

# Die „Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen“

## Bemerkungen zur gleichnamigen Bedingung von Arrow

Von Johannes Hackmann und Harald Keiter

Die in der Überschrift genannte Bedingung wird auf ihren Aussagegehalt und ihren Stellenwert im Rahmen der üblichen Sozialwahlproblematik untersucht.

1. In der Diskussion um das *Arrow'sche* Unmöglichkeitstheorem nimmt bekanntlich seine dritte Bedingung, die sogenannte Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, eine wesentliche Funktion ein. Ihre Bedeutung wird vielfach darin gesehen, bei Sozialwahlproblemen interpersonell vergleichbare kardinale Maße individueller Wohlfahrt auszuschließen. Im Hinblick darauf wird sie jedoch häufig unvollständig bzw. mißverständlich dargestellt. Hinzu kommt, daß in der Bezeichnungsweise der Bedingung von Kardinalität nicht die Rede ist; deswegen scheint es angebracht, ihren Aussagegehalt korrekt zu erläutern. Auf dem Hintergrund dieser Erörterung stellt sich dann die Frage, ob die Bedingung (3) im *Arrow'schen* Ansatz nicht überflüssig ist.

Die Bedingung (3) lautet:

„Let  $R_1, \dots, R_n$  and  $R'_1, \dots, R'_n$  be two sets of individual orderings and let  $C(S)$  and  $C'(S)$  be the corresponding social choice functions. If, for all individuals  $i$  and all  $x$  and  $y$  in a given environment  $S$ ,  $xR_i y$  if and only if  $xR'_i y$ , then  $C(S)$  and  $C'(S)$  are the same (independence of irrelevant alternatives).“ (*Arrow* 1963, S. 27)

2. Wie schon erwähnt, wird die Bedingung (3) als Bedingung der „Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen“ bezeichnet. Von dieser Bezeichnungsweise her ergeben sich zwei Problemaspekte: Was meint „Unabhängigkeit“ und was bedeutet „Irrelevanz“? Was den ersten Problemaspekt — den „Unabhängigkeitsaspekt“ — betrifft, so hat schon *Arrow* klargestellt, daß damit keine Nutzenunabhängigkeit zwischen den verschiedenen Alternativen gefordert wird, weil sich die Alternativen annahmegemäß wechselseitig ausschließen (*Arrow* 1963, S. 12).

Unabhängigkeit könnte auch bedeuten, daß z. B. durch das Auftreten bislang nicht gesehener Alternativen sich die individuelle Wertschätzung

anderer Alternativen nicht ändert. Auch das ist kein Gesichtspunkt, der die Arrow'sche Unabhängigkeitsbedingung trifft, weil Arrow von jeweils vorgegebenen individuellen Ordnungen  $R_i$  bzw.  $R'_i$  ausgeht. Wie es zu diesen individuellen Ordnungen kommt oder gekommen ist, interessiert ihn nicht; ihn beschäftigt nur, wie aus individuellen eine soziale Ordnung entstehen kann.

Konstruktiv zielt der Unabhängigkeitsaspekt darauf, daß durch ein bloßes Weglassen, Hinzufügen (oder auch Verschieben) von irrelevanten Alternativen in den individuellen Ordnungen sich die soziale Ordnung der relevanten Alternativen nicht ändern soll.

Was den zweiten Problemaspekt — den „Irrelevanzaspekt“<sup>1</sup> — betrifft, so erläutert Arrow Irrelevanz im Sinne von „Nicht-Erreichbarkeit“<sup>2</sup>: „After the decision is made, an alternative which has not previously been thought of is mentioned as a logical possibility, although it is still not feasible“ (Arrow 1974, S. 270). Es fragt sich allerdings, welche Bedeutung im Rahmen der Bedingung (3) die Frage der Erreichbarkeit der Alternativen hat. Vom Wortlaut der Bedingung her zeigt sich, daß auch ein Streichen einer erreichbaren Alternative die soziale Ordnung der restlichen Alternativen nicht ändern darf. Eine Sozialwahl zwischen zwei Alternativen soll also nur von den individuellen Einschätzungen dieser Alternativen selbst bestimmt, d. h. unabhängig von beliebigen dritten Alternativen sein. Mit anderen Worten, der Unabhängigkeitsaspekt bringt zum Ausdruck, daß sich die soziale Ordnung mehrerer Alternativen aus einer (der) Menge binärer Entscheidungen zwischen diesen Alternativen gewinnen läßt. Unter diesem Aspekt wäre die Bedingung (3) also besser als eine Bedingung der Unabhängigkeit von dritten Alternativen oder auch als eine Bedingung binärer Wahl zu bezeichnen.

3. So, wie die Bedingung (3) bereits 1950 von Arrow erläutert wurde und wie sie auch heute noch regelmäßig exemplifiziert wird (Arrow 1974, S. 270; Mackscheidt 1973, S. 145), ist der eben erläuterte Unabhängigkeitsaspekt der zentrale Aspekt dieser Bedingung.

Es fällt allerdings auf, daß in der Definition der Bedingung selbst von einem Weglassen oder Hinzufügen von Alternativen explizit keine Rede ist. Von daher liegt es nahe, nach Erläuterungsmöglichkeiten zu suchen, die ohne ein solches Weglassen bzw. Hinzufügen auskommen, um den Aussagegehalt der Bedingung (3) herauszustellen. Der Verdeutlichung

<sup>1</sup> Auch Sen (1970, S. 89) spricht von einem „Irrelevanzaspekt“. Er meint damit aber das, was hier — den Sachverhalt wohl besser treffend — mit Unabhängigkeitsaspekt bezeichnet wird.

<sup>2</sup> Siehe in diesem Sinne bei Arrow (1950, S. 158) und Arrow (1963, S. 27) auch das Beispiel des Ausscheidens von Kandidaten.

diene das folgende (jedoch auch gegen diese Bedingung verstoßende) Beispiel: Zwei Personen (1 und 2) ordnen drei Situationen ( $x, y, z$ ). Für 1 gelte:  $x > y > z$ ; für 2:  $y > x > z$ . Die gesellschaftliche Ordnung der Alternativen erfolge nach dem Punktwahlssystem, wobei jedes Individuum insgesamt neun Punkte zu vergeben hat. Die individuellen Ordnungen sind mit Punktaufteilungen vereinbar, wie sie in den beiden nachstehenden Tabellen beschrieben sind. Wie zu sehen, erhält bei  $R_1, R_2$  die Alternative  $y$  die meisten Punkte, d. h. den „gesellschaftlichen“

I	$R_1$	$R_2$	$R$	II	$R'_1$	$R'_2$	$R'$
$x$	4	2	6	$x$	6	3	9
$y$	3	6	9	$y$	2	4	6
$z$	2	1	3	$z$	1	2	3

Vorzug und bei  $R'_1, R'_2$  die Alternative  $x$ . Dies verstößt jedoch gegen die Bedingung (3), weil trotz gleicher individueller Ordnung  $R$  eine andere soziale Ordnung als  $R'$  beschreibt. In Anlehnung an *Sen* (1970, S. 90) kann dieses Erfordernis, bei der Herleitung der sozialen Wohlfahrtsfunktion nur von individuellen Ordnungen auszugehen, als der „Ordinalitätsaspekt“ („ordering aspect“) der Bedingung (3) bezeichnet werden.

Nun findet sich dieser Ordinalitätsaspekt auch schon in der von *Arrow* (1963, S. 23) und anderen gewählten Definition von sozialer Wohlfahrtsfunktion. Bekanntlich wird sie als Vorschrift definiert, die aus individuellen *Ordnungen* eine soziale Ordnung formt. Damit ist der Ordinalitätsaspekt der Bedingung (3) als selbständiger Gesichtspunkt überflüssig; ihm kommt höchstens als Erläuterungsvorschrift zur üblichen Definition von sozialer Wohlfahrtsfunktion Bedeutung zu. Anzumerken ist in diesem Zusammenhang, daß der Ausschluß von Präferenzstärkemaßen (Kardinalität) demzufolge systematisch zutreffender unter Bezug auf die Definition von sozialer Wohlfahrtsfunktion als unter Bezug auf die Bedingung (3) diskutiert würde<sup>3</sup>. Dies hätte auch den Vorteil, daß der Unabhängigkeitsaspekt und der Ordinalitätsaspekt nicht vermischt würden<sup>4</sup> — sofern sie überhaupt als separate Aspekte zu begreifen sind.

<sup>3</sup> Siehe in diesem Zusammenhang auch die Vorgehensweise von *Samuelson* (1967, S. 416), dessen Axiom 1 sowohl die Bedingung (3) von *Arrow* wie die *Arrow*'sche Definition von sozialer Wohlfahrtsfunktion aufgenommen hat. — Der Ordinalitätsaspekt findet sich bei *Arrow* übrigens noch ein drittes Mal, nämlich in seiner ersten Bedingung.

<sup>4</sup> Darüber hinaus fragt es sich, ob es nicht der Klarheit dienen würde, wenn ein — als separat zu verstehender — Ordinalitätsaspekt explizit als selbständige Bedingung aufgeführt und nicht nur in einer Definition versteckt würde. Dies bedeutet natürlich ein Abrücken vom üblichen Vorverständnis von sozialer Wohlfahrtsfunktion. (Vgl. auch die Schlußbemerkungen.)

4. Ordinalitätsaspekt und als Binaritätsbedingung verstandener Unabhängigkeitsaspekt kennzeichnen also den Aussagegehalt der Bedingung (3). Es muß allerdings gefragt werden, ob es sich bei diesen beiden Aspekten um selbständig für sich stehende Gesichtspunkte handelt. Aufgrund des Ordinalitätsaspektes dürfen nur Informationen von den Ansichten der Individuen hinsichtlich der zur Wahl stehenden Alternativen berücksichtigt werden, die über eine ordinale Messung ermittelt werden können. So dürfen Unterschiede in der Wertschätzung zwischen den verschiedenen Alternativen auf das Ergebnis der Sozialwahl keinen Einfluß haben. Nun dürften die bei ordinaler Messung gewonnenen Informationen — sinnvoll interpretiert — dem entsprechen, was in binären Wahlen an Informationen zum Ausdruck kommt<sup>5</sup>. Somit ist im Ordinalitätsaspekt der Unabhängigkeitsaspekt enthalten; der Ordinalitätsaspekt ist das dominierende Kennzeichen der Bedingung (3), und die Bedingung (3) würde statt als Unabhängigkeitsbedingung besser als Ordinalitätsbedingung bezeichnet. Insgesamt erwiese es sich so, daß beide der im Namen der Bedingung (3) zum Ausdruck gebrachten Kennzeichen, nämlich Irrelevanz und Unabhängigkeit, besser nicht gewählt worden wären.

Hinsichtlich des Unabhängigkeitsaspekts spricht dafür schließlich ein weiterer, bisher noch nicht genannter Gesichtspunkt. Der Unabhängigkeitsaspekt ist nämlich seinerseits nicht an den Ordinalitätsaspekt gebunden. Es sind durchaus Sozialwahlfunktionen vorstellbar, wie etwa die utilitaristische Nutzensummen-Maximierungsregel, die über binäre Entscheidungen zu einer (konsistenten) sozialen Ordnung führen, obwohl diese Sozialwahlverfahren gegen die (Ordinalitäts-)Bedingung (3) verstoßen.

5. Wie unter 3. ausgeführt, wird der Ordinalitätsaspekt schon in der Definition von sozialer Wohlfahrtsfunktion zum Ausdruck gebracht. Unter 4. wurde dargelegt, daß der Aussagegehalt der Bedingung (3) voll durch den Ordinalitätsaspekt ausgeschöpft wird. Als selbständige Bedingung ist die Bedingung (3) somit überflüssig.

Wenngleich von diesem Ergebnis die Aussagen der Sozialwahltheorien im Kern nicht berührt werden, so hat es doch Auswirkungen darauf, wie die üblichen Sozialwahltheoreme konsequenterweise dargestellt werden müssen. Bei Definitionen sozialer Wohlfahrtsfunktionen, die auf individuellen Ordnungen basieren, dürfte es nämlich nicht zu dem — nach dem bisher Gesagten — paradoxen Resultat kommen, daß eine den

---

<sup>5</sup> Vergleiche auch, wie *Sen* in einem neueren Beitrag (*Sen* 1974, S. 389) die Bedingung (3) (als Condition I) formuliert: „Social ranking of any pair  $x, y$  depends only on the individual rankings of  $x, y$ .“ Siehe ferner *Samuelson* (1967, S. 416).

anderen *Arrow*'schen Bedingungen genügende soziale Wohlfahrtsfunktion mit Bedingung (3) nicht möglich, aber ohne sie möglich ist. Beispielsweise findet sich diese Paradoxie bei *Sen* (1970). Auch er kennzeichnete seine „social welfare function“ (S. 41) unter Bezug auf seine „collective choice rule“ (S. 28 und S. 23) als eine Vorschrift, die ausschließlich auf individuellen Ordnungen basierend zu Sozialwahlergebnissen führt. Wenn er nämlich argumentiert (S. 39 und S. 89), das Rangziffernverfahren genüge den „anderen“ *Arrow*'schen Bedingungen an eine soziale Wohlfahrtsfunktion, so ist dem entgegenzuhalten, daß dieses Abstimmungsverfahren nach seiner eigenen Definition gar keine soziale Wohlfahrtsfunktion ist, weil bei der Aggregation mehr Informationen verwendet werden, als in (den individuellen) Ordnungen enthalten sind. *Sens* Auführungen würden konsistent, wenn er in seiner Definition statt von „individuellen Ordnungen“ etwa von „individuellen Wohlfahrtsmaßen“ ausginge.

### Zusammenfassung

Der im Namen der Bedingung „Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen“ zum Ausdruck kommende „Irrelevanzaspekt“ ist irrelevant und irreführend. Obendrein ist — bei sinnvoller Interpretation — der „Unabhängigkeitsaspekt“ in dem in der formalen Definition dieser Bedingung zum Ausdruck gebrachten „Ordinalitätsaspekt“ enthalten, ohne daß andererseits der „Unabhängigkeitsaspekt“ an den „Ordinalitätsaspekt“ gebunden ist. Da der „Ordinalitätsaspekt“ schon in der Definition von sozialer Wohlfahrtsfunktion enthalten ist, erweist sich die Bedingung (3) im Rahmen üblicher Sozialwahltheorien (*Arrow*, *Sen*) als überflüssig.

### Summary

*Arrow's* Condition (3), “Independence of Irrelevant Alternatives” suggests an “independence aspect” and an “irrelevance aspect”. The irrelevance aspect is irrelevant and misleading. The independence aspect can be understood as being contained in the “ordinality aspect” expressed in the formal definition of the condition, whereas the ordinality aspect is already expressed in the usual definition of the social welfare function. Therefore, in the context of traditional theories of social choice Condition (3) is superfluous.

### Literatur

- Arrow*, K. J. (1950), A Difficulty in the Concept of Social Welfare, wieder abgedruckt in: K. J. Arrow und T. Scitovsky (Hrsg.), Readings in Welfare Economics, London 1969, S. 147 - 168.
- (1963), Social Choice and Individual Values, New York-London-Sidney 1963.
- (1974), General Economic Equilibrium: Purpose, Analytic Techniques, Collective Choice, in: American Economic Review, 64 (1974), S. 253 - 272.

*Mackscheidt, K.* (1973), *Zur Theorie des optimalen Budgets*, Tübingen 1973.

*Samuelson, P. A.* (1967), *Arrow's Mathematical Politics*, wieder abgedruckt in:  
R. C. Merton (Hrsg.), *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, Vol. III, Cambridge-London 1972, S. 411 - 421.

*Sen, A. K.* (1970), *Collective Choice and Social Welfare*, San Francisco e. a. 1970.

— (1974), *Informational Bases of Alternative Welfare Approaches*, in: *Journal of Public Economics* 3 (1974), S. 387 - 403.