

Mikroökonomische Analyse der Tauschmittelfunktion des Geldes

Von Rüdiger Pethig

In der allgemeinen Gleichgewichtstheorie vom *Arrow-Debreu*-Typ gibt es kein(e) Tauschmittel. Mit Schwerpunkt auf das jeweilige Nutzenmaximierungskalkül der Konsumenten wird untersucht, wie durch Berücksichtigung verschiedener Tauschrestriktionen, insbesondere durch Einführung von Transaktionskosten, die Tauschmittelfunktion von Waren- und/oder „stoffwertlosem“ Geld in der allgemeinen Gleichgewichtstheorie begründet werden kann.

1. Vorbemerkungen

Während in der verbalen Tradition der frühen klassischen Nationalökonomien die bedeutende Rolle des Geldes für den Wirtschaftsablauf ausführlich beschrieben wurde, ist das Geld in seinen Funktionen der Wertaufbewahrungseinheit und des Tauschmittels aus der neueren mikroökonomischen Gleichgewichtstheorie vom *Arrow-Debreu*-Typ vollständig eliminiert worden (vgl. z. B. *Debreu*, 1959, S. 28). Die elementare analytische Schwierigkeit bei dem Versuch der Integration des Geldes in solche Gleichgewichtsmodelle liegt in folgendem: Als Geld fungieren nicht oder kaum solche Güter, die gleichzeitig für Konsum- oder Produktionszwecke verwendbar sind (Warengeld), sondern in der Realität wird typischerweise „Papiergeld“ verwendet, das unbrauchbar für Konsum und Produktion, also „stoffwertlos“ ist. Da aber nach dem marktwirtschaftlichen Prinzip des „do ut des“ niemand „etwas“ für „nichts“ abgibt, ist ein positiver Rechnungspreis oder Marktwert eine *conditio sine qua non* für die Funktion eines Gutes sowohl als Wertaufbewahrungs- als auch als Tauschmittel. Während diese Bedingung unter bestimmten Nichtsättigungsannahmen für die Gruppe des Warengeldes erfüllt ist, muß als notwendige Bedingung für die analytisch explizite Begründung von Geldfunktionen des Papiergeldes *Marschaks* (1950, S. 72) berühmte Frage beantwortet werden¹:

„Why can a unit of a thing that cannot be used by anyone either as a consumption or as a production good, acquire for the individual more than a zero amount of any useful thing?“

¹ Vgl. z. B. auch *Hahn* (1965, S. 127).

Die Bemühungen zur Beantwortung dieser Frage lassen sich bis auf wenige Ausnahmen² einteilen in solche Ansätze, die Geld in seiner Funktion als Vermögensojekt (ohne Zinsertrag) analysieren, und solche, die die Tauschmittelfunktion des Geldes zu erklären versuchen.

Zur ersten Gruppe gehören alle Versuche, Geld als Argument in der Nutzenfunktion oder als produktiven Faktor zu behandeln³, was einer analytischen Transformation von Papiergeld in Pseudo-Warengeld gleichkommt, dessen Funktion sich im Gehaltenwerden erschöpft. Zwar wird kein Geldtheoretiker negieren, daß Papiergeld in gewissem Sinne „nützlich“ oder „produktiv“ ist, doch sind diese Attribute nicht identisch mit denen üblicher Konsumgüter bzw. Produktionsfaktoren⁴, so daß eine weitgehend anerkannte Aufgabe der Geldtheorie darin besteht, die Vorteilhaftigkeit des Papiergeldes deduktiv zu ermitteln und nicht via Annahme einzuführen. Eine mögliche Lösung dieser Aufgabe bietet die sogenannte temporäre Gleichgewichtstheorie, die zu einem positiven Gleichgewichtspreis des Papiergeldes mit Hilfe besonderer Annahmen über die individuellen Preiserwartungen sowie über die Lagerfähigkeit des Geldes gelangt und auf diese Weise primär dessen Wertaufbewahrungsfunktion begründet⁵.

Da jedes übertragbare Objekt mit positivem Rechnungspreis ein potentiell Tauschmittel ist — so können Vertreter der temporären Gleichgewichtstheorie argumentieren —, kann die eigentliche Aufgabe der analytischen Begründung der Tauschmittelfunktion des Geldes als gelöst betrachtet werden: Die Möglichkeit, Papiergeld als Mittel der Kaufkraftübertragung auf künftige Perioden zu benutzen, ist die eigentliche Grundlage für seine Tauschmittelfunktion⁶. Aus dieser Sicht dominiert die Wertaufbewahrungsfunktion die Tauschmittelfunktion.

Die alternative Vorgehensweise mit weit zurückreichender Tradition besteht in dem Versuch, den Wert des Papiergeldes unmittelbar mit und aus seiner Tauschmittelfunktion zu bestimmen. Dieser Ansatzpunkt wird im folgenden aufgegriffen, um durch unterschiedliche Spezifikation der individuellen Aktionsmöglichkeiten in Ökonomien ohne Produktion und mit endlichem Zeithorizont seine Leistungsfähigkeit zu prüfen.

Im Abschnitt 2 wird zunächst die *Debreu*-Ökonomie durch ein allgemeines Marktkonzept sowie ein Bruttotransaktionskonzept erweitert,

² Zu diesen Ausnahmen gehört z. B. *Starr* (1974), der von einem Kassenbedarf für Steuerzahlungen ausgeht.

³ Hauptvertreter dieser Analyserichtung ist *Patinkin* (1965).

⁴ Vgl. *Sontheimer* und *Hahn* (1971, S. 435).

⁵ Dieser inzwischen in verschiedene Richtungen weitergeführte Ansatz geht unter anderem auf *Grandmont* (1973) zurück.

⁶ Vgl. z. B. *Grandmont* und *Younes* (1972).

so daß die Tauschmittelverwendung sowie die (individuellen) Umlaufgeschwindigkeiten getauschter Güter explizit erfaßt werden können. Dann wird gezeigt, wie die unbefriedigenden transaktionstheoretischen Implikationen dieses Ansatzes durch die Einführung von Transaktionskosten, die mit dem Transaktionsvolumen steigen, verbessert werden können. Mit Hilfe dieser Annahme läßt sich die Tauschmittelfunktion des Papiergeldes jedoch höchstens für den Fall begründen, daß die Konsumenten *ex praemisso* gezwungen werden, ihren Anfangsbestand an Kasse am Periodenende unverändert beizubehalten (*Say'sches Gesetz*). Um diese äußerst restriktive und ökonomisch kaum zu rechtfertigende Annahme aufheben zu können, werden in Abschnitt 3 einige Aspekte der personellen und zeitlichen Koordinierung des Tauschvorganges analysiert, die darauf hindeuten, daß der Zeitbedarf eines Konsumenten für die Realisierung seiner Transaktionen mit steigenden Umlaufgeschwindigkeiten der von ihm getauschten Güter zunimmt. Diese Hypothese wird in Abschnitt 4 aufgegriffen, und es läßt sich zeigen, daß mit ihrer Hilfe die Verwendung des Papiergeldes als (allgemeines) Tauschmittel erklärt werden kann.

2. Ansätze zur Begründung der Tauschmittelverwendung aus individuellen Optimierungskalkülen

Die Anzahl der Güter ist \bar{i} , und mit $H = \{1, 2, \dots, h, \dots, \bar{h}\}$ wird die Menge der Konsumenten bezeichnet. x_{hi} ist die Menge des Gutes i , die dem h zum Konsum zur Verfügung steht, während \bar{x}_{hi} die Anfangsausstattung des h an i ist. Gut 1 ist die als Freizeit konsumierbare und gegebenenfalls als Transaktionsinput für die Durchführung von Transaktionen verwendbare Zeit. Zur Vereinfachung wird unterstellt, daß Gut 1 nicht gehandelt wird⁷ und folglich keine(n) Marktpreis(e) hat. Die Planungsperiode der Individuen, die gegebenenfalls weiter in Subintervalle aufgegliedert werden kann, ist das Intervall $[0, T]$. Demnach gilt $\bar{x}_{h1} := T$ für alle $h \in H$. Die Menge der marktfähigen Güter ist $I = \{2, 3, \dots, i, \dots, \bar{i}\}$. Das Gut \bar{i} gehört zwar zu I , ist aber im Gegensatz zu den anderen Gütern weder für Konsumzwecke noch als Transaktionsinput verwendbar. Unabhängig von seiner in der jeweils betrachteten Ökonomie tatsächlich ausgeübten Funktion soll es als Papiergeld bezeichnet werden.

Die Nutzenfunktion des Individuums h ,

$$u_h = u_h(x_{h1}, \dots, x_{h, \bar{i}-1}),$$

⁷ Diese Annahme, die bei Interesse an größerer Allgemeinheit des Modells entbehrlich wäre, findet sich z. B. auch bei *Sontheimer* (1970); eine andere Vorgehensweise wird z. B. gewählt von *Niehans* (1971) und *Pethig* (1975).

ist stetig differenzierbar, streng monoton zunehmend und quasi-konkav. In einer *Debreu*-Ökonomie (ohne Produktion), die zum Vergleich mit den weiteren Ausführungen kurz charakterisiert werden soll, gibt es für jedes Marktgut i nur einen Preis, p_i , der für die Konsumenten unbeeinflussbar ist. Das individuelle Entscheidungsproblem in einer solchen Ökonomie lautet für alle $h \in H$

$$(1) \quad \max u_h(x_{h1}, \dots, x_{hi}, \dots, x_{hI})$$

unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I p_i \hat{x}_{hi} &= \sum_{i=1}^I p_i \bar{x}_{hi}, \\ 0 \leq x_{hi} &\leq \hat{x}_{hi}, i = 2, \dots, I, \\ 0 \leq x_{h1} &\leq \bar{x}_{h1}. \end{aligned}$$

Die Unterscheidung zwischen den Variablen \hat{x}_{hi} und x_{hi} , $i \in I$, beruht darauf, daß \hat{x}_{hi} der Betrag des h von Gut i ist, den h nach Abschluß seiner Transaktionstätigkeit besitzt, wobei er „frei disponieren“ kann, wieviel er davon konsumieren will (x_{hi}). Im Interesse der direkten (späteren) Anwendung des *Kuhn-Tucker*-Theorems wird diese „free disposal“-Annahme auch auf Gut 1 erstreckt, obwohl sie in diesem Fall etwas künstlich ist.

Ein Gleichgewicht dieser Ökonomie liegt vor, wenn

$$(2) \quad \sum_h \hat{x}_{hi} \leq \sum_h \bar{x}_{hi} \text{ für alle } i \in I,$$

und wenn für alle h und i x_{hi} die Lösungswerte des Problems (1) bei ein und demselben Preisvektor $p = (p_2, \dots, p_I)$ sind.

Gemäß (1) plant ein Individuum in einer *Debreu*-Ökonomie lediglich Nettotransaktionen (Überschußnachfragemengen)

$$z_{hi} := \hat{x}_{hi} - \bar{x}_{hi}.$$

Doch ein wesentliches Kennzeichen der Verwendung eines Gutes als Tauschmittel besteht darin, daß dieses Gut von ein und demselben Individuum in einer Periode sowohl angeboten als auch nachgefragt wird. Um dies analytisch explizit zu machen, müssen daher die von jedem Gut angebotenen und nachgefragten Beträge getrennt ausgewiesen werden. Gleichzeitig soll das in der *Debreu*-Ökonomie angewandte Konzept des unspezifizierten „Universalmarktes“ durch eine Marktstruktur ersetzt werden, die aus der Menge sämtlicher $\frac{1}{2}(\bar{i} - 1)(\bar{i} - 2)$ Zweigüter-Märkte besteht⁸. Wir bezeichnen den Markt, auf dem die Güter i

⁸ Von einer solchen Marktstruktur ging sogar schon *Walras* (1954, S. 158) aus. Zur Analyse dieser und anderer Marktstrukturen vgl. *Pethig* (1975) und die dort angegebene Literatur.

und j gegeneinander getauscht werden, als (i, j) -Markt und das Angebot des h auf diesem Markt mit a_{hi}^j , wenn h Gut i anbietet und j als Gegenleistung nachfragt, und mit a_{hj}^i , wenn h auf dem (i, j) -Markt j gegen i anbietet. Analog sind n_{hi}^j und n_{hj}^i die Nachfragebeträge des h auf diesem Markt. In der Zwei-Güter-Marktstruktur gibt es $(\bar{i} - 2)$ Märkte und ebensoviele Preise für jedes Gut $i \in I$, wobei p_i^j den Preis des Gutes i auf dem (i, j) -Markt, $i \neq j$, angibt. Es soll die Konvention gelten, im folgenden nicht ausdrücklich darauf hinzuweisen, wenn für Güterindizes — z. B. i und j — an Preisen, Märkten oder Transaktionen — die Bedingung $i \neq j$ erfüllt sein muß.

Die „do ut des“ Restriktion verlangt für alle $i, j \in I$

$$(3) \quad p_i^j n_{hi}^j - p_j^i a_{hj}^i = 0.$$

Der einem Individuum von Gut i für Konsumzwecke zur Verfügung stehende Betrag x_{hi} erfüllt den vorangegangenen Definitionen nach die Bedingung

$$(4) \quad x_{hi} - \sum_j (n_{hi}^j - a_{hi}^j) \leq \bar{x}_{hi} \quad i \in I,$$

wobei

$$\sum_j (n_{hi}^j - a_{hi}^j) = : z_{hi}.$$

Der insgesamt von einem Gut i angebotene oder nachgefragte Betrag⁹

$$w_{hi} := \sum_j (a_{hi}^j + n_{hi}^j)$$

wird als Transaktionsvolumen von Gut i bezeichnet. Die Gegenüberstellung dieses Transaktionsvolumens mit dem durchschnittlichen Bestand des h an i , $\frac{1}{2}(\bar{x}_{hi} + \hat{x}_{hi})$, führt zu dem Begriff der Umlaufgeschwindigkeit des Gutes i in einer Aktion des Individuums h . Dieser Begriff soll in zwei alternativen Formen konkretisiert werden:

$$(5a) \quad v_{hi}^0 := \frac{w_{hi}}{\bar{x}_{hi} + \hat{x}_{hi}} = \frac{\sum_j (a_{hi}^j + n_{hi}^j)}{2 \bar{x}_{hi} + \sum_j (n_{hi}^j - a_{hi}^j)} \quad \text{und}$$

$$(5b) \quad v_{hi}^1 := w_{hi} - (\bar{x}_{hi} + \hat{x}_{hi}) = 2 \sum_j a_{hi}^j - 2 \bar{x}_{hi},$$

wobei die Beziehung

$$v_{hi}^1 = (v_{hi}^0 - 1)(\bar{x}_{hi} + \hat{x}_{hi}) \text{ gilt}$$

⁹ Zu den folgenden Definitionen vgl. auch Pethig (1975, S. 171 ff.).

sowie die Äquivalenz:

$$v_{hi}^n \begin{cases} \leq 1 & \text{für } n = 0 \\ \leq 0 & \text{für } n = 1 \end{cases} \quad \text{genau dann, wenn } \sum_j a_{hi}^j \leq \bar{x}_{hi}.$$

Die Definition (5a) entspricht zwar mehr als (5b) der üblichen Vorstellung von einer Umlaufgeschwindigkeit, hat aber den Nachteil, daß sie bei $\bar{x}_{hi} = \hat{x}_{hi} = 0$ nicht anwendbar ist. Wenn im folgenden die Definition (5a) benutzt wird, ist daher (ohne besonderen Hinweis) stets $\bar{x}_{hi} > 0$ für alle $i \in I$ unterstellt.

Zur analytischen Präzisierung des Begriffs der Tauschmittelverwendung wird zunächst die intermediäre Transaktion des h in Gut i auf dem (i, j) -Markt bestimmt als

$$d_{hi}^{ij} := a_{hi}^j + n_{hi}^j - \max(0, n_{hi}^j - a_{hi}^j) + \min(0, n_{hi}^j - a_{hi}^j)$$

und die intermediäre Transaktion in Gut i insgesamt als

$$\begin{aligned} d_{hi} &:= w_{hi} - \max(0, z_{hi}) + \min(0, z_{hi}) \\ &= 2 \min(\sum_j a_{hi}^j, \sum_j n_{hi}^j). \end{aligned}$$

Nun werden intermediäre Transaktionen auf ein und demselben Zwei-Güter-Markt — auch dem üblichen Sprachgebrauch nach — nicht als Tauschmittelverwendung bezeichnet. Daher soll gesagt werden, Individuum h verende Gut $i \in I$

(a) als Tauschmittel (nicht als Tauschmittel), wenn

$$\hat{d}_{hi} > 0 \quad (\hat{d}_{hi} = 0),$$

wobei

$$\hat{d}_{hi} := d_{hi} - \sum_j d_{hi}^{ij};$$

(b) als einziges Tauschmittel, wenn

$$\hat{d}_{hi} > 0 \text{ und } \hat{d}_{hj} = 0 \quad \text{für alle } j \in I, j \neq i;$$

(c) als allgemeines Tauschmittel, wenn

$$(n_{hj}^e - a_{hj}^e) = 0 \quad \text{für alle } e, j \in I; e, j \neq i,$$

d. h. wenn h nur auf solchen Märkten aktiv ist, auf denen das Gut i eines der beiden Tauschgüter ist¹⁰.

¹⁰ Zur Motivation und Interpretation dieser Definition vgl. Pethig (1975, S. 173 ff.).

Das Entscheidungsproblem eines Konsumenten in einer so spezifizierten Ökonomie lautet:

$$(6) \quad \max u_h(x_{h1}, \dots, x_{h\bar{i}-1})$$

unter den Bedingungen (3) und (4),

$$x_{hi} \geq 0, \quad i = 1, \dots, i,$$

$$a_{hi}^j, n_{hi}^j \geq 0, \quad i, j \in I.$$

Im Gleichgewicht dieser Ökonomie müssen alle Zwei-Güter-Märkte geräumt sein, d. h. es muß gelten

$$(7) \quad \sum_h n_{hi}^j \leq \sum_h a_{hi}^j \quad \text{für alle } i, j \in I,$$

wobei für alle $h \in H$ a_{hi}^j und n_{hi}^j die Lösungswerte des Problems (6) bei ein und demselben Preisvektor $p = (p_2^3, \dots, p_i^j, \dots, p_{\bar{i}}^{\bar{i}-1})$ sind. (7) impliziert (2), ist aber restriktiver als Bedingung (2).

Die geld- und transaktionstheoretischen Implikationen einer so spezifizierten Ökonomie sind unbefriedigend:

- (a) Papiergeld ist im Gleichgewicht kein Tauschmittel, da seine Gleichgewichtspreise Null sind¹¹.
- (b) Bei den übrigen Gütern außer Gut 1 sind die Tauschmittelverwendung sowie die Umlaufgeschwindigkeiten nicht nur in bezug auf die Güterart (qualitativ), sondern auch hinsichtlich des Umfangs (quantitativ) völlig undeterminiert¹².

Der entscheidende Schritt zur Begründung einer (determinierten) Tauschmittelverwendung besteht nun darin, den Tauschvorgang als eine knappe Ressourcen beanspruchende ökonomische Aktivität aufzufassen und die Wahl des zweckmäßigsten Tauschweges dem individuellen Kalkül zu überlassen. Im einfachsten Fall wird berücksichtigt, daß die Durchführung von Transaktionen Zeit kostet, die proportional zum Transaktionsvolumen ist¹³. Somit muß ein Konsument bei der Maximierung seines Nutzens außer den Restriktionen (3) und (4) auch die Bedingung

$$(8) \quad \sum_i \sum_j ({}^j g_{h1}^i (a_{hi}^j + n_{hi}^j)) + x_{h1} \leq \bar{x}_{h1}$$

¹¹ Vgl. dazu Hahn (1965), Pethig (1975, S. 65 ff.), Sontheimer (1972) und Starr (1974).

¹² Vgl. Brunner und Meltzer (1971, S. 785 f.), Niehans (1971, S. 780) und Pethig (1975, S. 179 ff.).

¹³ Allgemeinere „Tauschtechnologien“ werden z. B. verwendet in Hahn (1971), Kurz (1974), Pethig (1975) und Starr (1970).

einhalten, wobei der exogen gegebene, positive Koeffizient $^j g_{h1}^i$ denjenigen Betrag von Gut 1 angibt, den h als Transaktionsinput aufwenden muß, um auf dem (i, j) -Markt eine Einheit von Gut i anzubieten oder nachzufragen. In den so konzipierten Transaktionskosten sollen nicht nur „Transportkosten“ im engeren Sinn, sondern der gesamte, für den Tausch erforderliche Zeitaufwand enthalten sein, obwohl klar ist, daß ein solches Konzept nicht die explizite Analyse der mit dem Tausch verbundenen Informationsprobleme ersetzen kann¹⁴.

Es läßt sich zeigen, daß in einer Ökonomie mit Transaktionskosten gemäß (8)

- (a) keine intermediären Transaktionen auf jeweils ein und demselben Markt durchgeführt werden ($d_{hi}^{jj} = 0$ für alle $i, j \in I$) und daß
- (b) (im Gleichgewicht) jedes Gut $i = 2, 3, \dots, i-1$ Tauschmittel, einziges oder allgemeines Tauschmittel sein kann¹⁵.

Dagegen kann Papiergeld im Gleichgewicht wiederum keine Tauschmittelfunktion übernehmen. Voraussetzung dafür wäre, daß die Konsumenten bereit wären, im Zeitpunkt T insgesamt gerade soviel Kasse zu halten, wie in der Ökonomie vorhanden ist ($\sum_h x_{hi} = \sum_h \bar{x}_{hi}$). Sobald aber der Papiergeldpreis auf einigen Märkten positiv ist, plant jeder Konsument, „am Ende der Welt“ (T) sein Geld vollständig ausgegeben zu haben, so daß nur Nullpreise mit dem Gleichgewicht kompatibel sind, selbst wenn die Transaktionskosten für Papiergeld vergleichsweise niedrig oder gar Null sind.

Um dies zu vermeiden, kann man die individuellen Entscheidungsmöglichkeiten weiter beschränken durch die Forderung

$$(9) \quad z_{hi} = \sum^j (n_{hi}^j - a_{hi}^j) = 0 \quad \text{für alle } h \in H.$$

Diese Annahme (9) findet sich (sinngemäß) bei *Niehans* (1971) und *Sontheimer* (1972), obwohl sich deren Modelle in anderer Hinsicht von dem hier diskutierten Modell unterscheiden. *Niehans* begründet die Annahme der Zwangskassenhaltung damit, daß er an der Untersuchung einer Ökonomie in stationärer Bewegung interessiert sei, in der sich der wirtschaftliche Ablauf von Jahr zu Jahr gleichbleibend wiederhole. Er weicht damit jedoch dem vorgelagerten und elementaren Problem aus, im Rahmen seines Modells zu erklären, warum die Konsumenten am Ende des Jahres positive Kassenbestände halten. *Sontheimer* (1972, S. 499) dagegen argumentiert, daß die Annahme (9) jedem (statischen)

¹⁴ Vgl. zu diesem Aspekt, der hier nicht behandelt werden kann, z.B. *Brunner und Meltzer* (1971), *Ostroy* (1973), *Pethig* (1975) und *Veendorp* (1971).

¹⁵ Zum Beweis dieser Ergebnisse vgl. *Karni* (1973).

Modell mit endlichem Zeithorizont logisch zugeordnet sein müsse: „If fiat money is present and is to have value in equilibrium (or in the terminal state), then it must be ‚held‘. But if fiat money provides no direct utility and has value in exchange, then no maximizing consumer would hold it in equilibrium (or the terminal state). We would then have a contradiction.“ In Abschnitt 4 wird jedoch gezeigt, daß *Sontheimers* Folgerung nicht zutrifft; es ist zwar richtig, daß die Kassenhaltung keinen direkten Nutzen hat, sie kann aber, was noch zu spezifizieren ist, für die Konsumenten von indirektem Nutzen sein.

Der analytische „Kunstgriff“ der Annahme (9) führt zwar zu dem Ergebnis, daß nun auch das Papiergeld — wie ohne (9) die $\bar{i} - 2$ übrigen Marktgüter — unter spezifizierbaren Bedingungen Tauschmittel sein kann, doch ist dieser Weg aus ökonomischer Sicht kaum akzeptabel: Die Individuen werden via Annahme zur Kassenhaltung „gezwungen“, während das Untersuchungsziel aber gerade darin besteht nachzuweisen, daß die Individuen Kasse halten, weil sie dies der ihnen offenstehenden Alternative, keine Kasse zu halten, vorziehen.

Um diesem Untersuchungsziel näherzukommen, wird in Abschnitt 3 zu zeigen versucht, daß die individuellen Transaktionsmöglichkeiten in den bisher betrachteten Ökonomien mit Transaktionskosten — und zwar sowohl mit als auch ohne die Annahme (9) der Zwangskassenhaltung — durch die Restriktionen (3), (4) und (8) noch nicht adäquat erfaßt sind, da in der Interdependenz „gleichgewichtiger“ Transaktionen Engpässe begründet sind, welche die Durchführung sämtlicher dieser Transaktionen innerhalb der gegebenen Periode in Frage stellen. Aus solchen Erwägungen heraus wird anschließend im Abschnitt 4 eine für das individuelle Kalkül relevante Hypothese formuliert, die darauf abzielt, daß die Konsumenten die erwähnten Engpässe „annähernd“ richtig antizipieren und mit deren Hilfe sich die Tauschmittelverwendung des Papiergeldes ohne Rückgriff auf die Annahme (9) erklären läßt.

3. Auswirkungen temporaler und personaler Interdependenzen im Tauschprozeß

Gegeben sei eine Ökonomie, in der die Konsumenten bei gegebenem Preisvektor $p = (p_2^3, \dots, p_i^j, \dots, p_i^{\bar{i}-1})$ das Programm (6) mit den zusätzlichen Restriktionen (8) und (9) lösen. Entsprechend ist ein Gleichgewicht dieser Ökonomie durch ein Preissystem p und einen Transaktionsvektor für alle h charakterisiert, so daß (7) sowie (6) mit (8) und (9) erfüllt sind. Auch wenn die Markträumungsbedingungen (7) eine gewisse Plankompatibilität garantieren, muß zwischen der Existenz eines Gleichgewichts und einem Tauschprozeß als dem Vorgang der Realisie-

rung sämtlicher Gleichgewichtstransaktionen in der Zeit unterschieden werden; denn ein Tauschprozeß ist erst dann vollständig beschrieben, wenn feststeht, in welchem Subintervall der gegebenen Periode welcher Konsument mit welchem Tauschpartner auf welchem Markt tauscht.

Für die Analyse einiger Aspekte des zeitlichen Vorgangs der Realisierung eines vorgegebenen Gleichgewichts wird unterstellt, die gesamte Modellperiode $[0, T]$ werde in T Einheitsintervalle $t = 1, 2, \dots, T$ eingeteilt. Außerdem wird von jedem Individuum h verlangt, seine Transaktionen so auf die einzelnen Intervalle aufzuteilen, daß es das jeweilige Einheitsintervall hinsichtlich der benötigten Transaktionszeit nicht überzieht und daß es in keinem Intervall mehr von einem Gut abgibt, als es zu Beginn dieses Intervalls insgesamt zur Verfügung hatte¹⁶ (Ausschluß von „Handelskrediten“). Eine Sequenz von maximal T Tauschrunden der Länge eines Einheitsintervalls, welche diese Bedingungen erfüllt und die zur Realisierung eines Tauschgleichgewichts führt, wird als Tauschprozeß bezeichnet. Von Interesse ist nun, ob jedem beliebigen Gleichgewicht mindestens ein Tauschprozeß zugeordnet ist, wobei zu betonen ist, daß es hier nicht um die gravierenden Informationsprobleme geht, die sich beim Auffinden eines existierenden Tauschprozesses ergeben, sondern nur darum, ob ein solcher Tauschprozeß bei gegebenem Gleichgewicht möglich ist. Im folgenden wird anhand einfacher Beispiele gezeigt, daß diese Frage zu verneinen ist.

Beispiel A: Zur Demonstration dieses Sachverhaltes wird unterstellt, daß in einer Ökonomie mit $\bar{h} = \bar{i} - 1$ und $\bar{i} > 4$ jeder Konsument zur Übertragung einer Einheit jedes beliebigen Gutes ein halbes Einheitsintervall Transaktionszeit benötigt. Ferner existiere in dieser Ökonomie ein Gleichgewicht, in dem das Gut \bar{i} allgemeines Tauschmittel ist bei einem Preisvektor p mit $p_i^j = 1$ für alle $i, j \in I$ ¹⁷, und in dem die Nettotransaktionen spezifiziert sind als

$$z_{hi} \begin{cases} = -1 & \text{für } h = i - 1; i = 2, 3, \dots, \bar{i} \\ = +1 & \text{für } h = i - 2; i = 3, 4, \dots, \bar{i} \\ & \text{und für } h = \bar{h} \text{ bei } i = 2 \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses Beispiel geht — ohne den Gesichtspunkt der Transaktionskosten — auf *Wicksell* (1965, S. 21) zurück. *Wicksell* beschränkt sich je-

¹⁶ Zu dieser Bedingung vgl. auch *Ostroy* (1973) und *Veendorp* (1970 und 1972).

¹⁷ Das folgende Beispiel könnte auch für jedes andere Gut $i \neq 1, \bar{i}$ in der Funktion des allgemeinen Tauschmittels konstruiert werden, nur müßte dann $p_j^i = 0$ für alle $j \in I$ gesetzt werden.

doch auf den Fall $\bar{h} = 3$, während aber erst — wie auch in *Pethig* (1973) gezeigt wird — bei $\bar{h} > 3$ Tauschkomplicationen auftreten.

Wenn in Beispiel A die Anfangsausstattung der Konsumenten gegeben ist durch

$$(10) \quad \bar{x}_{hi} = -\min(0, z_{hi}) \text{ für alle } i \in I \quad \text{für alle } h \in H,$$

dann werden zur Durchführung eines Tauschprozesses mindestens $\bar{h} - 1$ Einheitsintervalle benötigt. Dies liegt daran, daß in der ganzen Ökonomie annahmegemäß nur genau eine Einheit des allgemeinen Tauschmittels vorhanden ist (und zwar im Besitz des Konsumenten \bar{h}), so daß pro Einheitsintervall nicht mehr als zwei Individuen über die volle Intervalllänge mit einem Tauschgeschäft zum Zuge kommen können, während die übrigen, die ihre Transaktionen noch nicht durchgeführt haben, wegen fehlender Kassenbestände „Zwangspausen“ einlegen müssen, die sie in ihrem („ex-ante“) Nutzenmaximierungskalkül nicht berücksichtigt haben. Wegen dieser Zwangspausen existiert ein Tauschprozeß in der hier betrachteten Ökonomie nur dann, wenn $T \geq \bar{h} - 1$ ¹⁸. Annahmegemäß benötigt (und plant) kein einzelnes Individuum mehr als 2 Einheitsintervalle für die Durchführung seiner Transaktionen, so daß jeder einzelne die Restriktion (8) nicht verletzt hätte, wenn $T = 2$ wäre. In diesem Fall gäbe es bereits für $\bar{h} = 4$ keinen Tauschprozeß mehr. Aber auch wenn T größer als 2 unterstellt wird, findet man immer ein genügend großes \bar{h} , so daß für die jeweilige Ökonomie kein Tauschprozeß gefunden werden kann, wenn diese Ökonomie ein dem obigen Schema genügendes Gleichgewicht hat.

Demnach ist in den vorstehend analysierten Ökonomien ein Gleichgewicht nur eine notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung für die Existenz eines Tauschprozesses, der — wie schon erwähnt — in zweierlei Hinsicht höhere Anforderungen an die individuellen Pläne stellt als ein Gleichgewicht: In ihm müssen die Transaktionen danach spezifiziert sein, (i) in welchem Intervall und (ii) zwischen welchen Tauschpartnern sie vorgenommen werden.

Man kann nun ein Modell konstruieren, in dem die individuellen Transaktionen über Preise so detailliert gesteuert werden, daß der einzelne Konsument genau zu planen hat, in welchem Intervall er auf welchen Zwei-Güter-Märkten mit welchen Partnern tauschen will.

¹⁸ T kann natürlich nicht „nachträglich“ vom Analytiker beliebig festgelegt werden. Es ist aber denkbar, daß Ökonomien, die (unter anderem auch) in bezug auf die Länge der Wirtschaftsperiode verschieden spezifiziert sind, dieselben Gleichgewichtspreise und -transaktionen aufweisen. Eine „Variation“ von T ist hier als ein Vergleich solcher Ökonomien mit identischen Gleichgewichten zu verstehen.

Sei ${}^t p_{hi}^{kj}$ der Preis von Gut i auf dem „ $(h, k; i, j; t)$ -Markt“ und ${}^t a_{hi}^{kj} ({}^t n_{hi}^{kj})$ derjenige Betrag von Gut i , den h dem k für Bezahlung in j im Intervall t anbietet (nachfragt). In einer solchen Ökonomie lautet das Entscheidungsproblem (11) des Konsumenten:

$$(11) \quad \max u_h(x_{h1}, \dots, x_{h, \bar{i}-1})$$

unter den Bedingungen

$$(11a) \quad \begin{aligned} {}^t p_{hi}^{kj} {}^t a_{hi}^{kj} &= {}^t p_{hj}^{ki} {}^t n_{hj}^{ki} & h, k \in H; i, j \in I; t = 1, \dots, T, \\ x_{hi} &\leq \bar{x}_{hi} + \sum_t \sum_k \sum_j ({}^t n_{hi}^{kj} - {}^t a_{hi}^{kj}) & i \in I, \\ \sum_j \sum_k {}^t a_{hi}^{kj} &\leq \bar{x}_{hi} + \sum_j \sum_k \sum_{\tau=1}^{t-1} ({}^\tau n_{hi}^{kj} - {}^\tau a_{hi}^{kj}) & t = 2, \dots, T, \\ & & i \in I, \end{aligned}$$

$$(11b) \quad \begin{aligned} \sum_j \sum_k {}^t a_{hi}^{kj} &\leq \bar{x}_{hi} & t = 1, i \in I, \\ \sum_i \sum_j ({}^t g_{hi}^i ({}^t a_{hi}^{kj} + {}^t n_{hi}^{kj})) + x_{h1} &\leq \frac{1}{T} & t = 1, \dots, T, \\ {}^t a_{hi}^{kj}, {}^t n_{hi}^{kj} &\geq 0 & i, j \in I; h, k \in H; t = 1, \dots, T, \\ x_{hi} &\geq 0, & i = 1, \dots, \bar{i}. \end{aligned}$$

Das Gleichgewicht in dieser Ökonomie ist ein $\frac{1}{T} (\bar{h} - 1) \bar{h} (\bar{i} - 1)$ $(\bar{i} - 2)$ T -dimensionaler Preisvektor und ein Vektor solcher individuellen Transaktionen, die für jeden Konsumenten in bezug auf diesen Preisvektor nutzenmaximal sind und darüber hinaus die Bedingung

$${}^t a_{hi}^{kj} = {}^t n_{hi}^{kj} \quad h, k \in H; i, j \in I; t = 1, \dots, T$$

erfüllen.

Dem Konsumenten wird in dem Maximierungsproblem (11) nicht die Möglichkeit gegeben, in jedem einzelnen Intervall zu konsumieren, wie z. B. bei Niehans (1971). Somit wird eine „Picknick-Ökonomie“ beschrieben, in der alle Konsumenten zunächst ihre mitgebrachten Bestände tauschen und dann erst konsumieren (strenggenommen im Zeitpunkt T). Die Beschränkung auf diesen Fall ist beabsichtigt, da hier Vorgänge innerhalb eines Tauschprozesses von Interesse sind. Für das vorgesehene Untersuchungsziel könnte zwar wie bei Niehans Konsum in den einzelnen Intervallen zugelassen werden, jedoch müßte man dann zur Erfassung der „Mikrostruktur“ des Tausches das einzelne Intervall t seinerseits in Subintervalle einteilen, so daß die Zulassung von Konsum in den einzelnen T Intervallen das zu analysierende Problem nur verlagert, nicht aber verändert.

Die Bedingungen (11a) und (11b) implizieren, daß in keinem Intervall t die Umlaufgeschwindigkeit $v_{hi}^{0t} (v_{hi}^{1t})$ für irgendein $i \in I$ den Wert 1

(0) übersteigt¹⁹. Dennoch stellt diese extrem detaillierte Planung nicht sicher, daß die für ein einzelnes Intervall geplanten Transaktionen realisierbar sind.

Beispiel B: Es ist möglich, daß im Gleichgewicht einer Ökonomie mit $H = \{I, II, III\}$ und $\bar{i} = 5$ in der Periode t bei (zufällig) identischen Preisen auf den relevanten Märkten die Nettotransaktionen

	z_{h1}^t	z_{h2}^t	z_{h3}^t	z_{h4}^t	$z_{h\bar{i}}^t$
$h = I$	✓	1	-1	-1	1
$h = II$	✓	-1	1	-1	1
$h = III$	✓	0	0	2	-2

unter Einhaltung aller im Entscheidungsproblem (11) enthaltenen Restriktionen geplant sind und zwar so, daß III je einmal mit II und I auf dem $(4, \bar{i})$ -Markt und außerdem I und II auf dem $(2, 3)$ -Markt tauschen wollen. Angenommen, alle Konsumenten benötigen für die Durchführung ihrer Transaktionen die volle Länge des Intervalls t . Dann sind nicht alle geplanten Transaktionen in t durchführbar. Da in Beispiel B kein Gut als Tauschmittel verwendet wird, zeigt dieses einfache Beispiel gleichzeitig, daß die zusätzliche Forderung, innerhalb ein und desselben Intervalls t keine Tauschmittel zu verwenden, auch nicht die Durchführbarkeit aller Transaktionen in diesem Intervall garantiert.

Dieses „Tauschdilemma“ läßt sich vermeiden, wenn man verlangt, daß jeder Konsument in einem Intervall nur auf einem einzigen Markt aktiv sein darf²⁰. Formal erreicht man dies durch Einführung der zusätzlichen Restriktionen

$$(11c) \quad \left(p_{hi}^{kj} a_{hi}^{kj} \right) \cdot \left(\sum_{j \in H} \sum_{e \in I} \sum_{c \in I} t p_{he}^{jc} a_{he}^{jc} - t p_{hi}^{kj} a_{hi}^{kj} \right) = 0, \\ i \in I, k \in H, t = 1, \dots, T.$$

Im nichtlinearen Programm (11) muß die Gleichung (11c), hier kurz als $f_1(a) = 0$ bezeichnet, durch die Ungleichungen $f_1(a) \leq 0$ und $f_2(a) := -f_1(a) \leq 0$ berücksichtigt werden. Damit die zugehörigen Kuhn-Tucker-Bedingungen hinreichend für ein Maximum des nichtlinearen Programms (11) mit (11c) sind, müssen sowohl f_1 als auch f_2 konvexe Funktionen sein (vgl. z. B. *Intrilligator* 1971), d. h. $f_1(a)$ muß eine affine Funktion der „ a -Variablen“ sein. Diese Bedingung ist jedoch nicht er-

¹⁹ Die Definitionen von v_{hi}^n , $n = 0, 1$, müssen sinngemäß gegenüber den Definitionen (5a) und (5b) modifiziert werden.

²⁰ Für diesen Hinweis bin ich Herrn Prof. J. Niehans dankbar.

füllt, so daß die *Kuhn-Tucker*-Bedingungen nicht die Existenz eines Maximums garantieren.

Selbst wenn in der so beschriebenen Ökonomie die Existenz eines Gleichgewichts sichergestellt werden könnte, gibt es gravierende Einwände gegen die ökonomische Konzeption des Modells, die seine weitere Analyse nicht sinnvoll erscheinen lassen: Preise, die auf einzelne Paare von Tauschpartnern ausgerichtet sind, welche überdies diese Preise noch als „am Markt“ gegeben hinnehmen, sind in der Realität schwer vorstellbar. Auch sind Preisänderungen auf solchen Zwei-Güter-Zwei-Personen Märkten von Intervall zu Intervall um so realitätsfremder, je kleiner diese Intervalle gewählt sind. Es ist durchaus nicht abwegig, sich Intervallängen von einer Stunde oder sogar weniger vorzustellen. In dieser Größenordnung spielen sich viele Koordinierungsschwierigkeiten in Tauschvorgängen der Realität ab. Empirische Beobachtungen scheinen nahezuzeigen, daß die „Feinsteuerung“ in der zeitlichen und personellen Koordinierung und Abwicklung von Tauschgeschäften überwiegend nicht durch Preise, sondern häufig spontan mit einem gewissen Risiko der Bildung von Verkäufer- oder Käuferschlangen abgewickelt wird.

Aus diesem Grunde wird im folgenden das im Abschnitt 2 eingeführte Konzept der Zwei-Güter-Märkte wieder aufgegriffen. Gleichzeitig ist aber zu überlegen, ob die Individuen nicht doch die Möglichkeit haben, ihre Transaktionen so zu planen, daß sie die im Zuge der Tauschinterdependenzen auf sie zukommenden Zwangspausen annähernd richtig antizipieren.

Zur Prüfung dieser Frage soll das Beispiel A erneut herangezogen werden. Weil dort das Gut \bar{i} das allgemeine Tauschmittel und $\bar{x}_{h\bar{i}} = 1$, kann \bar{h} seine geplanten Transaktionen immer bereits im ersten Intervall realisieren — auch dann, wenn insgesamt kein Tauschprozeß existiert. Wählt man (5b) als Definition der Umlaufgeschwindigkeit, so gilt $v_{h\bar{i}}^1 = 0$ und $v_{h\bar{i}}^1 = 2$ für alle $h \in H$, $h \neq \bar{h}$. Dies legt den Verdacht nahe, daß eine „zu große“ Umlaufgeschwindigkeit des Tauschmittels \bar{i} bei den Individuen $h \neq \bar{h}$ für das Scheitern des Tauschprozesses verantwortlich zu machen ist. Zwar impliziert die endliche, maximal zur Verfügung stehende Transaktionszeit eine (natürliche) Obergrenze für alle Umlaufgeschwindigkeiten, doch ist es möglich, daß selbst Umlaufgeschwindigkeiten, die unter diesem (natürlichen) Limit liegen, in bezug auf die Existenz von Tauschprozessen „zu groß“ sein können. *Don Patinkin* (1965, S. 83) schreibt dazu:

“In brief, at any given set of prices the individual can always adjust his amounts of excess demand so as enable his given initial money balances to provide any desired degree of security against insolvency during the

ensuing week. Indeed, in the limiting case, he can — by restricting the value of his purchases to the level of these given balances — assure their complete adequacy for any possible time pattern of payments ...”

Das Beispiel B der 3-Konsumenten-5-Güter-Ökonomie widerlegt bereits die Aussage *Patinkins* in bezug auf den von ihm genannten Grenzfall. Dennoch erscheint es zweckmäßig, die Bedeutung einer in bezug auf das Transaktionsvolumen eines Gutes „genügend großen“ Ausstattung anhand eines Beispiels zu prüfen, das sich nur geringfügig von Beispiel A unterscheidet.

Beispiel C: Die Modifikation bezieht sich darauf, daß jeder Konsument zusätzlich zu der Güterausstattung gemäß (10) eine Einheit des Tauschmittels \bar{i} besitzt. Wie groß in diesem Fall die gesamte Periode mindestens sein muß, um die Durchführung eines Tauschprozesses zu ermöglichen, wird wie folgt ermittelt:

Sei das Gut \bar{i} das allgemeine Tauschmittel und sei \bar{h} eine gerade Zahl. Dann sollen im ersten Intervall gleichzeitig miteinander tauschen

- (a) \bar{h} und 1 auf dem $(\bar{i}, 2)$ -Markt,
- (b) h mit $h - 1$ auf dem $(\bar{i}, j = h + 1)$ -Markt
für $h = \bar{h} - 1, \bar{h} - 3, \bar{h} - 5, \dots, 3$.

Nach dem ersten Intervall haben sowohl \bar{h} als auch $\bar{h} - 1$ ihre geplanten Transaktionen vollständig realisiert. Wenn in dem zweiten Einheitsintervall nun noch h und $h - 1$ auf dem $(\bar{i}, j = h + 1)$ -Markt miteinander tauschen für $h = \bar{h} - 2, \bar{h} - 4, \bar{h} - 6, \dots, 2$, haben alle Konsumenten ihre Tauschpläne realisiert.

Sei wiederum Gut \bar{i} das allgemeine Tauschmittel, aber sei \bar{h} eine ungerade Zahl. Dann soll im ersten Intervall genauso getauscht werden, wie oben beschrieben, nur daß in (b) der Index h von $\bar{h} - 1, \bar{h} - 3$, bis $h = 4$ läuft. Im zweiten Intervall tauschen nur die Konsumenten 1 und 2 auf dem $(\bar{i}, 2)$ -Markt und im dritten Intervall tauschen analog zum ersten Fall h und $h - 1$ auf dem $(\bar{i}, j = h + 1)$ -Markt für $h = \bar{h} - 2, \bar{h} - 4, h - 6, \dots, 3$. Damit ist der Tauschprozeß nach dem dritten Intervall abgelaufen²¹.

Das Beispiel C zeigt die eminente Bedeutung der Umlaufgeschwindigkeit des Tauschmittels für die Existenz eines Tauschprozesses. Aller-

²¹ Bei leichten Modifikationen ($p_{ij}^j = 0$ für alle $j \in I$, $z_{hi} \leq 0$ für alle $h \in H$ usw.) kann dieses Beispiel auf die Fälle ausgeweitet werden, daß ein Gut $i, i \neq \bar{i}, 1$, allgemeines Tauschmittel ist. Nach geeigneter Umindizierung von Gütern und Konsumenten läßt sich dann auch der Beweis des im Text analysierten Falles anwenden.

dings müssen die Einschränkungen gemacht werden, (a) daß von einem Beispiel nicht auf die allgemeine Geltung dieses Zusammenhanges geschlossen werden kann und (b) daß selbst bei $v_{hi}^1 = 0$ für alle h kein Tauschprozeß realisierbar ist, wenn \bar{h} eine ungerade Zahl ist und die Gesamtperiode gleich ihrem Minimum $T = 2$ ist. Andererseits ist (c) die Bedingung $v_{hi}^1 = 0$ für alle $h \in H$ nur hinreichend, aber nicht notwendig dafür, daß bei $T \geq 3$ für beliebig große (endliche) \bar{h} ein Tauschprozeß mit i als allgemeinem Tauschmittel durchführbar ist.

Unter dem Vorbehalt der genannten Einschränkungen deuten die obigen Ausführungen darauf hin, daß bei gegebenem T einem Gleichgewicht in einer Ökonomie mit Zwei-Güter-Märkten tendenziell um so eher ein Tauschprozeß zugeordnet ist, je kleiner bei allen Konsumenten die Umlaufgeschwindigkeiten der verwendeten Tauschmittel sind.

4. Begründung der Tauschmittelfunktion des Papiergeldes

Die Vermutung, daß die Realisierung eines Tauschprozesses um so stärker gefährdet ist, je größer die (individuellen) Umlaufgeschwindigkeiten sind, kann in eine für das Kalkül eines Konsumenten relevante Restriktion seiner Aktionsmöglichkeiten umformuliert werden, indem man unterstellt, daß sich die individuellen Tauschkosten mit zunehmender Umlaufgeschwindigkeit eines Tauschmittels erhöhen. Die zusätzliche Transaktionszeit, die ein Individuum bei hohen Umlaufgeschwindigkeiten gemäß dieser Annahme antizipiert, soll dann bei „richtiger Kalkulation“ genau der mit steigenden Umlaufgeschwindigkeiten zunehmenden Zeit entsprechen, die dieser Konsument für Zwangspausen benötigt. Diese Zeit wird von sämtlichen Daten der betrachteten Ökonomie bestimmt, also von der Anzahl der Konsumenten und Güter, von den individuellen Anfangsausstattungen sowie den Präferenzen. Im einfachsten Fall, und auf diesen beschränkt sich die folgende Analyse, wird eine stetig differenzierbare, konvexe und zunehmende Funktion

$$(12) \quad {}^n g_{h1}^i = {}^n g_{h1}^i(v_{hi}^n) \quad (n = 0, 1)$$

$$\text{mit } {}^n g_{h1}^i = 0, \text{ wenn } v_{hi}^n \begin{cases} = 0 & \text{für } n = 0 \\ = -2 \bar{x}_{hi} & \text{für } n = 1 \end{cases}$$

eingeführt, wobei ${}^n g_{h1}^i$ als derjenige Betrag des Transaktionsinputs 1 (d. h. derjenige Zeitbedarf) ist, der in der Aktion des h aufgewendet werden muß, wenn die Umlaufgeschwindigkeit des Gutes i in dieser Aktion den Betrag v_{hi}^n hat. Die Hypothese über die mit zunehmender Umlaufgeschwindigkeit steigenden Transaktionskosten läßt sich nun analytisch zusätzlich zu der Annahme des mit dem Transaktionsvolumen

steigenden Tauschzeitbedarfs dadurch berücksichtigen, daß man (8) substituiert durch

$$(8') \quad \sum_i \sum_j (g_{hi}^j (a_{hi}^j + n_{hi}^j)) + \sum_i n_{hi}^i (v_{hi}^i) + x_{hi} \leq \bar{x}_{hi}.$$

Das individuelle Entscheidungsproblem in einer so spezifizierten Ökonomie lautet:

$$(13) \quad \max u_h(x_{h1}, \dots, x_{hi}, \dots, x_{h\bar{i}})$$

unter den Bedingungen (3), (4), (8') und

$$x_{hi} \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, \bar{i}, \\ a_{hi}^j, n_{hi}^j \geq 0 \text{ für } i, j \in I.$$

Im Programmierungsproblem (13) (wie auch in (6) und (11)) brauchen anders als in (1) die Variablen \hat{x}_{hi} nicht zusätzlich zu den Variablen x_{hi} berücksichtigt zu werden. Allerdings muß dann auch in den Definitionen (5) der Umlaufgeschwindigkeit \hat{x}_{hi} durch x_{hi} substituiert werden.

Durch Substitution von n_{hi}^j aus (3) in (4) und (8') sowie nach Berücksichtigung der Definitionen (5a) bzw. (5b) erhält man zu (3), (4) und (8') äquivalente Restriktionen (4') und (8'') als Funktionen des Vektors $y_h := (a_{h1}^2, \dots, a_{hi}^j, \dots, a_{hi}^{\bar{i}-1}, x_{h1}, \dots, x_{hi}, \dots, x_{h\bar{i}})$. Die linke Seite von (8'') wird kurz als $f_{hi}(y_h)$ und die linke Seite von (4') als $f_{hi}(y_h)$ für $i \in I$ bezeichnet. Es läßt sich zeigen, daß die Funktionen $f_{hi}(y_h)$ für $i = 1, \dots, \bar{i}$ konvex in $y_h \geq 0$ sind; da ferner die individuelle Nutzenfunktion quasikonkav in y_h ist, sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen aus der Maximierung der Lagrangefunktion

$$L(y_h, \lambda) = u_h(x_{h1}, \dots, x_{hi}, \dots, x_{h\bar{i}}) + \sum_{i=1}^{\bar{i}} \lambda_{hi} (\bar{x}_{hi} - f_{hi}(y_h))$$

mit $\lambda := (\lambda_{h1}, \dots, \lambda_{hi}, \dots, \lambda_{h\bar{i}})$ notwendig und hinreichend für die Existenz eines Maximums des nichtlinearen Programmierungsproblems (13).

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$u_{hi}^x := \frac{\partial u_h}{\partial x_{hi}}, \quad g_{in}^j := \frac{d}{dv_{hi}^n} (n_{hi}^j (v_{hi}^n)) \quad \text{für } n = 0, 1, \\ \pi_i^j := p_j^i / p_i^j, \\ E_0^{ij} := \lambda_{h1} \left(g_{h1}^j + g_{h1}^i \pi_j^i + \frac{g_{i0}'}{\bar{x}_{hi} + x_{hi}} + \frac{g_{j0}' \pi_j^i}{\bar{x}_{hj} + x_{hj}} \right), \\ E_1^{ij} := \lambda_{h1} (g_{h1}^j + g_{h1}^i \pi_j^i + g_{i1}' + g_{j1}' \pi_j^i), \\ F_0^i := \lambda_{h1} (g_{i0}' (v_{hi}^0)^2 / w_{hi}), \quad F_1^i := \lambda_{h1} g_{i1}',$$

und bei Vernachlässigung des Subskripts h lauten die hier relevanten *Kuhn-Tucker-Bedingungen* für $n = 0, 1$:

$$(14a) \quad u_1^x - \lambda_1 \left\{ \begin{matrix} = \\ \leq \end{matrix} \right\} 0, \text{ wenn } x_1 \left\{ \begin{matrix} \geq \\ = \end{matrix} \right\} 0,$$

$$(14b) \quad u_i^x - \lambda_i + F_n^i \left\{ \begin{matrix} = \\ \leq \end{matrix} \right\} 0, \text{ wenn } x_i \left\{ \begin{matrix} \geq \\ = \end{matrix} \right\} 0, \quad i \in I, i \neq \bar{i},$$

$$(14c) \quad -\lambda_{\bar{i}} + F_n^{\bar{i}} \left\{ \begin{matrix} = \\ \leq \end{matrix} \right\} 0, \text{ wenn } x_{\bar{i}} \left\{ \begin{matrix} \geq \\ = \end{matrix} \right\} 0,$$

$$(14d) \quad \lambda_j \pi_i^j - \lambda_i - E_n^{ij} \left\{ \begin{matrix} = \\ \leq \end{matrix} \right\} 0, \text{ wenn } a_i^j \left\{ \begin{matrix} \geq \\ = \end{matrix} \right\} 0, \quad i, j \in I.$$

Die *Lagrange-Multiplikatoren* λ_{hi} geben an, um wieviel sich $L(y_h, \lambda)$ erhöht, wenn die Ausstattung \bar{x}_{hi} des Konsumenten h ohne Änderung der Umlaufgeschwindigkeiten um eine Einheit erhöht wird. Wegen der Nichtsättigungsannahme in bezug auf die Güter 1 bis $\bar{i} - 1$ müssen außer für $i = \bar{i}$ die Bedingungen (4') und (8'') im Nutzenmaximum als Gleichungen erfüllt sein, so daß $\lambda_{hi} > 0$ für $i = 1, \dots, \bar{i} - 1$. Von Interesse ist nun, daß gemäß (14c) auch $\lambda_{h\bar{i}}$ positiv sein kann, und zwar wenn der Zeitbedarf bei steigenden Umlaufgeschwindigkeiten zunimmt, d. h. wenn (12), wie oben unterstellt, eine zunehmende Funktion ist. Dies ist nicht nur eine notwendige Voraussetzung dafür, daß der Konsument zu einer positiven Kassenhaltung $x_{h\bar{i}}$ bereit ist, sondern gemäß (14d) auch gleichzeitig dafür, daß er Papiergeld anbietet oder nachfragt. Wenn $i \neq 1$, \bar{i} und $a_{hi}^{\bar{i}} > 0$ in der nutzenmaximalen Aktion des Konsumenten h , dann muß $\lambda_{h\bar{i}}$ (und auch $\pi_{\bar{i}}^{\bar{i}}$) positiv sein, da (14d) verlangt, daß in diesem Fall $\lambda_{h\bar{i}} \pi_{\bar{i}}^{\bar{i}}$, der (subjektive) Wert des Betrages von \bar{i} , den h für das Angebot einer Einheit von i bekommen hat, gleich den ihm entstehenden Transaktionskosten $E_{hn}^{i\bar{i}}$ sein müssen, die h mit dem Wert der entgangenen Freizeit berücksichtigt. Die Positivität von $\pi_{\bar{i}}^{\bar{i}}$ ist wiederum — anders als im ersten, in Abschnitt 2 diskutierten Transaktionskostenmodell — nicht generell mit der Gleichgewichtsbedingung (7) inkompatibel, da gemäß (14c) bei positiven Papiergeldpreisen durchaus die Möglichkeit besteht, daß die Summe der gewünschten Kassenbestände gerade gleich der insgesamt vorhandenen Papiergeldmenge ist.

In bezug auf die Tauschmittelverwendung in der hier behandelten Ökonomie lassen sich folgende Ergebnisse ableiten²²:

Theorem: Sei $i, j, e, c \in I$ und das Individuum wähle bei Indifferenz über die Tauschwege immer den direkten Tausch. Das Gut e wird in der nutzenmaximalen Aktion des Individuums dann und nur dann

²² Die Beweise lassen sich analog zu denen führen, die sich bei *Karni* (1973) und bei *Pethig* (1975, S. 279 ff.) auf vergleichbare Aussagen in jeweils anderen Modellen beziehen.

als allgemeines Tauschmittel verwendet, wenn für alle $i, j \in I$ und alternativ für $n = 0$ oder $n = 1$ gilt

$$(15) \quad (E_{hn}^{ij} + \lambda_{hi}) \frac{\pi_j^c \pi_c^i}{\pi_j^i} - \lambda_{hi} \begin{cases} < E_{hn}^{ic} + E_{hn}^{cj} \pi_c^i & \text{für alle } c \neq e \\ > E_{hn}^{ic} + E_{hn}^{cj} \pi_c^i & \text{für } c = e \end{cases}$$

Korollar: Sei ein Gleichgewicht der Ökonomie gegeben, d. h. die Preise seien so, daß für alle h (13) erfüllt ist und die individuellen nutzenmaximalen Transaktionen der Bedingung (7) genügen. Ferner mögen alle Individuen bei Indifferenz über die Tauschwege den direkten Tausch wählen. In einem solchen Gleichgewicht übt das Gut e dann und nur dann die Funktion des allgemeinen Tauschmittels aus, wenn für alle $h \in H$ und alle $i, j \in I$ die Ungleichungen (15) erfüllt sind.

Zu betonen ist, daß das allgemeine Tauschmittel e jedes beliebige Gut in I sein kann, also auch $e = \bar{i}$. Damit ist es gelungen, die Tauschmittelfunktion des Papiergeldes aus den individuellen Nutzenmaximierungskalkülen abzuleiten, ohne dieses Papiergeld als Argument der Nutzenfunktion oder als produktiven Transaktionsinput zu betrachten und vor allem auch ohne den Konsumenten — via Annahme — die Möglichkeit zu nehmen, „am Ende der Welt“ keine Kasse zu halten. Den Grundgedanken dieses hier vorgestellten Ansatzes kann man in sehr weiter Auslegung als quantitätstheoretisch bezeichnen, obwohl weder ad-hoc-Annahmen über die Konstanz der (individuellen) Umlaufgeschwindigkeiten noch solche über deren Limitierung²³ unter die durch die Periodenlänge vorgegebene Grenze eingeführt worden sind. Das quantitätstheoretische Element des obigen Ansatzes besteht im Ergebnis (nicht in den Voraussetzungen) darin, daß „... the amount of coins which a person cares to keep in his pocket is determined by the amount of business he has to do ...“²⁴.

Zusammenfassung

Das Untersuchungsziel besteht darin, die Tauschmittelfunktion des Geldes in allgemeinen Gleichgewichtsmodellen zu begründen, ohne dessen Nützlichkeit vorauszusetzen. Ausgehend von den unbefriedigenden transaktionstheoretischen Implikationen des *Debreu*-Modells wird diskutiert, wie durch Einführung von Transaktionskosten, die mit dem Transaktionsvolumen zunehmen, in Ökonomien mit Zwei-Güter-Märkten die Tauschmittelfunktion von Warengeld erklärt werden kann. Doch die Begründung für die Verwendung

²³ Diese Annahme wird implizit in *Clower* (1967) vorgeschlagen; vgl. auch *Grandmont* und *Younes* (1972) und *Pethig* (1973 und 1975).

²⁴ Zitiert aus den „Official Papers by Alfred Marshall“ nach *Clower* (1963, S. 165).

eines „stoffwertlosen“ Tauschmittels stellt zusätzliche analytische Probleme. Nach einer mikroökonomischen Analyse der Relevanz der Tauschmittel-Umlaufgeschwindigkeiten für die zeitliche Abwicklung eines gegebenen Tauschprozesses wird eine Lösung dieser Probleme mit Hilfe der Hypothese gefunden, daß die Transaktionskosten (auch) eine zunehmenden Funktion der (individuellen) Umlaufgeschwindigkeiten sind.

Summary

The purpose of this paper is to rationalize the use of (paper) money as a medium of exchange in general equilibrium models without presupposing its utility. Introducing transactions costs as an increasing function of the transactions volume in economies with two-goods markets the function of commodity money as a medium of exchange can be explained. However, the rationalization of the use of media of exchange without „intrinsic value“ causes additional analytical problems. It is shown in a microeconomic analysis that the velocities of circulation of the media of exchange are important for the time profile of a given exchange process. This observation leads to the hypothesis that transactions costs are (also) increasing functions of these velocities, which in turn yields the result that paper money can in fact be a medium of exchange under some specific conditions.

Literatur

- Brunner, K. und A. H. Meltzer (1971), The Uses of Money: Money in the Theory of an Exchange Economy, *American Economic Review* 61 (1971), S. 784 - 805.
- Clower, R. W. (1967), A Reconsideration of the Microfoundations of Monetary Theory, *Western Economic Journal* 6 (1967), S. 1 - 8.
- (1963), Classical Monetary Theory Revisited, *Economica* 30 (1963), S. 165 bis 170.
- Debreu, G. (1959), *Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, New York 1959.
- Grandmont, J.-M. (1973), On the Short Run Equilibrium in a Monetary Economy, in J. Dreze (Hrsg.), *Allocation under Uncertainty, Equilibrium and Optimality*, London u. a. 1973.
- Grandmont, J.-M. und Y. Younes (1972), On the Role of Money and the Existence of a Monetary Equilibrium, *Review of Economic Studies* 39 (1972), S. 355 - 372.
- Hahn, F. H. (1971), Equilibrium with Transactions Costs, *Econometrica* 39 (1971), S. 417 - 439.
- (1965), On Some Problems of Proving the Existence of an Equilibrium in a Monetary Economy, in F. H. Hahn und F. P. R. Brechling (Hrsg.), *The Theory of Interest Rates*, New York 1965.
- Intrilligator, M. D. (1971), *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Englewood Cliffs 1971.
- Karni, E. (1973), Transactions Costs, and the Demand for Media of Exchange, *Western Economic Journal* 11 (1973), S. 71 - 80.

- Kurz, M. (1974), Equilibrium with Transactions Costs and Money in a Single-Market Exchange Economy, *Journal of Economic Theory* 7 (1974), S. 418 bis 452.
- Marschak, J. (1950), The Rationale of the Demand for Money and of „Money Illusion“, *Metroeconomica* 2 (1950), S. 71 - 100.
- Niehans, J. (1971), Money and Barter in General Equilibrium with Transactions Costs, *American Economic Review* 61 (1971), S. 773 - 783.
- Ostroy, J. M. (1973), The Informational Efficiency of Monetary Exchange, *American Economic Review* 63 (1973), S. 597 - 610.
- Patinkin, D. (1965), Money, Interest, and Prices. An Integration of Monetary and Value Theory, 2. Aufl. New York u. a. 1965.
- Pethig, R. (1973), Equilibrium and Media of Exchange in a One-Period General Equilibrium Model with Transactions Costs and Paper Money, Beiträge zur angewandten Wirtschaftsforschung, Universität Mannheim, Discussion Paper No. 41/1973.
- (1975), Zur Theorie der Transaktionen, Ein Beitrag zur mikroökonomischen Grundlegung der Geldtheorie, Tübingen 1975.
- Sontheimer, K. C., A Technological Representation of Money, erscheint in *Metroeconomica*.
- (1972), On the Determination of Money Prices, *Journal of Money, Credit and Banking* 4 (1972), S. 489 - 508.
- Starr, R. M. (1974), The Price of Money in a Pure Exchange Monetary Economy with Taxation, *Econometrica* 42 (1974), S. 45 - 54.
- (1970), Equilibrium and Demand for Media of Exchange in a Pure Exchange Economy with Transactions Costs, Cowles Foundation Discussion Paper No. 300, 1970.
- Veendorp, E. C. H. (1972), Money in a Static Theory of Optimal Payment Arrangements. A Comment, *Journal of Money, Credit, and Banking* 4 (1972), S. 437 - 440.
- (1970), General Equilibrium Theory for a Barter Economy, *Western Economic Journal* 8 (1970), S. 1 - 23.
- Walras, L. (1954), Elements of Pure Economics or the Theory of Social Wealth, transl. by W. Jaffé, London 1954.
- Wicksell, K. (1898), Geldzins und Güterpreise, Jena 1898; Übersetzung: Interest and Prices, New York 1965.