Die statistische Behandlung linearer Regressionsmodelle, in welchen die Beobachtung der exogenen und endogenen Variablen stochastischen Fehlern unterworfen ist, trifft auf ein in der Statistik wohlbekanntes Identifikationsproblem<sup>2</sup>. Dieses soll hier wie folgt formuliert werden. Ein Modell ohne Fehler in den Variablen sei identifizierbar im Sinne der konsistenten Schätzung seiner Parameter<sup>3</sup>. Werden dem Modell unter den üblichen Annahmen über Störvariablen Beobachtungsfehler hinzugefügt, so kann sich ein Fehlermodell ergeben, das sich nicht mehr allein aus den Beobachtungsdaten konsistent schätzen läßt.

In der vorliegenden Arbeit soll nun an einer Reihe von einfachen ökonomischen Modellen demonstriert werden, daß im Fall des Vorliegens einer Zeitstruktur im Modell das geschilderte Identifikationsproblem praktisch nicht zum Tragen kommt. Und zwar soll die These illustriert werden, daß sich ein lineares Zeitreihenmodell unter den üblichen (einfachen) Annahmen in der Regel auch bei Fehlern in den Variablen mit geeigneten Methoden allein aus den Daten konsistent schätzen läßt.

Dieser Sachverhalt kann wie folgt erklärt werden. Ein Zeitreihenmodell läßt sich unter den üblichen Annahmen in natürlicher Weise so spezifizieren, bzw. ist von seiner Struktur her bereits so spezifiziert, daß

---

<sup>1</sup> Die vorliegende Arbeit baut auf den Ergebnissen von *Nowak* (1975 b), (1976 a, b) auf. Der Verfasser dankt Herrn Prof. H. Schneeweiß für wertvolle Hinweise.

<sup>2</sup> Vgl. *Malinvaud* (1970) und *Schönfeld* (1971).

<sup>3</sup> Die Begriffsbildungen zur Identifizierbarkeit sind bei *Schönfeld* (1975) und *Schneeweiß* (1978) genau eingeführt.

das Modell ohne Fehler in den Variablen überbestimmt ist, in dem Sinn, daß zur Bestimmung der Parameter in der Form ihrer konsistenten Schätzung mehr unabhängige Schätzgleichungen zur Verfügung stehen als es die Zahl der unbekanntenen Parameter erfordert. Die Gleichungen bleiben bei der Einbringung von Beobachtungsfehlern in das Modell in ihrer Struktur weitgehend erhalten und werden in der Regel gerade so modifiziert, daß sie zur Bestimmung der größeren Zahl von Parametern des nun vorliegenden Fehlermodells ausreichen. Zumeist ist auch das Fehlermodell noch überbestimmt.

Diese im folgenden eindimensionale Zeitreihenmodelle betreffende Argumentation entspricht den Bemerkungen *Goldbergers* (1972, 996) zur Identifikation von überidentifizierten Simultanen Gleichungsmodellen bei Einbringen von Fehlern in die Variablen: „Errors of measurement in (exogenous) variables need not destroy identifiability, provided that the model is otherwise overidentified. In effect, one can trade off overidentifying restrictions against the underidentifiability introduced by measurement error.“ Diese Überlegungen führten zu *Geracis* Arbeiten (1974, 1976) über die Identifikation interdependenter Modelle mit Fehlern in den Variablen.

Allgemeine Ergebnisse zur Identifikation von Zeitreihenmodellen unter dem oben beschriebenen Gesichtspunkt liegen vor bei *Maravall* und *Aigner* (1977) in vollständig parametrisierten Modellen mit seriell unkorrelierten Beobachtungsfehlern und *Nowak* (1977) mit autokorrelierten Fehlervariablen. Die Spezifikation mit autokorrelierten Fehlern kommt einer Forderung *Malinvauds* (1970, 398) nach. *Nowak* (1979) verallgemeinert die Ergebnisse weiter auf teilweise nichtparametrisierte Modelle (d. h. Modelle mit unendlich vielen Parametern).

Im Gegensatz zu der allgemeinen Betrachtungsweise in den eben genannten Arbeiten werden nun hier einzelne einfache Modelle betrachtet. In diesen wird im einzelnen und elementar demonstriert, wie verschiedene zeitstrukturelle Komponenten im Fehlermodell zur Identifizierbarkeit führen. Eine Übersicht über die behandelten Modelle wird im nachfolgenden Kapitel gegeben. Die Fehlervariablen werden in den Modellen der Einfachheit halber weitgehend seriell unkorreliert angenommen. Dies ist nicht prinzipiell notwendig, wie die oben erwähnten Ergebnisse und die Resultate des hiesigen Kapitels 5 zeigen.

## 2. Modellübersicht und grundlegende Definitionen

Im einzelnen behandelt werden die folgenden Modelle. Das univariate Regressionsmodell in verschiedenen Versionen. Die Regressionsbeziehung zwischen den wahren (unbeobachtbaren) Variablen ist

(1) 
$$\eta_t = \alpha \zeta_t + \varepsilon_t$$

Beobachtet werden die (fehlerbehafteten) Variablen

(2) 
$$\begin{aligned} z_t &= \zeta_t + s_t \\ y_t &= \eta_t + w_t \end{aligned}$$

Zeitstruktur erhält das Modell über die serielle Korrelation einzelner Variablen. In einer Version wird Autokorrelation in der wahren exogenen Variablen  $\zeta_t$  vorausgesetzt, während die Störvariablen  $\varepsilon_t, s_t, w_t$  i.i.d. sind. Für weitere Versionen ist Autokorrelation des Fehlers  $s_t$  in der beobachteten exogenen Variablen charakteristisch.

Ferner werden drei für die Ökonometrie typische multiple Regressionsmodelle betrachtet. Die Regressionsbeziehungen zwischen den wahren Variablen sind

(3) 1. statisches Modell 
$$\eta_t = \beta_1 \xi_{t1} + \beta_2 \xi_{t2} + \varepsilon_t = \beta' \xi_t + \varepsilon_t$$

(4) 2. autoregressives Modell: 
$$\eta_t = \gamma \eta_{t-1} + \alpha \zeta_t + \varepsilon_t$$

(5) 3. Modell mit Lag-Struktur: 
$$\eta_t = \beta_1 \zeta_t + \beta_2 \zeta_{t-1} + \varepsilon_t$$

Beobachtet werden die Variablen

(6) 
$$\begin{aligned} x_{ti} &= \xi_{ti} + v_{ti} \quad i = 1, 2, \text{ bzw. } z_t = \zeta_t + s_t \\ y_t &= \eta_t + w_t \end{aligned}$$

Die Zeitstruktur wird dem statischen Modell über Autokorrelation oder (und) Kreuzkorrelation der exogenen Variablen  $\xi_{ti}, i = 1, 2$ , auferlegt, während die beiden übrigen Modelle bereits in der algebraischen Form der Beziehungen (4) und (5) eine Zeitstruktur aufweisen. Die Störvariablen  $\varepsilon_t, v_{ti}$  bzw.  $s_t, w_t$  werden einheitlich als seriell unkorreliert vorausgesetzt.

Für alle Modelle werden ganz generell die folgenden Annahmen getroffen:

- A 1) Der zugrunde gelegte Zeitbereich in (1) bis (6) ist  $t \in Z = \{ \dots, -1, 0, 1, \dots \}$ .
- 2) Die (theoretischen) Mittelwerte aller auftretenden Variablen sind null.
- 3) Die Störprozesse  $(\varepsilon_t), (s_t)$  bzw.  $(v_{ti}), (w_t), t \in Z$ , sind untereinander und vom Prozeß der wahren exogenen Variablen  $(\zeta_t)$  bzw.  $(\xi_t)$  stochastisch unabhängig.
- 4) Alle im folgenden auftretenden asymptotischen (empirischen) Momente<sup>4</sup> zweiter Ordnung existieren und stimmen im Zusam-

---

<sup>4</sup> Zur Berechnung der asymptotischen Momente aus elementaren Annahmen vgl. *Schneeweiß* (1976) und *Nowak* (1975 a).

menhang mit den Störvariablen mit den entsprechenden theoretischen Momenten überein.

Die Identifizierbarkeit der einzelnen Modelle wird nach dem folgenden (Identifikations-)Verfahren untersucht. Aus der Spezifikation des Modells werden — zu einem entscheidenden Teil nach der Methode der Instrumentenvariablen mit zeitlich verschobenen Daten als Instrumente — Beziehungen zwischen den Parametern des Modells und asymptotischen zweiten Momenten der beobachteten Variablen abgeleitet, die auf ihre eindeutige Lösbarkeit nach den Parametern zu untersuchen sind. Gegebenenfalls ist die Modellspezifikation geeignet zu ergänzen, so daß sich eine eindeutige Lösung nach den Parametern ergibt. Ist ein Parameter in den Beziehungen eindeutig festgelegt, so heißt er identifizierbar.

Die Lösungen für die Parameter lassen sich unten durchweg in der Form stetiger Funktionen von asymptotischen Momenten der beobachteten Variablen angeben. Werden nun in diesen Funktionen die asymptotischen Momente durch die empirischen Momente der beobachteten Variablen zu laufenden Stichprobengrößen ersetzt, so ergeben sich unmittelbar konsistente Schätzer der Parameter.

Die nach dem geschilderten Verfahren untersuchte Identifizierbarkeit eines Modells ist in Übereinstimmung mit den bei *Schönfeld* (1975) verwendeten Begriffsbildungen genauer die auf den (asymptotischen) Momenten zweiter Ordnung basierende Identifizierbarkeit zu nennen.

Shockvariable  $\varepsilon_t$  und Fehlervariable  $w_t$  sind unten in allen Modellen identisch spezifiziert. Sie treten in allen Modellen — mit Ausnahme des autoregressiven Modells — in völlig analoger algebraischen Verknüpfung mit der beobachteten endogenen Variablen  $y_t$  auf. Daher sind die Varianzen  $\sigma_\varepsilon^2$  und  $\sigma_w^2$  beider Variablen nur im autoregressiven Modell getrennt und in den übrigen Modellen in der kombinierten Form  $\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2$  identifizierbar. In beiden Fällen wird bei Identifizierbarkeit der übrigen Parameter von der Identifizierbarkeit des Modells gesprochen. Ist das Modell bezüglich eines Maßes  $\mu$  auf dem Parameterraum für fast alle Parameterwerte identifizierbar, so heißt das Modell  $\mu$ -fast identifizierbar. Im folgenden bezeichne  $\mu$  das Lebesguesche Maß über dem Parameterraum.

### 3. Das univariate Modell mit i.i.d. Störvariablen

Das Modell sei zunächst definiert durch die Beziehungen (1) und (2), die unter A formulierten Annahmen sowie

B 1) Die Störvariablen  $\varepsilon_t, s_t, w_t$  sind jeweils i.i.d. mit Varianzen  $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_s^2, \sigma_w^2$

2) Mit Wahrscheinlichkeit 1 existieren die Grenzwerte

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \zeta_{t+j} \zeta_t =: m_\zeta(j), j \in Z$$

3) Für ein  $j_1 \neq 0$  gilt  $m_\zeta(j_1) \neq 0$ .

Im Modell ergibt sich als Beziehung zwischen den beobachteten Variablen

$$(7) \quad y_t = \alpha z_t + \varepsilon_t + w_t - \alpha s_t = \alpha z_t + u_t.$$

Die latente Variable  $u_t$  ist mit den beobachteten exogenen und endogenen Variablen  $z_t$  und  $y_t$  (asymptotisch) korreliert in der Form

$$(8) \quad \begin{aligned} \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t z_t u_t &= \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t (\zeta_t + s_t) (\varepsilon_t + w_t - \alpha s_t) = \\ &= -\alpha \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t s_t^2 = -\alpha \sigma_s^2 \end{aligned}$$

$$\text{plim} \frac{1}{T} \sum_t y_t u_t = \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t (\alpha \zeta_t + \varepsilon_t + w_t) (\varepsilon_t + w_t - \alpha s_t) = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2$$

Multiplikation der Gleichung (7) nacheinander mit den Variablen  $z_t$  und  $y_t$ , sowie die Anwendung der Operation  $\text{plim} \frac{1}{T} \sum_t \cdot$  führt nach (8) zu einer Verknüpfung der Modellparameter  $\alpha, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_s^2, \sigma_w^2$  mit den Momenten

$$m_z(0) := \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t z_t^2, m_{zy}(0) := \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t z_t y_t, m_y(0) := \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t y_t^2$$

der beobachteten Variablen in der Form

$$(9) \quad \begin{aligned} m_{zy}(0) &= \alpha m_z(0) - \alpha \sigma_s^2 \\ m_y(0) &= \alpha m_{yz}(0) + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2 \end{aligned}$$

Das Identifikationsproblem des univariaten Fehlermodells läßt sich nun wie folgt charakterisieren. Ein Verzicht auf die Annahme B 3) führt zu einer Modellspezifikation, die insbesondere ein Modell umfaßt, in welchem die Gleichungen (9) die einzigen wirksamen Bestimmungs-

gleichungen für die Parameter sind. In diesem Fall besteht eine Diskrepanz von zwei Gleichungen zur Bestimmung (wenigstens) der drei Parameter  $\alpha, \sigma_s^2, \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2$ . Als spezielles Modell kann das univariate Fehlermodell mit jeweils i.i.d. normalverteilten Variablen  $\zeta_t, \varepsilon_t, s_t, w_t$  angegeben werden. Für dieses sind die Gleichungen (9) äquivalent zu den Likelihood-Gleichungen für die genannten Parameter<sup>5</sup>.

Die erste der Gleichungen (9) zeigt unmittelbar die Inkonsistenz der KQ-Schätzung für  $\alpha$

$$\hat{\alpha}_{KQ} \xrightarrow{P} \frac{m_{zy}(0)}{m_z(0)} = \alpha \left[ 1 - \frac{\sigma_s^2}{m_z(0)} \right] < \alpha$$

Sie legt jedoch bei bekannter Varianz  $\sigma_s^2$  den folgenden konsistenten Schätzer  $\hat{\alpha}$  nahe

$$(10) \quad \alpha = \frac{m_{zy}(0)}{m_z(0) - \sigma_s^2} \mapsto \hat{\alpha} = \frac{\sum_t z_t y_t}{\sum_t z_t^2 - T \sigma_s^2};$$

dabei sei hingewiesen auf

$$m_z(0) - \sigma_s^2 = m_\zeta(0) > 0.$$

Die Modellspezifikation impliziert ebenfalls für  $j \neq 0$  die Relationen

$$\text{plim} \frac{1}{T} \sum_t z_{t+j} u_t = \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t (\zeta_{t+j} + s_{t+j}) (\varepsilon_t + w_t - \alpha s_t) = 0$$

$$\text{plim} \frac{1}{T} \sum_t z_{t+j} z_t = \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t (\zeta_{t+j} + s_{t+j}) (\zeta_t + s_t) = \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t \zeta_{t+j} \zeta_t = m_\zeta(j)$$

Diese zeigen, daß aufgrund der Annahme B 3) die Variable  $z_{t+j_1}$  in bezug auf die Gleichung (7) die klassischen Voraussetzungen einer Instrumentenvariablen zur konsistenten Schätzung des Regressionsparameters erfüllt. Im Rahmen der Identifikation wird daher mittels der Operation

$$\text{plim} \frac{1}{T} \sum_t z_{t+j_1} \cdot | y_t = \alpha z_t + u_t$$

die Gleichung

$$(11) \quad m_{zy}(j_1) = \alpha m_z(j_1)$$

gebildet mit

<sup>5</sup> Vgl. Schönfeld (1971), Kap. 11.

$$m_{zy}(j_1) := \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t z_{t+j_1} y_t, m_z(j_1) := \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t z_{t+j_1} z_t = m_\zeta(j_1) \neq 0$$

Daraus ergibt sich der Parameter  $\alpha$  in der Form

$$(12) \quad \alpha = \frac{m_{zy}(j_1)}{m_z(j_1)}$$

bzw. der konsistente Schätzer  $\hat{\alpha}$  für  $\alpha$

$$(13) \quad \hat{\alpha} = \frac{\sum_t z_{t+j_1} y_t}{\sum_t z_{t+j_1} z_t}$$

Mit den Gleichungen (9) und (11) liegen nun drei wirksame Gleichungen für die drei Parameter  $\alpha, \sigma_s^2, \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2$  vor. Sie liefern  $\alpha$  in (12) und die übrigen Parameter in der Form

$$(14) \quad \begin{aligned} \sigma_s^2 &= m_z(0) - \frac{m_{zy}(0)}{\alpha} \\ \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2 &= m_y(0) - \alpha m_{yz}(0) \end{aligned}$$

sowie entsprechende konsistente Schätzer. Das Modell ist somit mit den genannten Parametern identifiziert.

Im Zusammenhang mit der Schätzung des Regressionsparameters stellt sich die Frage nach der Effizienz des Schätzers  $\hat{\alpha}$  in (13). Hierzu soll seine asymptotische Effizienz mit derjenigen des in (10) gegebenen Schätzers  $\hat{\alpha}$  bei bekannter Fehlervarianz  $\sigma_s^2$  verglichen werden. Beide Schätzer sind unter geeigneten zusätzlichen Annahmen asymptotisch normalverteilt. Die asymptotische Normalverteilung von  $\hat{\alpha}$  bei gegebener Realisation des Prozesses  $(\zeta_t)$  wird garantiert z. B. durch die ergänzenden Annahmen

B 4) Es existieren die Momente  $E|\varepsilon_t|^{2+\delta}, E|s_t|^{2+\delta}, E|w_t|^{2+\delta}$  für ein  $\delta > 0$

5) Mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt:  $|\zeta_t| \leq c < +\infty, t \in \mathbb{Z}$ .

Nach der Anwendung eines zentralen Grenzwertsatzes<sup>6</sup> mit abhängigen Variablen ergibt sich

$$(15) \quad \sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha | (\zeta_t)) \sim N\left(0, \frac{m_z(0)}{m_z(j_1)^2} \sigma_u^2\right) \text{ mit } \sigma_u^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2 + \alpha^2 \sigma_s^2$$

(Zum vollständigen Beweis siehe Nowak (1976 a), Kap. 5).

<sup>6</sup> Vgl. Schönfeld (1971), C. 7.

Wird statt B 4) 5) die Existenz des 4-ten Moments  $E s_t^4$  der Fehlervariablen  $s_t$  gefordert, so erhält  $\hat{\alpha}$  die asymptotische Verteilung<sup>7</sup>

$$(16) \quad \sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha | (\zeta_t)) \sim N(0, \frac{1}{m_\zeta(0)^2} [m_\zeta(0) \sigma_u^2 + \alpha^2 (E s_t^4 - 2 \sigma_s^4)])$$

Zum Vergleich der in (15) und (16) auftretenden asymptotischen Varianzen ist zu beachten, daß gilt

$$m_\zeta(j_1) \leq m_\zeta(0), \text{ jedoch auch } E s_t^4 - 2 \sigma_s^4 \geq 0,$$

so daß sich im allgemeinen keine Überlegenheit des Schätzers  $\hat{\alpha}$  bei bekannter Fehlervarianz  $\sigma_s^2$  folgern läßt. Insbesondere nicht im Fall normalverteilter Fehlervariablen  $s_t$ . Dann ist nämlich

$$E s_t^4 = 3 \sigma_s^4 \text{ und somit } E s_t^4 - 2 \sigma_s^4 = \sigma_s^4 > 0.$$

#### 4. Drei für die Ökonometrie typische multiple Regressionsmodelle

##### 4.1 Das statische Modell

Das Modell ist bis auf die unten angegebenen (identifizierenden) Bedingungen definiert durch die Beziehungen (3) und (6), die unter A formulierten Annahmen sowie

C 1) Die Störvariablen  $\varepsilon_t, v_{ti}, w_t$  sind seriell unkorreliert.

Im Modell ergibt sich als Beziehung zwischen den beobachteten Variablen

$$(17) \quad y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t + w_t - \beta_1 v_{t1} - \beta_2 v_{t2} = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + u_t.$$

Die latente Variable  $u_t$  ist mit den beobachteten Variablen  $x_{t+j,i}$  und  $y_t$  in der Form

$$(18) \quad \begin{aligned} \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t x_{ti} u_t &= \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t (\xi_{tj} + v_{ti}) u_t = -\beta_i \sigma_{vi}^2, i = 1, 2 \\ \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t x_{t+j,i} u_t &= \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t (\xi_{t+j,i} + v_{t+j,i}) u_t = 0, j \neq 0, i = 1, 2 \\ \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t y_t u_t &= \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t (\beta' \xi_t + \varepsilon_t + w_t) u_t = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2 \end{aligned}$$

korreliert; dabei ist  $\sigma_{vi}^2 = E v_{ti}^2$ .

<sup>7</sup> Vgl. Schneeweiß (1976).



Im Zusammenhang mit der Formulierung der Bestimmungsgleichungen für die Parameter sind die folgenden Bezeichnungen einzuführen

$$\begin{aligned}
 m_{xy}(j) &:= \begin{pmatrix} m_{1y}(j) \\ m_{2y}(j) \end{pmatrix} := \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t \begin{pmatrix} x_{t+j,1} y_t \\ x_{t+j,2} y_t \end{pmatrix} \\
 M_x(j) &:= \begin{pmatrix} m_{11}(j) & m_{12}(j) \\ m_{21}(j) & m_{22}(j) \end{pmatrix} := \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t \begin{pmatrix} x_{t+j,1} x_{t1} & x_{t+j,1} x_{t2} \\ x_{t+j,2} x_{t1} & x_{t+j,2} x_{t2} \end{pmatrix} = M_x'(-j) \\
 \Sigma_v &:= \begin{pmatrix} \sigma_{v1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v2}^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Wird  $M_\xi(j)$  in zu  $M_x(j)$  entsprechender Weise mit den Variablen  $\xi_{it}$  definiert, so folgt aus der Modellspezifikation

$$(19) \quad M_x(0) = M_\xi(0) + \Sigma_v, \quad M_x(j) = M_\xi(j) \quad \text{für } j \neq 0.$$

Multiplikation der Beziehung (17) nacheinander mit den Variablen  $x_{t+j,i}$  und  $y_t$  sowie Anwendung der Operation  $\text{plim} \frac{1}{T} \sum_t \cdot$  liefert unter Berücksichtigung von (18) die Gleichungen

$$(20) \quad m_{xy}(0) = M_x(0) \beta - \Sigma_v \beta$$

$$(21) \quad m_{xy}(j) = M_x(j) \beta \quad \text{für } j \neq 0, j \in Z$$

$$(22) \quad m_y(0) = m'_{xy}(0) \beta + \sigma_\epsilon^2 + \sigma_w^2.$$

In diesen sind die Parameter  $\beta, \Sigma_v, \sigma_\epsilon^2 + \sigma_w^2$  eindeutig festgelegt als Funktion der beobachteten Variablen durch die notwendige und hinreichende Bedingung

$$C2) \quad \text{rg} \begin{pmatrix} \vdots \\ M_\xi(1) \\ M_\xi(-1) \\ M_\xi(-2) \\ \vdots \end{pmatrix} = 2$$

Denn genau in diesem Fall ergibt sich  $\beta$  aus den Gleichungen (21),  $\sigma_{v1}^2$  und  $\sigma_{v2}^2$  aus (20) sowie  $\sigma_\epsilon^2 + \sigma_w^2$  aus (22).

Bei Nowak (1975 b), Kap. 3, wurde gezeigt, daß die Gleichungen (20) bis (22) das vollständige Gleichungssystem zur Untersuchung der Identifizierbarkeit des Modells (im gegenwärtigen Sinne) darstellt. Die Bedingung C 2) ist somit notwendig und hinreichend zur Identifizierbarkeit der genannten Parameter.

Die folgenden beiden Forderungen nach Autokorrelation oder Kreuzkorrelation der Variablen  $\xi_{t1}$  und  $\xi_{t2}$  sind jeweils hinreichend zur Gültigkeit der Bedingung C 2). Zunächst die Bedingung

$$C 2_1) \quad \det M_{\xi}(-1) = m_{11}(1) m_{22}(1) - m_{12}(1) m_{21}(1) \neq 0$$

Dies ist erfüllt im Fall

$$\begin{aligned} m_{11}(1) \neq 0 \\ m_{22}(1) \neq 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \xi_{t2} \neq \lambda \xi_{t1},$$

also bei Autokorrelation in den wahren Regressoren  $\xi_{t1}$  und  $\xi_{t2}$  und abwesender Multikollinearität. Und die Bedingung

$$C 2_2) \quad \det \begin{bmatrix} M_{\xi}(1) \\ M_{\xi}(-1) \end{bmatrix} := \det \begin{pmatrix} m_{21}(1) & m_{22}(1) \\ m_{11}(1) & m_{12}(-1) \end{pmatrix} = \\ = m_{21}(1)^2 - m_{11}(1) m_{22}(1) \neq 0.$$

Diese ist bei Kreuzkorrelation  $m_{21}(1) \neq 0$  der wahren Regressoren insbesondere auch bei fehlender Autokorrelation  $m_{ii}(1) = 0$  erfüllt.

Unter der Bedingung C 2<sub>1</sub>) ergeben sich aus den Gleichungen (20) bis (22) schließlich die Parameter in der Form

$$(23) \quad \beta = M_x(-1)^{-1} m_{xy}(-1)$$

$$(24) \quad \sigma_{vi}^2 = \frac{1}{\beta_i} e_i' [M_x(0) \beta - m_{xy}(0)] \quad \text{mit} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, i = 1, 2$$

$$(25) \quad \sigma_{\varepsilon}^2 + \sigma_w^2 = m_y(0) - m_{xy}(0)' \beta$$

und hierzu entsprechende konsistente Schätzer.

#### 4.2 Das autoregressive Modell

Das Modell sei zunächst definiert durch die Beziehungen (4) und (6), die unter A formulierten Annahmen sowie

D 1) Die Störvariablen  $\varepsilon_t$ ,  $s_t$ ,  $w_t$  sind seriell unkorreliert.

2) Das Modell ist stabil mit  $|\gamma| < 1$ .

Als Beziehung zwischen den beobachteten Variablen ergibt sich

$$(26) \quad y_t = \gamma y_{t-1} + \alpha z_t + \varepsilon_t + w_t - \gamma w_{t-1} - \alpha s_t = \gamma y_{t-1} + \alpha z_t + u_t.$$

Insbesondere unter Beachtung der Abhängigkeiten

$$\begin{aligned} z_t &= z_t(s_t), \quad u_t = u_t(\varepsilon_t, w_t, w_{t-1}, s_t) \\ y_t &= y_t(w_t, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots) = \eta_t(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots) + w_t \end{aligned}$$

folgen die stochastischen Relationen

$$\begin{aligned}
 \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t z_t u_t &= \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t (\zeta_t + s_t) u_t = -\alpha \sigma_s^2 \\
 \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t z_{t-1} u_t &= \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t (\zeta_{t-1} + s_{t-1}) u_t = 0 \\
 \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t y_t u_t &= \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t (\gamma \eta_{t-1} + \alpha \zeta_t + \varepsilon_t + w_t) u_t = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2 \\
 \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t y_{t-1} u_t &= \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t (\gamma \eta_{t-2} + \alpha \zeta_{t-1} + \varepsilon_{t-1} + w_{t-1}) u_t = -\gamma \sigma_w^2 \\
 \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t y_{t-2} u_t &= \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t (\gamma \eta_{t-3} + \alpha \zeta_{t-2} + \varepsilon_{t-2} + w_{t-2}) u_t = 0 .
 \end{aligned}$$

Damit lassen sich aus (26) für die Parameter  $\gamma, \alpha, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_s^2, \sigma_w^2$  die folgenden Bestimmungsgleichungen ableiten; die Konstruktionsidee sowie der zu bestimmende Parameter sind an der jeweiligen Gleichung angegeben:

$$\begin{aligned}
 & y_{t-1} \mid m_y(-1) = \gamma m_y(0) + \alpha m_{yz}(-1) - \gamma \sigma_w^2 \rightarrow \sigma_w^2 \\
 & z_t \mid m_{zy}(0) = \gamma m_{zy}(1) + \alpha m_z(0) - \alpha \sigma_s^2 \rightarrow \sigma_s^2 \\
 (27) \quad & \left. \begin{aligned} y_{t-2} \mid m_y(-2) &= \gamma m_y(-1) + \alpha m_{yz}(-2) \\ z_{t-1} \mid m_{zy}(-1) &= \gamma m_{zy}(0) + \alpha m_z(-1) \end{aligned} \right\} \rightarrow \gamma, \alpha \\
 & y_t \mid m_y(0) = \gamma m_y(1) + \alpha m_{yz}(0) + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2 \rightarrow \sigma_\varepsilon^2
 \end{aligned}$$

Als Bezeichnungen sind neben den in Kapitel 3 eingeführten verwendet:

$$\begin{aligned}
 m_{zy}(j) &:= \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t z_{t+j} y_t = m_{yz}(-j) \\
 m_y(j) &:= \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t y_{t+j} y_t = m_y(-j) .
 \end{aligned}$$

Es mögen die Momente der wahren Variablen  $m_\eta(j), m_{\eta\zeta}(j)$ , usw. analog zu den Momenten  $m_y(j), m_{yz}(j)$ , usw. definiert sein. Dann impliziert die Modellspezifikation die Beziehungen

$$(28) \quad \left. \begin{aligned} m_z(j) &= m_\zeta(j) \\ m_y(j) &= m_\eta(j) \end{aligned} \right\} \text{ für } j \neq 0, \quad m_{zy}(j) = m_{\zeta\eta}(j) \quad \text{für alle } j .$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung zur eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen (27) erweist sich

$$\text{D 3) } \quad \det \begin{pmatrix} m_\eta(1) & m_{\eta\zeta}(-2) \\ m_{\zeta\eta}(0) & m_\zeta(1) \end{pmatrix} = m_\eta(1) m_\zeta(1) - m_{\zeta\eta}(0) m_{\eta\zeta}(-2) \neq 0 .$$

Genau in diesem Fall sind zunächst  $\gamma$ ,  $\alpha$  und anschließend die übrigen Parameter bestimmt. Dabei ist insbesondere darauf hinzuweisen, daß nun die Varianzen  $\sigma_\varepsilon^2$  und  $\sigma_w^2$  getrennt festgelegt sind.

Die Bedingung D 3) ist unter der Voraussetzung  $m_\zeta(1) \neq 0$  höchstens für ganz spezielle Parameterwerte  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$  und Momentenfolgen ( $m_\zeta(j)$ ) verletzt. Im autoregressiven Modell gilt nämlich im allgemeinen  $m_\eta(1) \neq 0$  und es gibt keine allgemein gültige Relation, welche die Identität  $m_\eta(1) m_\zeta(1) = m_{\zeta\eta}(0) m_{\eta\zeta}(2)$  herbeiführt. Genauer ist die Bedingung

$$D 3_1) \quad m_\zeta(1) \neq 0$$

also die Forderung nach einer Autokorrelation der wahren exogenen Variablen  $\zeta_t$  über eine Periode hinreichend für die Identifizierbarkeit des Modells für fast alle Parameterwerte des Parameterraums — d. h. hinreichend für die  $\mu$ -fast Identifizierbarkeit des Modells.

Die Gleichungen (27) repräsentieren i. a. nicht die vollständige im Modell gegebene Einschränkung der Parameter. Tatsächlich erlaubt die Methode der Instrumentenvariablen mit Hilfe weiter verzögerten beobachteten Variablen  $z_{t-j}$  und  $y_{t-j}$  die Gewinnung zusätzlicher Bestimmungsgleichung. Allerdings ist zu beachten, daß im autoregressiven Modell die Abhängigkeit

$$\eta_t = \eta_t(\zeta_t, \zeta_{t-1}, \zeta_{t-2}, \dots)$$

besteht, so daß gilt

$$(29) \quad m_{\eta\zeta}(-j) = 0 \quad \text{für } j > j_0 > 0, \quad \text{wenn } m_\zeta(j) = 0 \quad \text{für } |j| > j_0.$$

Vgl. hierzu  $m_{\eta\zeta}(-j) \sim \eta_{t-j}(\zeta_{t-j}, \zeta_{t-j-1}, \dots) \zeta_t$  und  $m_\zeta(-j) \sim \zeta_{t-j} \zeta_t$ .

Falls nun  $m_\zeta(j) = 0$  gilt für  $|j| > 0$ , so läßt sich der Parameter  $\alpha$  in den Gleichungen (27) und auch im erweiterten Gleichungssystem nicht festlegen; es gilt dann nach (29) im System (27):  $m_{yz}(-2) = m_{\eta\zeta}(-2) = 0$  und  $m_z(-1) = m_\zeta(1) = 0$ .

Nowak (1979), Sätze 6 und 14, beweist das allgemeine Resultat: Notwendig und hinreichend zur  $\mu$ -fast Identifizierbarkeit des Modells ist die Existenz einer (asymptotischen) Autokorrelation in der wahren exogenen Variablen  $\zeta_t$ . Knappster Fall ist eine Korrelation über genau eine Periode, also ein 1-abhängiger Prozeß ( $\zeta_t$ ).

### 4.3 Das Modell mit Lag-Struktur

Das Modell ist definiert durch die Beziehungen (5) und (6), die unter A formulierten Annahmen sowie

E 1) Die Störvariablen  $\varepsilon_t$ ,  $s_t$ ,  $w_t$  sind seriell unkorreliert.

Im Modell ergibt sich als Beziehung zwischen den beobachteten Variablen

$$(30) \quad y_t = \beta_1 z_t + \beta_2 z_{t-1} + \varepsilon_t + w_t - \beta_1 s_t - \beta_2 s_{t-1} = \beta_1 z_t + \beta_2 z_{t-1} + u_t$$

und es gelten die stochastischen Relationen

$$\text{plim } \frac{1}{T} \sum_t z_t u_t = -\beta_1 \sigma_s^2$$

$$\text{plim } \frac{1}{T} \sum_t z_{t-1} u_t = -\beta_2 \sigma_s^2$$

$$\text{plim } \frac{1}{T} \sum_t y_{t+1} u_t = 0$$

$$\text{plim } \frac{1}{T} \sum_t y_t u_t = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2$$

$$\text{plim } \frac{1}{T} \sum_t y_{t-1} u_t = 0 .$$

Damit lassen sich aus (30) für die Parameter  $\beta_1, \beta_2, \sigma_s^2, \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2$  die folgenden Bestimmungsgleichungen ableiten

$$(31) \quad \left. \begin{aligned} z_t \mid m_{zy}(0) &= \beta_1 m_z(0) + \beta_2 m_z(1) - \beta_1 \sigma_s^2 \rightarrow \sigma_s^2 \\ z_{t-1} \mid m_{zy}(-1) &= \beta_1 m_z(-1) + \beta_2 m_z(0) - \beta_2 \sigma_s^2 \\ y_{t+1} \mid m_y(1) &= \beta_1 m_{yz}(1) + \beta_2 m_{yz}(2) \\ y_{t-1} \mid m_y(-1) &= \beta_1 m_{yz}(-1) + \beta_2 m_{yz}(0) \\ y_t \mid m_y(0) &= \beta_1 m_{yz}(0) + \beta_2 m_{yz}(1) + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2 \rightarrow \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \beta_1, \beta_2$$

Hinreichend zur eindeutigen Festlegung der Parameter  $\beta_1, \beta_2, \sigma_s^2, \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2$  in den Gleichungen (31) ist die Bedingung

$$(32) \quad \det \begin{pmatrix} m_{yz}(1) & m_{yz}(2) \\ m_{yz}(-1) & m_{yz}(0) \end{pmatrix} = m_{yz}(1) m_{yz}(0) - m_{yz}(-1) m_{yz}(2) \neq 0 .$$

Diese ist im Modell in der Regel bereits erfüllt. Denn aus der strukturellen Gleichung (5) ergibt sich eine Korrelation von  $\eta_t$  mit  $\zeta_t$  und mit  $\zeta_{t-1}$ , so daß gilt

$$\begin{aligned} \zeta_t \eta_t &\sim m_{zy}(0) = m_{\zeta\eta}(0) \neq (0) \\ \zeta_{t-1} \eta_t &\sim m_{zy}(-1) = m_{y\zeta}(1) = m_{\eta\zeta}(1) \neq (0) . \end{aligned}$$

Der zweite Beitrag neben  $m_{yz}(1) m_{yz}(0) \neq 0$  in (32) läßt die Determinante höchstens für ganz spezielle Parameterwerte und Momentenfolgen ( $m_{\zeta}(j)$ ) verschwinden.

Insbesondere im Fall einer nicht seriell korrelierten exogenen Variablen  $\zeta_t$ , also bei  $m_\zeta(j) = 0$  für  $j \neq 0$  gilt

$$m_{yz}(0) = \beta_1 m_z(0) \neq 0, m_{yz}(1) = \beta_2 m_z(0) \neq 0, m_{yz}(2) = m_{yz}(-1) = 0$$

und die Determinante (32) ist stets von Null verschieden.

Zusammenfassend läßt sich feststellen: Das Modell ist ohne besondere Forderung an die exogene Variable  $\zeta_t$   $\mu$ -fast identifizierbar. Ist  $\zeta_t$  nicht seriell korreliert, so ist das Modell identifizierbar (für alle Parameterwerte).

### 5. Das univariate Modell mit autokorreliertem Fehler

Betrachtet wird noch einmal das univariate Modell, in welchem nun jedoch der Fehler  $s_t$  in der exogenen Variablen Autokorrelation aufweisen soll. Und zwar wird er zunächst als 1-abhängiger Moving Average Prozeß und dann als autoregressiver Prozeß 1. Ordnung spezifiziert.

Das Modell sei zuerst gegeben durch die Beziehungen (1) und (2), die unter A formulierten Annahmen, sowie die Annahme B 3) und

F 1)  $\varepsilon_t$  und  $w_t$  sind seriell unkorreliert,  $s_t$  ist 1-abhängig und besitzt also die Autokovarianzfunktion  $\sigma_s(j) = \delta_{j0} \sigma_s^2 + \delta_{|j|,1} \sigma_s(1)$ , ( $s_t = \lambda_0 \chi_t + \lambda_1 \chi_{t-1}$ ,  $\chi_t$  seriell unkorreliert), dabei ist  $\delta_{ji} = 1$  und  $\delta_{ji} = 0$  für  $i \neq j$ .

Werden insbesondere die stochastischen Relationen

$$\text{plim } \frac{1}{T} \sum_t z_t u_t = \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t (\zeta_t + s_t) u_t = -\alpha \sigma_s(0) = -\alpha \sigma_s^2$$

$$\text{plim } \frac{1}{T} \sum_t z_{t-1} u_t = \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t (\zeta_{t-1} + s_{t-1}) u_t = -\alpha \sigma_s(1)$$

$$\text{plim } \frac{1}{T} \sum_t y_{t+j_1} u_t = \text{plim } \frac{1}{T} \sum_t (\alpha \zeta_{t+j_1} + \varepsilon_{t+j_1} + w_{t+j_1}) u_t = 0 \text{ für } j_1 \neq 0$$

beachtet, so lassen sich in einer zum Kapitel 3 analogen Weise für die Parameter  $\alpha$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2$ ,  $\sigma_s^2$ ,  $\sigma_s(1)$  des Modells unmittelbar die folgenden Bestimmungsgleichungen angeben

$$\begin{aligned}
 m_{zy}(0) &= \alpha m_z(0) - \alpha \sigma_s^2 && \rightarrow \sigma_s^2 \\
 m_{zy}(-1) &= \alpha m_z(1) - \alpha \sigma_s(1) && \rightarrow \sigma_s(1) \\
 m_y(0) &= \alpha m_{yz}(0) + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2 && \rightarrow \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2 \\
 m_y(j_1) &= \alpha m_{yz}(j_1) && \rightarrow \alpha \dots
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

In diesen sind die Parameter eindeutig festgelegt, da insbesondere nach Annahme B 3) gilt

$$(34) \quad m_{yz}(j_1) = m_{\eta\zeta}(j_1) = \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t (\alpha \zeta_{t+j_1} + \varepsilon_{t+j_1}) \zeta_t = \alpha m_\zeta(j_1) \neq 0$$

Daran zeigt sich, daß eine Autokorrelation der wahren exogenen Variablen  $\zeta_t$  über wenigstens eine Periode — also  $m_\zeta(j_1) \neq 0$  für ein  $j_1 \neq 0$  — bei 1-abhängigem MA-Fehler  $s_t$  ebenso wie im Modell mit seriell unkorreliertem Fehler zur Identifizierbarkeit des Modells führt.

Das Modell sei nun gegeben durch die Beziehungen (1) und (2), die unter A formulierten Annahmen sowie

G 1)  $\varepsilon_t$  und  $w_t$  sind seriell unkorreliert,  $s_t$  ist autoregressiv korreliert und besitzt die Autokovarianzfunktion  $\sigma_s(j) = \rho^{|j|} \sigma_s^2$ , ( $s_t = \rho s_{t-1} + \chi_t$ ,  $\chi_t$  seriell unkorreliert).

Es ist zu beachten, daß im Modell die wahre exogene Variable  $\zeta_t$  sowohl autokorreliert als auch nichtautokorreliert zugelassen ist.

Zunächst lassen sich insbesondere aufgrund der stochastischen Relationen

$$\begin{aligned} \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t z_t u_t &= \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t (\zeta_t + s_t) u_t = -\alpha \sigma_s(0) = -\alpha \sigma_s^2 \\ \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t z_{t-1} u_t &= \text{plim} \frac{1}{T} \sum_t (\zeta_{t-1} + s_{t-1}) u_t = -\alpha \sigma_s(1) = -\alpha \rho \sigma_s^2 \end{aligned}$$

für die Parameter  $\alpha$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2$ ,  $\sigma_s^2$ ,  $\rho$  des Modells die folgenden Bestimmungsgleichungen formulieren

$$(35) \quad \begin{aligned} m_{zy}(0) &= \alpha m_z(0) - \alpha \sigma_s^2 \\ m_{zy}(-1) &= \alpha m_z(1) - \alpha \rho \sigma_s^2 \\ m_y(0) &= \alpha m_{yz}(0) + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_w^2 \\ m_y(j_1) &= \alpha m_{yz}(j_1), \quad j_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Liegt nun den Momenten der beobachteten Variablen ein autokorrelierter Prozeß der wahren exogenen Variablen  $\zeta_t$  zugrunde, so gilt  $m_\zeta(j_1) \neq 0$  für ein  $j_1 \neq 0$  und  $m_{yz}(j_1) \neq 0$ .  $\alpha$  ergibt sich dann aus der letzten Gleichung zu

$$(36) \quad \alpha = \frac{m_y(j_1)}{m_{yz}(j_1)}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgen danach die Parameter

$$(37) \quad \varrho = \left( \frac{\alpha \varrho \sigma_s^2}{\alpha \sigma_s^2} \right) = \frac{\alpha m_z(1) - m_{zy}(-1)}{\alpha m_z(0) - m_{zy}(0)}$$

$$\sigma_s^2 = m_z(0) - \frac{1}{\alpha} m_{zy}(0)$$

usw.

Liegt den Momenten der beobachteten Variablen ein seriell nicht korrelierter Prozeß von  $\zeta_t$  zugrunde, so gilt  $m_{\zeta}(j) = 0$  für alle  $j \neq 0$ . Dann gilt jedoch

$$(38) \quad \begin{aligned} m_z(2) &= \sigma_s(2) = \varrho^2 \sigma_s^2 \\ m_z(1) &= \sigma_s(1) = \varrho \sigma_s^2 \end{aligned}$$

Daraus folgen

$$(39) \quad \varrho = \frac{m_z(2)}{m_z(1)}, \quad \sigma_s^2 = \frac{m_z(1)}{\varrho} = \frac{m_z(1)^2}{m_z(2)}$$

$\sigma_s^2$  kann nun in die erste der Gleichungen (35) eingesetzt werden, woraus sich

$$(40) \quad \alpha = \frac{m_{zy}(0)}{m_z(0) - \sigma_s^2} = \frac{m_{zy}(0) m_z(2)}{m_z(0) m_z(2) - m_z(1)^2}$$

ergibt.

Damit ist gezeigt, daß zur Identifizierbarkeit des univariaten Modells mit autoregressiv korrelierter Fehlervariablen  $s_t$  keine besondere Forderung an die exogene Variable  $\zeta_t$  zu stellen ist.

### Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, wie verschiedene zeitstrukturelle Komponenten in einem Fehlermodell zu seiner Identifikation eingesetzt werden können. So bewirkt in statischen Modellen eine Autokorrelation oder gegebenenfalls eine Kreuzkorrelation der wahren exogenen Variablen die konsistente Schätzbarkeit des Modells. Die Annahme einer Autokorrelation in den wahren Regressoren kann bei Modellen mit einer Lag-Struktur in der Regressionsbeziehung abgeschwächt bzw. ganz fallengelassen werden. Dies trifft ebenfalls für Modelle mit autoregressiv korrelierten Fehlervariablen zu.

Stellvertretend für die aus dem Identifikationsverfahren erhaltenen Schätzer wurde die asymptotische Verteilung des Schätzers für den Regressionsparameter im univariaten Modell betrachtet. Diese Verteilung ist normal mit einer Varianz, die mit der Stärke der Autokorrelation im wahren Regressor abnimmt.



### Summary

The paper illustrates the following thesis. Time series specific components inherited in econometric models allow to identify shock-error models completely from the observed data. In static models some auto- or crosscorrelation involved in the true exogenous variables is utilized to consistently estimating the model parameters. The appearance of some lag structure in the linear relation of the model allows to weaken or eventually get rid of the requirement for the existence of some autocorrelation within the true regressor variables. This holds too in models with autoregressively correlated errors.

The asymptotic distribution of the regression parameter estimator in the univariate model is shown to be normal. The asymptotic variance of the estimator is small if there is a strong autocorrelation involved in the true regressor.

### Literatur

- Geraci, V. J.* (1974), Simultaneous Equation Models with Measurement Error. Ph. D. dissertation, University of Wisconsin, Madison.
- (1976), Identification of Simultaneous Equation Models with Measurement Error. *Journal of Econometrics* 4, 263 - 283.
- Goldberger, A. S.* (1972), Structural Equation Methods in the Social Sciences. *Econometrica* 40 (1972), 979 - 1001.
- Malinvaud, E.* (1970), *Statistical Methods of Econometrics*, North-Holland, Amsterdam-London.
- Maravall, A.* and *D. J. Aigner* (1977), Identification of the Dynamic Shock-Error Model. Chap 18 in *Latent Variables in Socioeconomic Models*. Editors: D. J. Aigner and A. S. Goldberger, North-Holland Amsterdam.
- Nowak, E.* (1975 a), Konsistente Schätzung von Parametern in Autoregressiven Systemen mit Fehlern in den Variablen, bei gegebener Kovarianzmatrix der Fehler. Forschungsberichte aus dem Institut für Statistik und Wissenschaftstheorie der Universität München, Serie Oe. Nr. 1.
- (1975 b), Konsistente Schätzung sämtlicher Parameter einer Zeitreihenregression bei Fehlern in den Variablen, wenn neben den Daten der Zeitreihe keine zusätzlichen Kenntnisse verfügbar sind. Forschungsberichte aus dem Institut für Statistik und Wissenschaftstheorie der Universität München, Serie Oe. Nr. 3.
- (1976 a), Identifikation ökonomischer Zeitreihenregressionen bei Fehlern in den Variablen, ohne Benutzung zusätzlicher Kenntnisse. Forschungsberichte aus dem Institut für Statistik und Wissenschaftstheorie der Universität München, Serie Oe. Nr. 6.
- (1976 b), Identification of error models with time series data and no additional knowledge given. Paper, presented at ESEM 1976 in Helsinki.
- (1977), An Identification method for stochastic models of time series analysis with errors in the variables. Paper, presented at ESEM 1977 in Vienna.
- (1979), Identifikation in allgemeinen linearen Modellen der Zeitreihenanalyse mit Fehler in den Variablen. Habilitationsarbeit, Universität München.

- Schneeweiß, H.* (1976), Consistent Estimation of a Regression with Errors in the variables. *Metrika* 23 (1976), 101 - 115.
- (1978), Identifikation. In: *Handbuch der Wirtschaftswissenschaft*, Bd. 4, Stuttgart.
- Schönfeld, P.* (1971), *Methoden der Ökonometrie*. Bd. 2, Berlin.
- (1975), A Survey of Recent Concepts of Identification. CORE Discussion Papers Nr. 7515.