

# Wachstum, Kreislauf- gleichgewicht und Vollbeschäftigung

## Zum Problem der Stabilität des „Harrod-Domar-Modells“

Von Norbert Reetz

In einem Wachstumsmodell des Harrod-Domar-Typs werden unter Ein-  
schluß der Produktionsfunktion und der Realverteilung Wachstumsprozesse  
im Ungleichgewicht und bei alternativen Beschäftigungslagen diskutiert.

### 1. Fragestellung und Ergebnisse

Lehrbuchmäßige Darstellungen der Wachstumstheorie suggerieren  
immer noch häufig den Merksatz: „Das Wachstumsmodell des *Harrod-  
Domar*-Typs ist instabil, das des neoklassischen Typs ist stabil.“ Diese  
einfache Formel ist falsch, weil sie Modelle mit gegensätzlichen Frage-  
stellungen unzulässig zusammenfaßt und nicht nach verschiedenen Stabi-  
litätsmerkmalen differenziert. Daß es stabile Varianten des *Harrod-  
Modells* gibt, ist bekannt<sup>1</sup>. In diesen Fällen wird jedoch im allgemeinen  
am Kreislaufgleichgewicht festgehalten und die Beschäftigungslage  
höchstens implizit in der Investitionsfunktion berücksichtigt. Als Aus-  
gangspunkt für konjunkturtheoretische Überlegungen<sup>2</sup> wäre es jedoch  
zweckmäßig, in einem Modell, welches das tatsächliche Wachstum er-  
klären will, Gleichgewichts- und Vollbeschäftigungsbedingungen zu-  
nächst einmal aufzugeben. Von diesem Ausgangspunkt wird im folgen-  
den durch eine differenzierende Analyse insbesondere des „*Harrod-  
Domar-Modells*“ gezeigt, was Stabilität bedeutet, wann ihre Untersu-  
chung sinnvoll ist und wie aus realistischen Annahmen hinsichtlich der  
Produktions- und Investitionsentscheidungen der Unternehmer stabile  
Wachstumspfade gewonnen werden können.

Ein Modell wird als stabil bezeichnet, wenn seine Variablen einem  
Zustand oder einer Entwicklung, die zuvor als gleichgewichtig definiert  
wurden, im Zeitablauf beliebig nahe kommen. Oft ist ein Modell in be-

---

<sup>1</sup> Vgl. z. B. *Nelson* (1961) und *Green* (1962).

<sup>2</sup> Mit konjunkturtheoretischen Problemen im *Harrod-Modell* beschäftigen  
sich *Heubes* (1973) und *Bartmann* (1974).

zug auf bestimmte Variable oder Verknüpfungen von Variablen stabil, in bezug auf andere dagegen nicht; man muß in diesen Fällen Angaben machen, worauf sich die Stabilität bezieht, es gibt keine Stabilität schlechthin.

In Wachstumsmodellen wird als Gleichgewicht ein System von Wachstumspfaden der Variablen definiert, in dem jede Variable mit einer konstanten Wachstumsrate bei Kreislaufgleichgewicht und Vollbeschäftigung zunimmt. Existiert ein solcher Wachstumspfad und ist eines dieser Merkmale verletzt, dann muß geprüft werden, ob das betreffende Modell in bezug auf dieses Merkmal stabil ist; es geht also um die Frage, ob die Differenzen zwischen tatsächlicher Produktion und realer Nachfrage sowie zwischen tatsächlicher und möglicher Produktion gegen Null gehen und ob eine beliebige Wachstumsrate gegen eine Konstante konvergiert. Ist der gleichgewichtige Wachstumspfad einer Variablen an bestimmte Anfangsbedingungen gebunden, muß darüber hinaus untersucht werden, ob sich ein beliebiger, aus dem Modell ergebender Wachstumspfad dieser Variablen dem gleichgewichtigen nähert<sup>3</sup>. Für die Existenz eines gleichgewichtigen Wachstumspfades sind in erster Linie die Eigenschaften der Produktionsfunktion entscheidend, während es für die Stabilität auf die Verhaltensweise der Haushalte bezüglich Faktorangebot und Güternachfrage sowie der Unternehmen bezüglich Produktion (Faktornachfrage und Güterangebot) und Investition ankommt.

Im vorliegenden Aufsatz wird nun je ein Modell vom *Domar*- und *Harrod*-Typ formuliert und auf die Bedingungen für die Existenz eines gleichgewichtigen Wachstumspfades und die Stabilität hin untersucht. Das *Harrod*-Modell wird zu diesem Zweck gegenüber der üblichen Darstellung unter Beibehaltung seiner Grundstruktur in folgender Weise geändert: Der produktionstheoretische Teil des *Domar*-Modells wird in das *Harrod*-Modell eingefügt; die Bedingung für das Kreislaufgleichgewicht wird ersetzt durch eine Hypothese bezüglich der Produktionsentscheidung der Unternehmen; die induzierten Investitionen sollen von Änderungen der realen Nachfrage abhängig sein, und der Akzelerationskoeffizient soll zunehmen bzw. abnehmen, wenn die reale Nachfrage über die mögliche Produktion steigt bzw. unter die mögliche Produktion sinkt; der Bruchteil der geplanten Investition, der tatsächlich zu einer Erhöhung des Kapitalstocks führt, hängt von der relativen Marktmacht der Investoren im Vergleich zu den Konsumenten ab<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup> Zur Definition gleichgewichtigen Wachstums und der Stabilität vgl. z. B. Allen (1967), S. 174 f. und S. 184 ff. sowie Vogt (1968), S. 10 ff. und S. 16 ff.

<sup>4</sup> Ein Teil dieser Variationen wird bereits von Vogt (1964) verwendet. Vogt erklärt vor allem zyklische Bewegungen um den Wachstumstrend. Sein Modell ist sehr viel breiter angelegt als hier, führt aber nicht zu geschlossenen Lösungen.

Die Analyse der Modelle führt zu folgenden Ergebnissen:

Das Modell vom *Domar*-Typ fragt nach der zur Aufrechterhaltung von Kreislaufgleichgewicht und Vollbeschäftigung erforderlichen zeitlichen Entwicklung der Realinvestitionen. Der so bestimmte Wachstumspfad der Realinvestitionen ist wegen der limitationalen Produktionsfunktion von vornherein mit einer konstanten Wachstumsrate verbunden. Da das *Domar*-Modell mangels einer Investitionsfunktion und einer Hypothese über die Produktionsentscheidung der Unternehmen nicht das tatsächliche Wachstum erklärt, sondern ein Wachstum unter Kreislaufgleichgewicht und bei Vollbeschäftigung postuliert, erübrigt sich die Untersuchung der Stabilität dieser beiden Merkmale. Da es zudem nur einen möglichen Wachstumspfad gibt, der wegen der Konstanz der Wachstumsrate zugleich der gleichgewichtige ist, entfällt hier auch die Prüfung der Stabilität der Wachstumsrate oder der Annäherung eines beliebigen aus dem Modell folgenden zeitlichen Verlaufs der Variablen an den gleichgewichtigen Wachstumspfad. Das Attribut „stabil“ oder „instabil“ ist für das *Domar*-Modell wegen seiner Fragestellung, verbunden mit einer speziellen Produktionstechnik, ohne Relevanz.

Das Modell vom *Harrod*-Typ enthält statt je einer Bedingung für das Kreislaufgleichgewicht und die Vollbeschäftigung eine Investitionsfunktion und eine Hypothese darüber, wie die Unternehmen die Höhe der Produktion planen; das Modell will also den tatsächlichen Wachstumspfad der Variablen erklären. Es existiert in diesem Modell für jeden Kapitalstock und jede Zunahme der realen Nachfrage im Anfangszeitpunkt genau ein Wachstumspfad. Bei konstantem Akzelerationskoeffizienten gibt es genau dann genau einen gleichgewichtigen Wachstumspfad, wenn Akzelerations- und Kapitalkoeffizient übereinstimmen; dieser gleichgewichtige Wachstumspfad ist an bestimmte Anfangsbedingungen gebunden. Ist der Akzelerationskoeffizient größer (kleiner) als der Kapitalkoeffizient, geht das Modell, unabhängig von den Anfangsbedingungen, in einen Zustand der Unterbeschäftigung bei Kreislaufgleichgewicht (der Vollbeschäftigung bei Kreislaufgleichgewicht) über. Entsprechen sich Akzelerations- und Kapitalkoeffizient, dann wird diejenige Beschäftigungs- und Kreislaufgleichgewichtslage beibehalten, die im Ausgangszeitpunkt geherrscht hat. Die Wachstumsraten der Variablen sind konstant oder konvergieren gegen eine Konstante, die jedoch nicht die gleichgewichtige Wachstumsrate und nicht für alle Variablen dieselbe Konstante zu sein braucht. Bei konstantem Akzelerationskoeffizienten hängt es also vom Verhältnis zwischen Akzelerations- und Kapitalkoeffizient und teilweise auch von den Anfangsbedingungen ab, in bezug auf welche Merkmale gleichgewichtigen Wachstums das *Harrod*-Modell stabil ist; es ist in keinem Fall bezüglich aller

Merkmale instabil. Für den Spezialfall eines variablen Akzelerationskoeffizienten wird gezeigt, daß das hier verwendete Modell vom *Harrod*-Typ in bezug auf Abweichungen vom Kreislaufgleichgewicht, der Vollbeschäftigung und der gleichgewichtigen Wachstumsrate stabil sein kann. Den Unternehmen wird dabei unterstellt, daß sie auf lange Sicht den Akzelerationskoeffizienten in Höhe des Kapitalkoeffizienten fixieren wollen, kurzfristig jedoch nach oben oder unten von diesem mittleren Wert abweichen je nachdem, ob die reale Nachfrage die mögliche Produktion übertrifft oder hinter ihr zurückbleibt. Bezüglich der relativen Marktmacht von Investoren und Konsumenten wird im allgemeinen davon ausgegangen, daß beide Gruppen ökonomisch „gleich stark“ sind und daher Güter im Verhältnis ihrer Nachfrage zur Gesamtnachfrage erhalten.

## 2. Das Grundmodell

Gegeben sei folgendes Grundmodell<sup>5</sup>:

- |     |   |   |
|-----|---|---|
| (1) | $Z = C + I$   | <b>Z:</b> Gesamtwirtschaftliche reale Nachfrage                                 |
| (2) | $C = cY$  | <b>C:</b> Geplanter Realkonsum  |
| (3) | $\dot{\bar{Y}} = \frac{1}{\sigma} \dot{K}$  | <b>I:</b> Geplante Realinvestition (netto)                                      |
| (4) | $\dot{K} = I^+$   | <b>Y:</b> Realeinkommen   |
| (5) | $I^+ = \kappa I$ mit $0 \leq \kappa \leq 1$   | <b><math>\bar{Y}</math>:</b> Produktion bei Vollbeschäftigung des Kapitalstocks |
|     |   | <b>K:</b> Kapitalstock  |
| (6) | $\kappa = \begin{cases} 1, & \text{wenn } Z \leq Y \\ \kappa \left( \frac{Y}{Z} \right) & \text{mit } \kappa(1) = 1 \\ & \text{und } \kappa' \geq 0, \\ & \text{wenn } Z > Y \end{cases}$ | <b><math>I^+</math>:</b> Tatsächliche Realinvestition (netto)                   |
|     |   | <b>c:</b> Marginale Konsumneigung   |
|     |   | <b><math>\sigma</math>:</b> Marginaler Kapitalkoeffizient                       |
|     |   | <b><math>\kappa</math>:</b> Rationierungskoeffizient                            |

Relation (1) definiert die gesamtwirtschaftliche reale Nachfrage. Relation (2) ist die Konsumfunktion, kennzeichnet also die Verhaltensweise der Haushalte. Die produktionstechnische Relation (3) bestimmt den maximal möglichen Realeinkommenszuwachs aufgrund einer Zunahme des Kapitalstocks. Die Änderung des Kapitalstocks entspricht gemäß Relation (4) der tatsächlichen Netto-Realinvestition; Lageränderungen werden also vernachlässigt. Relation (5) bringt zum Ausdruck, daß ge-

<sup>5</sup> Ein Punkt über einer Variablen bedeutet die Ableitung dieser Variablen nach der Zeit; also z. B.  $\dot{K} = \frac{dK}{dt}$  usw.

plante und tatsächliche Realinvestitionen im allgemeinen voneinander abweichen, wenn man Kreislaufgleichgewicht zuläßt<sup>6</sup>. Der Bruchteil  $\kappa$  der geplanten Realinvestition, der schließlich realisiert wird, hängt gemäß Relation (6) vom Verhältnis der Produktion zur Nachfrage ab. Für  $Z \leq Y$  können alle geplanten Realinvestitionen durchgeführt werden, daher gilt  $\kappa = 1$ . Für  $Z > Y$  beschränkt die Produktion den tatsächlichen Realkonsum und die tatsächlichen Realinvestitionen, und zwar um so mehr, je stärker  $Z$  und  $Y$  auseinander fallen; es gilt  $\kappa \leq 1$ , und tendenziell steigt  $\kappa$  mit zunehmender Annäherung von  $Z$  und  $Y$ . Die genaue Form der Funktion  $\kappa\left(\frac{Y}{Z}\right)$  hängt davon ab, in welchem Ausmaß Investoren und Konsumenten im Verhältnis zueinander ihre Ansprüche bei steigenden Preisen durchsetzen können. Grenzfälle sind z. B.

$$\begin{aligned}
 (6a) \quad & \kappa\left(\frac{Y}{Z}\right) \equiv 1, \\
 (6b) \quad & \kappa\left(\frac{Y}{Z}\right) \equiv \frac{Y}{Z} \text{ und} \\
 (6c) \quad & \kappa\left(\frac{Y}{Z}\right) \equiv \frac{1 - c}{\frac{Z}{\bar{Y}} - c}.
 \end{aligned}$$

(6a) bedeutet, daß die Investoren ihre Ansprüche an die Produktion stets voll durchsetzen, etwa weil sie einen besseren Zugang zum Kreditmarkt haben als die Konsumenten. (6b) bedeutet, daß Investoren und Konsumenten ökonomisch ungefähr gleichstark sind und daher das Produkt im Verhältnis der Nachfragekomponenten  $C$  und  $I$  zur Gesamtnachfrage  $Z$  aufgeteilt wird. In (6c) wird unterstellt, daß die Konsumenten ihre Pläne ohne Einschränkungen realisieren und daher nur eine tatsächliche Realinvestition in Höhe der geplanten Realersparnis möglich ist. In den Fällen (6a) bzw. (6c) wird natürlich  $I^+$  bzw.  $C^+$  durch  $Y$  absolut begrenzt. Solange jedoch  $0 < c < 1$ , ist diese Grenze für  $C^+$  nicht relevant.

Variable des Systems (1) - (6) sind  $Z, C, I, Y, \bar{Y}, K, I^+$  und  $\kappa$ , Parameter sind  $c$  und  $\sigma$ . Es fehlen zwei Relationen, um die zeitliche Entwicklung aller Variablen bestimmen zu können. Die Fragestellung an das Modell ist entscheidend dafür, durch welche Relationen man das System (1) - (6) schließt. Interessiert man sich für den tatsächlichen Wachstumspfad der Variablen, dann muß je eine Hypothese über die Verhaltensweise der Unternehmen bezüglich  $I$  und  $Y$  in das System (1) - (6) eingefügt

<sup>6</sup> Aus (2) und (5) ergibt sich für den tatsächlichen Realkonsum  $C^+ = Y - I^+$ :

$$(+) \quad C^+ = \frac{1}{c} \left( 1 - \kappa \frac{I}{Y} \right) C$$

werden; diesen Weg schlägt *Harrod* ein. Möchte man dagegen wissen, ob es Wachstumspfade der Variablen gibt, die mit Kreislaufgleichgewicht und Vollbeschäftigung verbunden sind, dann schließt man das Modell durch die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen und erhält als Ergebnis die zulässigen Verhaltensweisen der Unternehmen bezüglich Realinvestition und Produktion; diesen Weg wählt *Domar*<sup>7</sup>.

### 3. Ein Modell vom Domar-Typ

Das Grundmodell (1) - (6) werde geschlossen durch die Bedingungen für das Kreislaufgleichgewicht

$$(7) \quad Y = Z$$

und für die Vollbeschäftigung

$$(8) \quad \bar{Y} = Y .$$

Man erhält das

$$\text{Modell } D : = \{(1) - (8)\}$$

Wenn im Zeitpunkt  $t_0 = 0$  ein Kapitalstock in Höhe von  $K_0$  vorhanden ist, dann ergibt sich aus Modell  $D$ <sup>8</sup>:

$$(9) \quad I = wK_0 e^{wt} \quad \text{und}$$

$$(10) \quad Y = \frac{1}{\sigma} K_0 e^{wt} \quad \text{mit der Abkürzung}$$

$$(11) \quad w := \frac{1 - c}{\sigma}$$

Eine Spezifizierung der Funktion  $\kappa\left(\frac{Y}{Z}\right)$  in (6) ist wegen (7) nicht erforderlich.

<sup>7</sup> Die Modelle von *Harrod* und *Domar* unterscheiden sich in ihrer Fragestellung, durch die ihre ökonomische Struktur bestimmt wird. Formal geschlossen sind beide Modelle. Vgl. jedoch *Rijckeghem* (1963), der anderer Ansicht ist.

<sup>8</sup> Im folgenden ist unterstellt, daß ohne Kapitalstock keine Produktion möglich ist und daß jeder Kapitalstock einen bestimmten Output produzieren kann:  $K = 0 \Leftrightarrow \bar{Y} = 0$ . In diesem Fall folgt aus einem konstanten marginalen auch ein konstanter durchschnittlicher Kapitalkoeffizient:

$$(+)\quad \bar{Y} = \frac{1}{\sigma} K$$

Gilt (+), dann genügt  $K_0$  als einzige Anfangsbedingung für die Lösung des Modells  $D$ ; andernfalls muß auch der durchschnittliche Kapitalkoeffizient in  $t_0 = 0$  bekannt sein.

Durch Modell *D* werden Wachstumspfade der geplanten Realinvestitionen und der geplanten Produktion gesucht, die mit Vollbeschäftigung und Kreislaufgleichgewicht verbunden sind. Die Relationen (9) - (11) zeigen, daß es genau einen derartigen Wachstumspfad gibt. Soll ein Kreislaufgleichgewicht bei Vollbeschäftigung gewährleistet sein, dann sind nur solche Verhaltensweisen der Unternehmen im Rahmen des Grundmodells zulässig, die zu den durch (9) und (10) beschriebenen zeitlichen Entwicklungen der Realinvestitionen und der Produktion führen.

Wegen der besonderen Fragestellung erübrigt sich eine Stabilitätsanalyse im Modell *D*. Es geht hier nicht, wie es für eine Untersuchung der Stabilität erforderlich wäre, um die Auswirkungen von Verhaltenshypothesen auf den tatsächlichen Wachstumspfad der Variablen, sondern um die Existenz von Wachstumspfaden mit bestimmten Eigenschaften, die unabhängig von Verhaltenshypothesen formuliert sind.

#### 4. Ein Modell vom Harrod-Typ

##### 4.1 Die Relationen des Modells

Es soll nun je eine Verhaltenshypothese der Unternehmen bezüglich des Umfangs der Realinvestitionen und der Höhe der Produktion in das Grundmodell eingefügt werden.

Es sei unterstellt, daß die Unternehmen die Realinvestitionen in Abhängigkeit von der Änderung der realen Nachfrage planen:

$$(12) \quad I = \beta Z \quad \beta: \text{Akzelerationskoeffizient}$$

Der Reaktionskoeffizient  $\beta$  wird in Modellen, die keine produktionstechnischen Relationen enthalten, meist als Parameter behandelt:

$$(13a) \quad \beta = \beta_0$$

Die Hypothese (13a) ist im Rahmen des Grundmodells (1) - (6) sehr restriktiv. Das Grundmodell enthält in (3) den Ansatz einer Produktionsfunktion, und daher läßt sich der Zusammenhang zwischen der Entscheidung über die Realinvestitionen einerseits und den technischen Bedingungen der Produktion sowie dem Auslastungsgrad des Kapitalstocks andererseits nicht mehr vernachlässigen. Investiert wird, um eine steigende Nachfrage mit einem entsprechend steigenden Angebot befriedigen zu können. Das würde dafür sprechen, daß  $\beta = \sigma$  gewählt wird; denn dann entspricht die durch  $I$  ermöglichte Mehrproduktion  $\dot{Y}$  genau der Mehrnachfrage  $\dot{Z}$ , welche  $I$  induziert hat. Es kann jedoch sein, daß im Ausgangszustand das mögliche Angebot  $\bar{Y}$  die tatsächliche Nachfrage  $Z$  übertrifft und daher freie Kapazitäten vorhanden sind oder unfreiwillig die Lagerbestände zunehmen; in diesem Fall wird  $\beta$  sicher kleiner

gewählt, als gemäß der Grenzproduktivität des Kapitals erforderlich wäre. Umgekehrt wird bei einer Übernachfrage und Vollbeschäftigung  $\beta$  entsprechend größer sein.

Als Alternative zu (13a) wird daher auch

$$(13b) \quad \beta = \sigma f\left(\frac{Z}{\bar{Y}}\right) \text{ mit } f > 0, f(1) = 1, f' > 0$$

diskutiert.

In einem langfristigen Wachstumsmodell ist es sinnvoll, den Unternehmen zu unterstellen, daß sie ihre Produktion (das Realeinkommen) der realen Nachfrage anpassen. Auf diese Weise entstehen weder unerwünschte Lagerbestände durch zu hohe Produktion, noch werden durch zu geringe Produktion Absatz- und damit Gewinnchancen ausgelassen. Die Unternehmen unterliegen jedoch der Restriktion, daß ihr Output nach Maßgabe des vorhandenen Kapitalstocks und des Kapitalkoeffizienten eine bestimmte Grenze nicht überschreiten kann. Unter diesen Annahmen ergibt sich folgende Hypothese bezüglich der Höhe der Produktion:

$$(14) \quad Y = \begin{cases} \bar{Y}, & \text{wenn } Z \geq \bar{Y} \\ Z, & \text{wenn } Z \leq \bar{Y} \end{cases}$$

Führt man (12), zusammen mit (13a) oder (13b), und (14) in das Grundmodell ein, so erhält man im Falle eines konstanten Akzelerationskoeffizienten

$$\text{Modell } H_c := \{(1) - (6), (12), (13a), (14)\}$$

und im Falle eines variablen Akzelerationskoeffizienten

$$\text{Modell } H_v := \{(1) - (6), (12), (13b), (14)\}$$

Die Modelle  $H_c$  und  $H_v$  beschreiben den tatsächlichen Wachstumspfad der Variablen.

#### 4.2 Die Lösung des Modells bei konstantem Akzelerationskoeffizienten

Im folgenden Abschnitt wird Modell  $H_c$  diskutiert. Als spezielle Hypothese bezüglich der relativen Marktmacht von Investoren und Konsumenten wird (6b) verwendet, wenn die Produktion von der Nachfrage übertroffen wird<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Die Hypothesen (6b) und (6c) haben den Vorteil, daß keine zusätzliche Restriktion für die Variablen erforderlich ist. Anders verhält es sich bei der

Dieses Modell führt im Fall der Übernachfrage auf die Differentialgleichung

$$(15) \quad \ddot{Z} = \lambda \dot{Z} + \frac{\beta_0}{\sigma} \frac{\dot{Z}^2}{Z} \text{ für } Z \geq \bar{Y} \text{ mit}$$

$$(16) \quad \lambda := \frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{\sigma}$$

und im Fall der Unterbeschäftigung auf die Differentialgleichung

$$(17) \quad \dot{Z} = \mu Z \quad \text{für } Z \leq \bar{Y} \text{ mit}$$

$$(18) \quad \mu := \frac{1 - c}{\beta_0} .$$

Löst man (15) und (17), dann erhält man folgende zeitliche Entwicklungen der Variablen  $Z$  und  $\bar{Y}$ :

$$(19) \quad Z = \begin{cases} \left( \frac{c}{\sigma} K_0 + \beta_0 \dot{Z}_0 \right) \left[ 1 + \frac{e^{\lambda(t-t_0)} - 1}{1 + \frac{c}{\sigma \beta_0} \frac{K_0}{\dot{Z}_0}} \right]^{\frac{1}{\lambda \beta_0}} & \text{für } Z \geq \bar{Y}, \text{ falls } \lambda \neq 0 \\ \left( \frac{c}{\sigma} K_0 + \sigma \dot{Z}_0 \right) e^{\frac{t-t_0}{\gamma + \frac{c}{\sigma} \frac{K_0}{\dot{Z}_0}}} & \text{für } Z \geq \bar{Y}, \text{ falls } \lambda = 0 \\ \frac{\dot{Z}_0}{\mu} e^{\mu(t-t_0)} & \text{für } Z \leq \bar{Y} \end{cases}$$

Hypothese (6a), die unterstellt, daß die Investoren ihre Pläne auf jeden Fall durchsetzen. In diesem Fall muß

$$(a) \quad I^+ \leq Y$$

sichergestellt werden, indem man (5), (6), (6a) und (a) zusammenfaßt zu

$$(b) \quad I^+ = \begin{cases} I, & \text{wenn } I \leq Y \\ Y, & \text{wenn } I \geq Y . \end{cases}$$

Es läßt sich zeigen, daß die Restriktion (a) im Modell  $H_c$  genau dann automatisch erfüllt ist, also nicht in Form von (b) ausdrücklich berücksichtigt werden muß, wenn

$$(c) \quad \dot{Z}_0 \leq \frac{1}{\sigma \beta_0} K_0$$

und

$$(d) \quad \frac{\sigma}{1 + c} \leq \beta_0 .$$

$$(20) \quad \bar{Y} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} K_0 \left[ 1 + \frac{e^{\lambda(t-t_0)} - 1}{1 + \frac{c}{\sigma \beta_0} \frac{K_0}{Z_0}} \right]^{\frac{1}{\lambda \sigma}} & \text{für } Z \geq \bar{Y}, \text{ falls } \lambda \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} K_0 e^{\frac{t-t_0}{\sigma + \frac{c}{\sigma} \frac{K_0}{Z_0}}} & \text{für } Z \geq \bar{Y}, \text{ falls } \lambda = 0 \\ \frac{\beta_0}{\sigma \mu} Z_0 e^{\mu(t-t_0)} + \frac{1}{\sigma} \left( K_0 - \frac{\beta_0}{\mu} \dot{Z}_0 \right) & \text{für } Z \leq \bar{Y} \end{cases}$$

Aus (19) und (20) ergibt sich die zeitliche Entwicklung der Differenz

$$(21) \quad \Delta := Z - \bar{Y}$$

zwischen realer Nachfrage und maximal möglicher Produktion. Die Lösungen für die übrigen Variablen folgen mit Hilfe von (19) und (20) unmittelbar aus Modell  $H_c$ .

Die Lösungen hängen nicht mehr nur von einem Anfangswert, wie im Modell  $D$ , sondern von zwei Anfangswerten ab. Mathematisch gibt es mehrere Möglichkeiten, die Anfangswerte bestimmten Variablen zuzuordnen. Ökonomisch ist es sinnvoll, den Kapitalstock des Bezugszeitpunktes als Indikator der laufenden Produktionsmöglichkeiten und die Zunahme der realen Nachfrage im Bezugszeitpunkt als Anstoß des Wachstums vorzugeben.

Im Bezugszeitpunkt  $t = t_0$  sei ein bestimmter Kapitalstock vorhanden und werde eine Zunahme der realen Nachfrage beobachtet:

$$(22) \quad K_0 > 0 \quad \text{und} \quad \dot{Z}_0 > 0 .$$

Aus (22) folgt die Ausgangslage

$$(23) \quad \Delta_0 = \begin{cases} \beta_0 \dot{Z}_0 - \frac{1-c}{\sigma} K_0, & \text{falls } \dot{Z}_0 \geq \frac{1-c}{\sigma \beta_0} K_0 \text{ bzw. } Z_0 \geq \bar{Y}_0 \\ \frac{1}{1-c} \left( \beta_0 \dot{Z}_0 - \frac{1-c}{\sigma} K_0 \right), & \text{falls } \dot{Z}_0 \leq \frac{1-c}{\sigma \beta_0} K_0 \\ & \text{bzw. } Z_0 \leq \bar{Y}_0 . \end{cases}$$

Ist  $\Delta_0 > 0$ , dann herrscht im Bezugszeitpunkt Vollbeschäftigung bei Kreislaufungleichgewicht. Für  $\Delta_0 < 0$  liegt im Bezugszeitpunkt Kreislaufgleichgewicht bei Unterbeschäftigung vor. Im Fall  $\Delta_0 = 0$  sind Kreislaufgleichgewicht und Vollbeschäftigung im Bezugszeitpunkt gegeben.

Je nach der Ausgangslage ( $\Delta_0 \cong 0$ ) und je nach der Größenordnung des Akzelerationskoeffizienten im Vergleich zum marginalen Kapitalkoeffizienten ( $\beta_0 \cong \sigma$ ) lassen sich neun verschiedene Typen von Wachstumspfaden unterscheiden, die zu fünf Grundtypen zusammengefaßt werden können. Die für die hier zur Diskussion stehenden Probleme wichtigsten Eigenschaften dieser Wachstumspfade sind in der Tabelle auf S. 250 zusammengefaßt.

Aus Platzgründen können nicht alle in der Tabelle verzeichneten Ergebnisse exakt abgeleitet werden. Um die Art des Vorgehens zu zeigen, genügt es jedoch, beispielhaft die Grundtypen *A* und *B* zu diskutieren.

**Entwicklung der Wachstumsraten<sup>10</sup>**

Größenvergleich	Änderungstendenzen	Grenzwerte
$\left. \begin{array}{l} 0 < \hat{Z} < \frac{1}{\beta_0} \\ \lambda < \hat{I} < \hat{Z} < \hat{Y} = \hat{Y} < \frac{1}{\sigma} \\ \lambda < \hat{I} < \hat{I}^+ < \hat{Y} < \frac{1}{\sigma} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{im} \\ \text{Bereich} \\ Z \geq \bar{Y} \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} \dot{\hat{Z}} < 0, \dot{\hat{I}} < 0 \\ \dot{\hat{Y}}^+ < 0 \\ \dot{\hat{Y}} = \dot{\hat{Y}} < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{im} \\ \text{Bereich} \\ Z \geq \bar{Y} \end{array}$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Y} = \mu < w$
$\hat{I} = \hat{I}^+ = \hat{Z} = \hat{Y} = \mu < \hat{Y} \text{ Bereich } Z \leq \bar{Y}$	$\dot{\hat{Y}} < 0 \quad \text{im Bereich } Z \leq \bar{Y}$	
$\hat{I}^+ = \hat{I} = \hat{Z} = \hat{Y} = \hat{Y} = w$		
$\left. \begin{array}{l} 0 < \hat{Y} < \mu = \hat{Y} = \hat{Z} = \hat{I} = \hat{I}^+ \\ 0 < \hat{Z} < \frac{1}{\beta_0} \\ 0 < \hat{Y} = \hat{Y} < \hat{Z} < \hat{I} < \frac{1}{\beta_0} \\ 0 < \hat{Y} < \hat{I}^+ < \frac{1}{\beta_0} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{im} \\ \text{Bereich} \\ Z \leq \bar{Y} \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} \dot{\hat{Y}} > 0 \\ \dot{\hat{Z}} > 0, \dot{\hat{I}} > 0 \\ \dot{\hat{Y}} = \dot{\hat{Y}} > 0 \\ \dot{\hat{I}}^+ \geq 0 \Leftrightarrow 2\beta_0 \geq \sigma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{im} \\ \text{Bereich} \\ Z \leq \bar{Y} \end{array}$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Y} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Y} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{I}^+ = \frac{1}{\sigma} > w$
$\left. \begin{array}{l} \hat{I}^+ = \hat{I} = \hat{Z} = \hat{Y} = \mu \\ \mu \leq \hat{Y}, \text{ wenn } \frac{K_0}{Z_0} \leq \frac{\beta_0}{\mu} \\ 0 < \hat{Y} < \mu, \text{ wenn } \frac{K_0}{Z_0} > \frac{\beta_0}{\mu} \end{array} \right\}$	$\dot{\hat{Y}} \geq 0, \text{ wenn } \frac{K_0}{Z_0} \leq \frac{\beta_0}{\mu}$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Y} = \mu \left\{ \begin{array}{l} = w, \\ \text{wenn } \beta_0 = \sigma \\ < w, \\ \text{wenn } \beta_0 > \sigma \end{array} \right.$
$\left. \begin{array}{l} 0 < \hat{Z} < \frac{1}{\beta_0} \\ 0 < \hat{Y} = \hat{Y} < \hat{Z} < \hat{I} < \frac{1}{\beta_0} \\ 0 < \hat{Y} < \hat{I}^+ < \frac{1}{\beta_0} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn} \\ \beta_0 < \sigma \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} \dot{\hat{Z}} > 0, \dot{\hat{I}} > 0 \\ \dot{\hat{Y}} = \dot{\hat{Y}} > 0 \\ \dot{\hat{I}}^+ \geq 0 \Leftrightarrow 2\beta_0 \geq \sigma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn} \\ \beta_0 < \sigma \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Y} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Y} \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{I}^+ = \frac{1}{\sigma} \\ > w \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn} \\ \beta_0 < \sigma \end{array}$
$\hat{I}^+ = \hat{I} = \hat{Z} = \hat{Y} = \hat{Y} = \frac{1}{\sigma} > w, \text{ wenn } \frac{cK_0}{\sigma + \frac{\sigma Z_0}{\beta_0}} > w$	$\text{wenn } \beta_0 = \sigma$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Z} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{I} = \frac{1}{\beta_0} > w$

<sup>10</sup> Ein Circumflex über einer Variablen bedeutet die Wachstumsrate; also z. B.  $\hat{Z} : \frac{\dot{Z}}{Z} =$  usw.

## Verlauf der Wachstumspfade

Typ	$\dot{\Delta}$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta$	Beschäftigungs- und Gleichgewichtslage
<b>A</b> $\Delta_0 > 0$ $\beta_0 > \sigma$	$< 0$	$= -\infty$	Übergang von Übernachfrage (Vollbeschäftigung bei Kreislaufgleichgewicht, $Z > \bar{Y} = Y$ ) über Kreislaufgleichgewicht bei Vollbeschäftigung ( $Z = \bar{Y} = Y$ ) zur Überkapazität (Unterbeschäftigung bei Kreislaufgleichgewicht, $Y = Z < \bar{Y}$ )
<b>B</b> $\Delta_0 = 0$ $\beta_0 = \sigma$	$= 0$	$= 0$	Gleichgewichtspfad (Kreislaufgleichgewicht bei Vollbeschäftigung, $Z = \bar{Y} = Y$ )
<b>C</b> $\Delta_0 < 0$ $\beta_0 < \sigma$	$> 0$	$= \infty$	Übergang von Überkapazität (Unterbeschäftigung bei Kreislaufgleichgewicht, $Y = Z < \bar{Y}$ ) über Kreislaufgleichgewicht bei Vollbeschäftigung ( $Z = \bar{Y} = Y$ ) zur Übernachfrage (Vollbeschäftigung bei Kreislaufgleichgewicht, $Z > \bar{Y} = Y$ )
<b>D</b> $\Delta_0 \leq 0$ und $\beta_0 > \sigma$ oder $\Delta_0 < 0$ und $\beta_0 = \sigma$	$\leq 0$	$= -\infty$ , wenn $\beta_0 > \sigma$ $= \Delta_0 < 0$ , wenn $\beta_0 = \sigma$	Überkapazität (Unterbeschäftigung bei Kreislaufgleichgewicht, $Y = Z < \bar{Y}$ )
<b>E</b> $\Delta_0 \geq 0$ und $\beta_0 < \sigma$ oder $\Delta_0 > 0$ und $\beta_0 = \sigma$	$> 0$	$= \infty$	Übernachfrage (Vollbeschäftigung bei Kreislaufgleichgewicht, $Z > \bar{Y} = Y$ )

Ausgangslage von  $A$  ist eine Übernachfrage ( $\Delta_0 > 0$ ); es herrscht Vollbeschäftigung ( $Y_0 = \bar{Y}_0$ ), aber Kreislaufungleichgewicht ( $Z_0 > Y_0$ ), die geplanten Investitionen übertreffen die geplanten Ersparnisse. Da der Akzelerationskoeffizient größer als der marginale Kapitalkoeffizient ist ( $\beta_0 > \sigma$ , und daher  $\lambda < 0$ ), nimmt gemäß (21) in Verbindung mit (19) und (20) die Differenz zwischen  $Z$  und  $Y$  ständig ab ( $\dot{\Delta} < 0$ ), die geplanten Investitionen und die geplanten Ersparnisse bewegen sich bei Vollbeschäftigung aufeinander zu. Aus  $\Delta_0 > 0, \dot{\Delta} < 0$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta = -\frac{1-c}{c} \left(\frac{c}{\sigma} K_0\right)^{\frac{1}{\beta_0 \sigma}} \left(\frac{c}{\sigma} K_0 + \beta_0 \dot{Z}_0\right)^{-\frac{1}{\sigma \lambda}} < 0 \text{ für } Z \geq \bar{Y}$$

folgt, daß es genau einen Zeitpunkt  $t^+$  gibt, in dem sowohl Vollbeschäftigung als auch Kreislaufgleichgewicht herrschen [ $\Delta(t^+) = 0$ ]. Da jedoch  $\dot{\Delta} < 0$  unabhängig von der jeweiligen Beschäftigungs- und Gleichgewichtslage gilt, geht die betrachtete Volkswirtschaft für  $t > t^+$  zur Überkapazität über; in Zukunft herrscht zwar Kreislaufgleichgewicht, aber die Vollbeschäftigung geht verloren. Der tatsächliche Grenzwert von  $\Delta$  ist aus (21) in Verbindung mit (19) und (20) für den Bereich  $Z \leq \bar{Y}$  zu bestimmen; er beträgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta = -\infty$ . Der Wachstumspfad gleitet also immer stärker in die Unterbeschäftigung ab, ohne daß diesem Prozeß eine Grenze gezogen wäre. Der Zeitpunkt  $t^+$  des Umschlags von der einen Beschäftigungslage in die andere läßt sich aus der Bedingung  $\Delta(t^+) = 0$  mit Hilfe von (21) in Verbindung mit (19) und (20) für den Bereich  $Z \geq \bar{Y}$  berechnen; man erhält<sup>11</sup>

$$(24) \quad t^+ = t_0 + \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{1-c}{\sigma \beta_0} \frac{K_0}{Z_0} \right).$$

Für  $t_0 \leq t \leq t^+$  gelten die Lösungen des Bereichs  $Z \geq \bar{Y}$ . Diese Lösungen liefern  $Z(t^+)$  und  $K(t^+)$ . Für  $t^+ \leq t$  gelten die Lösungen des Bereichs  $Z \leq \bar{Y}$  mit  $t_0 := t^+, \dot{Z}_0 := \dot{Z}(t^+)$  und  $K_0 := K(t^+)$ .

In der Ausgangslage von  $B$  herrscht Kreislaufgleichgewicht und Vollbeschäftigung ( $\Delta_0 = 0$  bzw.  $Z_0 = Y_0 = \bar{Y}_0$ ). Da  $\beta_0 = \sigma$ , folgt aus (21) in Verbindung mit (19) und (20)  $\dot{\Delta} = 0$ , und zwar unabhängig vom Bereich  $Z \geq \bar{Y}$ ; Vollbeschäftigung und Kreislaufgleichgewicht bleiben also für  $t \geq t_0$  stets erhalten. Sowohl die Lösungen für den Bereich  $Z \geq \bar{Y}$  als auch die Lösungen für den Bereich  $Z \leq \bar{Y}$  liefern dieselben Wachstums-

<sup>11</sup> In (24) ist  $\frac{1-c}{\sigma} K_0$  die geplante Ersparnis  $S_0$  und  $\beta_0 \dot{Z}_0$  die geplante Investition  $I_0$  im Bezugszeitpunkt  $t_0$ . Wegen  $\Delta_0 > 0$  gilt  $S_0 < I_0$ , und wegen  $\beta_0 > \sigma$  gilt  $\lambda < 0$ . Es folgt also  $t^+ = t_0 + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{S_0}{I_0} > t_0$ .

pfade der Variablen  $Z$  und  $\bar{Y}$ , nämlich den gleichgewichtigen Wachstumspfad (10), der aus Modell  $D$  bereits bekannt ist.

Es zeigt sich, daß es nur einen Wachstumspfad der Variablen gibt, auf dem in jedem Zeitpunkt sowohl Kreislaufgleichgewicht als auch Vollbeschäftigung herrscht. Dieser Wachstumspfad ist genau dann Lösung des Modells  $H_c$ , wenn in der Ausgangslage reale Nachfrage und Produktionskapazität übereinstimmen und wenn Akzelerationskoeffizient und marginaler Kapitalkoeffizient einander gleich sind. Ist auch nur eine dieser Bedingungen verletzt, dann ist entweder Übernachfrage oder Überkapazität die Folge. Welcher Fall auf Dauer eintritt, hängt nur dann von der Ausgangslage ab, wenn  $\beta_0 = \sigma$  gilt. Andernfalls ist nicht die Ausgangslage, sondern die Frage, ob  $\beta_0$  größer oder kleiner als  $\sigma$  ist, für den endgültigen Zustand des Modells  $H_c$  maßgebend. Wenn sich die Variablen nicht auf dem Gleichgewichtspfad bewegen, dann vergrößert sich in der Regel die Abweichung vom Kreislaufgleichgewicht bzw. von der Vollbeschäftigung, jeweils gemessen an  $|\Delta|$ ; dieser Fall kennzeichnet die aus der Literatur bekannten „kumulativen Prozesse“. Die Abweichung  $|\Delta|$  verringert sich nie und bleibt nur in einem Fall ( $\Delta_0 < 0$  und  $\beta_0 = \sigma$ ) konstant. In bezug auf Kreislaufgleichgewicht und Vollbeschäftigung ist das Modell  $H_c$  also instabil: außerhalb des gleichgewichtigen Wachstumspfades läßt sich auf die Dauer nur Kreislaufgleichgewicht oder Vollbeschäftigung, aber nicht beides verwirklichen.

Die Wachstumsraten der Variablen sind im Ungleichgewicht für jeden Typ entweder konstant oder konvergieren gegen eine Konstante. Im Fall einer endgültigen Überkapazität (Typen  $A$  und  $D$ ) sind die Wachstumsraten der Variablen  $I^*$ ,  $I$ ,  $Z$  und  $Y$  einander gleich und konstant, während die Wachstumsrate der Variablen  $\bar{Y}$  gegen dieselbe Konstante konvergiert. Diese Konstante kann sogar die gleichgewichtige Wachstumsrate  $w = \frac{1-c}{\sigma}$  sein (Typ  $D$  mit  $\beta_0 = \sigma$ ). Es gibt ferner einen ungleichgewichtigen Wachstumspfad, auf dem die Wachstumsraten aller Variablen gleich und konstant, jedoch größer als die gleichgewichtige Wachstumsrate sind (Typ  $E$  mit  $\beta_0 = \sigma$ ). In den übrigen Fällen (Typ  $C$  und Typ  $E$  mit  $\beta_0 < \sigma$ ), die sämtlich zu einer endgültigen Übernachfrage führen, sind alle Wachstumsraten variabel und konvergieren je gegen einen von zwei verschiedenen Grenzwerten, die beide größer als die gleichgewichtige Wachstumsrate sind. Während also das Modell  $H_c$  in bezug auf das absolute Niveau des Wachstumspfades instabil ist — nach einer Störung des gleichgewichtigen Wachstums wird dieser Pfad weder erreicht, noch geht die Abweichung gegen Null —, ist es in der Mehrzahl der Fälle stabil in bezug auf die Wachstumsraten der Variablen — wenn diese gleich oder konstant sind oder gegen denselben Grenzwert streben. Auch wenn man die Stabilität schärfer faßt und verlangt, daß dieser

Grenzwert die gleichgewichtige Wachstumsrate sein soll, gibt es einen Fall, in dem das Modell  $H_c$  bezüglich der Wachstumsraten der Variablen stabil ist<sup>12</sup>.

Das in der Literatur häufig zitierte „Harrodsche Paradoxon“ scheint sich auch hier zu zeigen: So ist z. B. beim Typ C eine schließliche Übernachfrage von einem bestimmten Zeitpunkt ab mit Wachstumsraten der tatsächlichen und der geplanten Realinvestitionen verbunden, die größer als die gleichgewichtige Wachstumsrate sind. Daraus kann jedoch nicht der Schluß gezogen werden, daß die Unternehmen die realen Investitionen relativ senken müßten, um die Übernachfrage zu beseitigen; ganz im Gegenteil muß der Akzelerationskoeffizient zunehmen, damit die Wachstumsrate der realen Investitionen sinkt. Das wird im folgenden Abschnitt deutlich, wenn die Lösung des Modells  $H_v$  mit variablem Akzelerationskoeffizienten diskutiert wird.

<sup>12</sup> Hier zeigt sich eine interessante Parallele zum Modell des neoklassischen Wachstums von Solow (1956), das bekanntlich als stabil gilt. Dieses Modell führt auf die Differentialgleichung

$$(a) \quad \dot{K} = (1 - c) Y(A_0 e^{nt}, K),$$

deren Lösung für

$$(b) \quad Y(A, K) \equiv \gamma A^\alpha K^{1-\alpha}$$

folgenden Wachstumspfad des Kapitalstocks ergibt:

$$(c) \quad K = \left[ K_0^\alpha + \gamma \frac{1-c}{n} A_0^\alpha (e^{ant} - 1) \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

vgl. Allen (1967), S. 273 ff. Für  $K_0 = A_0 \left( \gamma \frac{1-c}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} =: K_0^+$  beschreibt (c) den gleichgewichtigen Wachstumspfad mit  $\dot{K} = n =: \hat{K}^+$ . Für  $K_0 \neq K_0^+$  gilt zwar

$$(d) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{K} = \hat{K}^+,$$

aber

$$(e) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (K - K^+) = \begin{cases} +\infty, & \text{wenn } K_0 > K_0^+ \\ -\infty, & \text{wenn } K_0 < K_0^+ \end{cases}.$$

Nach einer Störung des gleichgewichtigen Wachstums konvergiert zwar die Wachstumsrate des Kapitalstocks gegen den Gleichgewichtswert, aber der neue Wachstumspfad selbst divergiert. Dieses Ergebnis scheint der Stabilitätsanalyse von Allen zu widersprechen, der als dynamisches Gleichgewicht den Fall definiert, daß der von einem beliebigen  $K_0$  ausgehende Wachstumspfad gegen den gleichgewichtigen konvergiert. Nach Allen ist dies der Fall, weil man für  $t \rightarrow \infty$  den Summanden  $\left( K_0^\alpha - \gamma \frac{1-c}{n} A_0^\alpha \right)$  in der eckigen Klammer von (c) vernachlässigen könne. Mit dieser Argumentation ist jedoch lediglich  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{K} = n$  gezeigt.

### 4.3 Modifikation der Lösung bei variablem Akzelerationskoeffizienten

Im Modell  $H_v$  erhält man folgendes System von Differentialgleichungen:

$$(25) \quad \begin{cases} \dot{Z} = \begin{cases} \frac{Z - c\bar{Y}}{\sigma f\left(\frac{Z}{\bar{Y}}\right)} & \text{für } Z \geq \bar{Y} \\ \frac{1-c}{\sigma} \frac{Z}{f\left(\frac{Z}{\bar{Y}}\right)} & \text{für } Z \leq \bar{Y} \end{cases} \\ \dot{\bar{Y}} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \kappa\left(\frac{\bar{Y}}{Z}\right) (Z - c\bar{Y}) & \text{für } Z \geq \bar{Y} \\ \frac{1-c}{\sigma} Z & \text{für } Z \leq \bar{Y} \end{cases} \end{cases}$$

Ohne Spezifizierung der Funktionen  $f\left(\frac{Z}{\bar{Y}}\right)$  und  $\kappa\left(\frac{\bar{Y}}{Z}\right)$  läßt sich (25) nicht allgemein lösen. Eine spezielle Lösung von (25) ist der gleichgewichtige Wachstumspfad (10).

Für den Sonderfall

$$(26) \quad f\left(\frac{Z}{\bar{Y}}\right) \equiv \frac{Z}{\bar{Y}}$$

und für die Hypothese (6b) bezüglich  $\kappa\left(\frac{\bar{Y}}{Z}\right)$ <sup>13</sup> läßt sich (25) auf folgende Differentialgleichungen reduzieren:

$$(27) \quad \ddot{Z} = \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{Z}}{Z} \left\{ \frac{Z}{2c} \left[ 1 - (1-2c) \sqrt{1-4\sigma c \frac{\dot{Z}}{Z}} \right] - \sigma \dot{Z} \right\} \text{ im Bereich } Z \geq \bar{Y}$$

$$(28) \quad \ddot{Z} = \left( \frac{1-c}{\sigma} \right)^2 Z \quad \text{im Bereich } Z \leq \bar{Y}$$

Als Lösungen von (27) und (28) ergeben sich<sup>14</sup>

$$(29)^{15} \quad t = t_0 + \frac{\sigma}{2(1-c)} \{ \ln [(1-c) Z^2 - (1-2c)(Z_0 - \bar{Y}_0) Z - c(Z_0 - \bar{Y}_0)^2] + \\ + (1-2c) \ln \frac{Z + \bar{Y}_0 - Z_0}{(1-c) Z + c(Z_0 - \bar{Y}_0)} - 2(1-c) \ln \bar{Y}_0 - 2c \ln (Z_0 - c\bar{Y}_0) \}$$

im Bereich  $Z \geq \bar{Y}$

und

<sup>13</sup> Fußnote 9 gilt entsprechend. Bei Verwendung der Hypothese (6a) ist die Restriktion  $I^+ \leq Y$  im Modell  $H_v$  genau dann automatisch erfüllt, wenn

$$(+) \quad Z_0 \leq (1+c) \bar{Y}_0 .$$

<sup>14</sup> Im folgenden werden  $Z_0$  anstelle von  $Z_0$  und  $\bar{Y}_0$  anstelle von  $K_0$  als Anfangsbedingungen gewählt. Mathematisch ist dieser Wechsel bedeutungslos;

$$(30) \quad Z = Z_0 \cosh\left(\frac{1-c}{\sigma}(t-t_0)\right) + \bar{Y}_0 \sinh\left(\frac{1-c}{\sigma}(t-t_0)\right)$$

im Bereich  $Z \leq \bar{Y}$ .

Die Lösungen für  $\bar{Y}$  lassen sich unmittelbar aus (25) in Verbindung mit (26) und (6b) ermitteln; man erhält

$$(31) \quad \bar{Y} = \begin{cases} Z + \bar{Y}_0 - Z_0 & \text{im Bereich } Z \geq \bar{Y} \\ \sqrt{Z^2 + \bar{Y}_0^2 - Z_0^2} & \text{im Bereich } Z \leq \bar{Y}. \end{cases}$$

Herrscht in der Ausgangslage Übernachfrage ( $\Delta_0 > 0$ ), dann bleibt die Differenz zwischen Nachfrage und Produktionskapazität konstant:

$$(32) \quad \left. \begin{array}{l} \dot{\Delta} = 0 \\ \Delta = \Delta_0 \end{array} \right\} \text{ im Bereich } Z \geq \bar{Y}.$$

Ist die Ausgangslage durch Überkapazität ( $\Delta_0 < 0$ ) gekennzeichnet, dann sinkt die absolute Differenz zwischen Nachfrage und Produktionskapazität und strebt gegen Null:

$$(33) \quad \left. \begin{array}{l} \dot{\Delta} \leq 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta = 0 \end{array} \right\} \text{ im Bereich } Z \leq \bar{Y}.$$

Der Wachstumspfad bleibt in dem Bereich, in dem er begonnen hat; es herrscht also Vollbeschäftigung bei Kreislaufungleichgewicht, wenn  $\Delta_0 > 0$ , und Überkapazität bei Kreislaufgleichgewicht, wenn  $\Delta_0 < 0$ . Die Abweichung vom Gleichgewicht strebt im Fall der Überkapazität gegen Null und bleibt im Fall der Übernachfrage konstant. Die Überkapazität tendiert mithin zur Vollbeschäftigung, und die Übernachfrage zwar nicht zum absoluten, aber doch zum relativen Kreislaufgleichgewicht (gemessen an  $\frac{\Delta}{Z}$  oder  $\frac{\Delta}{\bar{Y}}$ ).

Die Wachstumsraten der Variablen lassen sich sämtlich in Abhängigkeit vom Verhältnis  $\frac{\bar{Y}}{Z}$  der Produktionskapazität zur Nachfrage darstellen. Für den Bereich der Übernachfrage ( $Z \geq \bar{Y}$ ) erhält man

---

ökonomisch setzt die Nachfrage  $Z_0$  die Nachfragezunahme  $\dot{Z}_0$  und die Produktionskapazität  $\bar{Y}_0$  den Kapitalstock  $K_0$  voraus.

<sup>15</sup> (29) läßt sich zwar nicht nach  $Z$  auflösen, es handelt sich aber dennoch wegen  $\frac{dt}{dZ} > 0$  um eine Funktion  $Z(t)$ .

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{Z} = \frac{1}{\sigma} \frac{\bar{Y}}{Z} \left( 1 - c \frac{\bar{Y}}{Z} \right) \\ \hat{Y} = \hat{\bar{Y}} = \frac{1}{\sigma} \left( 1 - c \frac{\bar{Y}}{Z} \right) \\ \hat{I} = \frac{1-c}{\sigma} \frac{\bar{Y}}{Z} \\ \hat{I}^+ = \frac{1}{\sigma} \left[ 1 - c \frac{\bar{Y}}{Z} \left( 2 - \frac{\bar{Y}}{Z} \right) \right] \end{array} \right.$$

und für den Bereich der Überkapazität ( $Z \leq \bar{Y}$ )

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{Y} = \hat{Z} = \hat{I} = \hat{I}^+ = \frac{1-c}{\sigma} \frac{\bar{Y}}{Z} \\ \hat{\bar{Y}} = \frac{1-c}{\sigma} \frac{Z}{\bar{Y}} \end{array} \right. .$$

Ein Vergleich der Wachstumsraten ergibt

$$(36) \quad \hat{Y} = \hat{\bar{Y}} \geq \hat{Z} \geq \hat{I} > 0 \quad \text{und} \quad \hat{\bar{Y}} \geq \hat{I}^+ \geq \frac{1-c}{\sigma} \geq \hat{I} \quad \text{für} \quad Z \geq \bar{Y}$$

und

$$(37) \quad \hat{I}^+ = \hat{I} = \hat{Y} = \hat{Z} \geq \frac{1-c}{\sigma} \geq \hat{\bar{Y}} > 0 \quad \text{für} \quad Z \leq \bar{Y} .$$

Die Veränderung der Wachstumsraten hängt davon ab, wie sich das Verhältnis  $\frac{\bar{Y}}{Z}$  im Zeitablauf ändert. Es gilt

$$(38) \quad \frac{\dot{\bar{Y}}}{Z} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \frac{\bar{Y}}{Z} \left( 1 - \frac{\bar{Y}}{Z} \right) \left( 1 - c \frac{\bar{Y}}{Z} \right) \geq 0 & \text{für } Z \geq \bar{Y} \\ \frac{1-c}{\sigma} \left[ 1 - \left( \frac{\bar{Y}}{Z} \right)^2 \right] \leq 0 & \text{für } Z \leq \bar{Y} \end{cases}$$

Unabhängig von der Bereichslage folgt aus (31)  $\lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{\bar{Y}}{Z} = 1$  und aus (29) bzw. (30)  $\lim_{t \rightarrow \infty} Z = \infty$ ; daraus ergibt sich

$$(39) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{Y}}{Z} = 1 .$$

Aus (34) und (35) folgt in Verbindung mit (39) unmittelbar, daß sowohl im Fall der Übernachfrage als auch im Fall der Überkapazität die Wachstumsraten aller Variablen gegen die gleichgewichtige Wachstumsrate konvergieren:

$$(40) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Z} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\bar{Y}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Y} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{I} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{I}^+ = \frac{1-c}{\sigma}$$

Mit einer Ausnahme hat (38) zur Folge, daß im Zeitablauf die über der gleichgewichtigen Wachstumsrate liegenden Wachstumsraten streng monoton fallen und die unter ihr liegenden streng monoton steigen. Von dieser Regel weicht nur die Wachstumsrate  $\hat{Z}$  der Nachfrage im Bereich der Übernachfrage ( $Z \geq \bar{Y}$ ) ab. Für  $c \leq \frac{1}{2}$  gilt zwar  $\hat{Z} \leq \frac{1-c}{\sigma}$  und  $\dot{Z} \geq 0$ . Im realistischeren Fall  $c > \frac{1}{2}$  ist jedoch die Ausgangslage  $\frac{\bar{Y}_0}{Z_0}$  für die Bewegung von  $\hat{Z}$  maßgebend: im Bereich  $0 < \frac{\bar{Y}}{Z} \leq \frac{1}{2c}$  steigt  $\hat{Z}$  von einem Wert nahe Null über die gleichgewichtige Wachstumsrate hinaus auf den Maximalwert  $\frac{1}{4c\sigma}$  und fällt im Bereich  $\frac{1}{2c} < \frac{\bar{Y}}{Z} < 1$  gegen den Grenzwert  $\frac{1-c}{\sigma}$ , die gleichgewichtige Wachstumsrate. Wegen (38) werden je nach der Größe von  $\frac{\bar{Y}}{Z}$  diese Stadien ganz oder teilweise durchlaufen.

Es zeigt sich also, daß man unter Beibehaltung der wesentlichen Strukturelemente des Harrodschen Wachstumsmodells (Investitionsfunktion in Form des Akzelerators, fixe Produktionskoeffizienten) durchaus ein Modell konstruieren kann, das sowohl in bezug auf die Wachstumsraten als auch in bezug auf Abweichungen von der Vollbeschäftigung stabil und in bezug auf Abweichungen vom Kreislaufgleichgewicht zumindest relativ stabil ist<sup>16</sup>. Damit ist natürlich nicht gesagt, daß sich der tatsächliche Wachstumspfad des Modells  $H_t$  mit (26) und (6b) dem gleichgewichtigen Pfad absolut nähert. Im Bereich  $Z \leq \bar{Y}$  nimmt z. B. die Differenz zwischen der Höhe des Outputs auf dem gleichgewichtigen und auf dem tatsächlichen Wachstumspfad mit wachsendem  $t$  zu.

<sup>16</sup> Die Stabilität bezüglich des Kreislaufgleichgewichts, die nur für den Bereich der Übernachfrage ein Problem ist, hängt bei gegebener spezieller Hypothese über den Akzelerationskoeffizienten, hier (13b) mit (26), von der Möglichkeit der Investoren ab, ihre Pläne gegenüber den Konsumenten durchzusetzen. Würden im vorliegenden Modell die Investoren die geplanten Realinvestitionen verwirklichen können, — Hypothese (6b) wird durch Hypothese (6a) ersetzt —, dann ergäbe sich für  $Z \geq \bar{Y}$  ebenfalls  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta = 0$ ;

das Modell wäre unabhängig von der Bereichslage auch absolut stabil bezüglich des Kreislaufgleichgewichts. Sind dagegen die Konsumenten in der Lage, den geplanten Realkonsum zu realisieren, — Hypothese (6b) weicht Hypothese (6c) —, dann wird das Modell instabil; es gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta = \infty$ .

### Zusammenfassung

Ein Grundmodell realen Wachstums bei limitationaler Produktionstechnik wird zu einem *Domar*-Modell und unter Einschluß alternativer Hypothesen über die Realverteilung zu einem *Harrod*-Modell mit fixem bzw. variablem Akzelerationskoeffizienten erweitert. Das *Domar*-Modell ermittelt gleichgewichtige Wachstumspfade, ein Stabilitätsproblem existiert daher nicht. Beim *Harrod*-Modell mit fixem Akzelerationskoeffizienten hängt es von der Differenz zwischen Kapital- und Akzelerationskoeffizient sowie von der Beschäftigungslage und der Höhe der effektiven Nachfrage im Anfangszeitpunkt ab, wie sich die Variablen und ihre Wachstumsraten entwickeln. Die Wachstumsraten sind stets konstant oder konvergieren gegen eine Konstante, die sogar die gleichgewichtige Wachstumsrate sein kann. Kreislaufgleichgewicht und Vollbeschäftigung lassen sich zusammen jedoch nur auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad verwirklichen. Beim *Harrod*-Modell mit variablem Akzelerationskoeffizienten gibt es Wachstumspfade, die sich von jeder Ausgangslage her sowohl dem Kreislaufgleichgewicht als auch der Vollbeschäftigung beliebig dicht nähern und auf denen die Wachstumsraten der Variablen sämtlich gegen die gleichgewichtige Wachstumsrate konvergieren.

### Summary

A basic model of real growth with a fixed production coefficient of capital is extended to a *Domar*- and *Harrod*-type model. The latter includes alternative hypotheses about distribution of real income and variability of the accelerator. The *Domar*-type model shows the possibility of equilibrium growth, therefore no problem of stability exists at all. In the *Harrod*-type model with a fixed accelerator the variables and its growth rates develop over time subject to initial conditions concerning employment, effective demand, and the difference between the marginal capital-output ratio and the accelerator. Growth rates are constant or converge against a constant, which may be the equilibrium growth rate, but market equilibrium and full employment together are only realized on the equilibrium path of growth. In the *Harrod*-type model with a variable accelerator growth paths with initial conditions whatever may converge to short run (market) and long run equilibrium (full employment and constant growth rates) as well.

### Literatur

- Allen*, R. G. D. (1967), *Macroeconomic Theory. A Mathematical Treatment*, London usw. 1967; *deutsch*: *Makroökonomische Theorie. Eine mathematische Analyse*, Berlin 1972.
- Bartmann*, H. (1974), *Konjunkturelle Wachstums- und Verteilungsprozesse. Theoretische Ansätze*, Tübinger Habilitationsschrift (Manuskript) 1974.
- Domar*, E. D. (1946), *Capital Expansion, Rate of Growth and Employment*, *Econometrica* 14 (1946), S. 137 - 147; *wieder abgedruckt in* E. D. *Domar*, *Essays in the Theory of Economic Growth*, 2. Auflage, New York 1960, S. 70 - 82; *deutsch*: *Kapitalexpansion, Wachstumsrate und Beschäftigung*, in H. *König* (Hrsg.), *Wachstum und Entwicklung der Wirtschaft*, Köln und Berlin 1968, S. 55 - 66.
- (1947), *Expansion and Employment*, *The American Economic Review* 37 (1947), S. 34 - 55.

- Frisch*, R. (1961), A Reconsideration of *Domar's* Theory of Economic Growth, *Econometrica* 29 (1961), S. 406 - 413.
- Green*, J. (1962), Dynamic Equilibrium and Instability in the Sense of *Harrod*, *Economica* 29 (1962), S. 53 - 57.
- Harrod*, R. F. (1939), An Essay in Dynamic Theory, *The Economic Journal* 49 (1939), S. 14 - 33; *deutsch*: Ein Essay zur dynamischen Theorie, in H. König (Hrsg.), *Wachstum und Entwicklung der Wirtschaft*, Köln und Berlin 1968, S. 35 - 54.
- (1959), *Domar* and Dynamic Economics, *The Economic Journal* 69 (1959), S. 451 - 464.
- (1960), Second Essay in Dynamic Theory, *The Economic Journal* 70 (1960), S. 277 - 293; *deutsch*: Zweiter Essay zur dynamischen Theorie, in H. König (Hrsg.), *Wachstum und Entwicklung der Wirtschaft*, Köln und Berlin 1968, S. 203 - 222.
- Helmstädter*, E. (1965), *Harrod* und die neoklassische Wachstumstheorie, *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* 121 (1965), S. 433 - 451.
- Heubes*, J. (1973), Die Konjunkturtheorie von *Harrod*, *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik* 187 (1972 - 73), S. 417 - 430.
- Jorgenson*, D. W. (1960), On Stability in the Sense of *Harrod*, *Economica* 27 (1960), S. 243 - 248.
- Krelle*, W. und G. *Gabisch* (1972) unter Mitarbeit von J. *Burgermeister*, *Wachstumstheorie*, Berlin, Heidelberg, New York 1972 (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Bd. 62).
- Nelson*, R. R. (1961), A Note on Stability and the Behaviour Assumptions of *Harrod*-Type Models, *The Economic Journal* 71 (1961), S. 335 - 349.
- Neville*, J. W. (1962), The Mathematical Formulation of *Harrod's* Growth Model, *The Economic Journal* 72 (1962), S. 367 - 370.
- Ott*, A. E. (1961), Über die Gleichgewichtsbedingungen in einer wachsenden Wirtschaft, *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik* 173 (1961), S. 229 - 240.
- Richter*, R. (1965), „*Harrod*-Wachstum“ und „*Solow*-Wachstum“, ein Vergleich, *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* 121 (1965), S. 235 bis 263.
- Rijckeghem*, W. van (1963), The Structure of Some Macroeconomic Growth Models: A Comparison, *Weltwirtschaftliches Archiv* 91 (1963 II), S. 84 bis 100.
- Rose*, H. (1959), The Possibility of Warranted Growth, *The Economic Journal* 69 (1959), S. 313 - 332.
- Solow*, R. M. (1956), A Contribution to the Theory of Economic Growth, *The Quarterly Journal of Economics* 70 (1956), S. 65 - 94; *deutsch*: Ein Beitrag zur Theorie des wirtschaftlichen Wachstums, in H. König (Hrsg.), *Wachstum und Entwicklung der Wirtschaft*, Köln und Berlin 1968, S. 67 - 96.
- Vogt*, W. (1964), Eine Verallgemeinerung der Wachstumstheorie, *Weltwirtschaftliches Archiv* 92 (1964 I), S. 259 - 296.
- (1968), *Theorie des wirtschaftlichen Wachstums*, Berlin und Frankfurt am Main 1968.