

# Ein Satz über die Tendenz zur Monoproduktion

Von Hans Hermann Weber, Berlin

1. Wir betrachten eine Firma A, die durch folgende Größen beschrieben sei: Es werden mehrere Produkte  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) hergestellt. Für jedes Produkt  $j$  gibt es genau ein Fertigungsverfahren, das durch den Vektor:

$$\alpha j = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{mj})$$

mit  $\alpha_{ij} \geq 0$  und konstant, nicht alle  $\alpha_{ij} = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$

beschrieben wird.  $\alpha_{ij}$  ist die Menge der Faktorart  $i$ , die zur Produktion einer Einheit des Produktes  $j$  benötigt wird.

Die Produktpreise  $\pi_j > 0$  und Faktorpreise  $\varrho_i > 0$  sind konstant. Irgendwelche Beschränkungen auf den Absatz- und Beschaffungsmärkten bestehen nicht, außer auf dem Beschaffungsmarkt für Geld. In der betrachteten Periode hat die Firma maximal  $\beta > 0$  Geldeinheiten zum Ankauf von Faktoren  $i$  zur Verfügung. Evtl. Zinskosten seien in den Faktorpreisen  $\varrho_i$  enthalten.

Der Produktionsapparat, das sind die Faktoren  $i$ , sei vollständig variierbar.

Ziel der Firma ist die Maximierung des Periodengewinnes.

Ist  $x_j$  die Absatz(=Produktions)menge des Produktes  $j$  und  $r_i$  die Beschaffungsmenge des Faktors  $i$ , so ist nach den optimalen Mengen  $\overset{0}{x}_i, \overset{0}{r}_i$  gefragt. Diese werden durch Lösen des linearen Programms:

$$\begin{aligned} (1) \quad G = \sum_1^n j \quad \pi_j x_j - \sum_1^m i \quad \varrho_i r_i &\rightarrow \text{Max.} \\ \sum_j \alpha_{ij} x_j &= r_i & i = 1, \dots, m \\ \sum_i \varrho_i r_i &\leq \beta \\ x_j &\geq 0 & j = 1, \dots, n \\ r_i &\geq 0 & i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

bestimmt.

2. Es bedarf keiner Diskussion, daß die beschriebene Firma eine außerordentliche Vereinfachung einer realen Firma ist. Trotzdem

meine ich, daß das Modell einige interessante Aussagen liefert, die in ihrer Tendenz auch empirisch relevant sind.

Zu (1) ist offenbar:

$$(2) \quad \begin{aligned} G &= \sum_j (\pi_j - \sum_i \alpha_{ij} q_i) x_j \rightarrow \text{Max.} \\ \sum_j \sum_i \alpha_{ij} q_i x_j &\leq \beta \\ x_j &\geq 0 \end{aligned} \quad j = 1, \dots, n$$

äquivalent. Hierin sind

$$\pi_j - \sum_i \alpha_{ij} q_i = \delta_j \quad j = 1, \dots, n$$

die Stückgewinne und

$$\sum_i \alpha_{ij} q_i = \kappa_j \quad j = 1, \dots, n$$

die Stückkosten der Produkte  $j$ .

Das Modell (2) liefert nun die Aussage: Falls die Firma überhaupt produziert (nicht alle  $\delta_j < 0$ ), so gibt es mindestens ein optimales Produktionsprogramm in dem ein und nur ein  $\overset{0}{x}_j > 0$  ist. Für eine durch 1. befriedigend beschriebene Firma ist es rational, nicht als Mehr-, sondern als Einproduktfirma zu agieren.

Dieser Satz ist eine Konsequenz des Simplexeckentheorems: Ist die Zahl der linear unabhängigen Nebenbedingungen eines linearen Programms  $m$  und hat dieses überhaupt eine optimale Lösung, so hat es auch mindestens eine optimale Lösung mit maximal  $m$  Variablen  $\overset{0}{x}_j > 0$  (optimale Basislösung). In (2) ist  $m = 1$ . Hieraus folgt obige Aussage, wenn man noch zeigt, daß (2) überhaupt eine optimale Lösung hat. Das ist aber offensichtlich der Fall und wird in 4. streng bewiesen. Natürlich läßt sich der Satz über die Monoproduktion direkt aus (1) oder (2) ableiten. So ist denn auch weniger die Folgerung aus (2) entscheidend als vielmehr die Formulierung des Problems einer Mehrproduktfirma als Modell (1). Nur dann, wenn es mehrere Marktbeschränkungen gibt, kann es (muß es aber nicht) optimal sein, mehr als ein Produkt herzustellen. Die Zahl der Nebenbedingungen gibt eine obere Schranke für den Umfang des Produktionsprogramms. Tendenziell — nur in diesem Sinn lassen sich wegen der Vereinfachungen in 1. aus (2) Schlüsse für reale Situationen ziehen — sollte daher eine Firma bestrebt sein, Monoproduktion zu betreiben, und nur dann zur Diversifikation übergehen, wenn mehrere Marktbeschränkungen wirksam werden. Die vom Absatz oft geforderte Diversifikation ist zumindest mit einigen Vorbehalten zu versehen. Das zeigen auch die nicht gerade seltenen Fälle, in denen Firmen durch zu starke Diversifikation

in Schwierigkeiten kommen. Man kann dies als indirekte Stützung der Folgerung aus (2) ansehen. Auch ist zu beobachten, daß Firmen ständig bemüht sind, den Umfang des Produktionsprogramms zu reduzieren, oder Ausweitungen nur sehr zögernd vornehmen (VW). Auch dies stützt das Modell (1) und (2) und seine Aussagen. Insofern hat die Theorie der Einproduktunternehmung wohl doch größere Bedeutung als gemeinhin angenommen wird. Das zeigt auch das folgende.

3. Eine weitere Folgerung aus (2) ist, daß, solange die  $\delta_j$  und  $x_j$  unverändert bleiben, ein einmal optimaler Prozeß  $\alpha^j$ , d. h. für irgendeinen Betrag  $\beta$  ist  $\overset{0}{x}_j > 0$ , immer optimal bleibt, d. h. für alle Beträge  $\beta$ . Diese Aussage hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Theorem von Samuelson, nach dem in einer offenen Leontief-Wirtschaft dieselbe Input-Output-Matrix für alle Güterkörbe optimal ist<sup>1</sup>.

Die Aussage folgt aus dem Optimalitätskriterium der Simplex-methode. Dort treten bekanntlich lediglich Ausdrücke auf, die nur aus den Koeffizienten  $\delta_j, \pi_j$  gebildet werden, also unabhängig von  $\beta$  sind.

Bleiben also die  $\delta_j, \pi_j$  unverändert, so ist die Sortimentspolitik der Firma invariant gegenüber der Kapitalseite, und zwar auch gegenüber unterschiedlichen Rückzahlungs- und Verzinsungsmodalitäten für  $\beta$ . Wegen der speziellen Struktur von (2) gilt das auch, wenn sich die  $\delta_j, \pi_j$  zwar ändern, aber für  $j = \text{const.}$  mit der gleichen Rate: Man prüft nach, daß das Optimalitätskriterium, falls etwa  $\overset{0}{x}_1 > 0, \overset{0}{x}_j = 0, j = 2, \dots, n$  optimal ist,

$$(3) \quad \begin{aligned} \delta_1 - \delta_1 &= 0 \\ \delta_j - \pi_j \frac{\delta_1}{\pi_1} &\leq 0 \quad j = 2, \dots, n \end{aligned}$$

lautet. Daher gilt auch:

$$(4) \quad \begin{aligned} \eta_1 \delta_1 - \eta_1 \delta_1 &= 0 \\ \eta_j \delta_j - \eta_j \pi_j \frac{\eta_1 \delta_1}{\eta_1 \pi_1} &\leq 0 \quad j = 2, \dots, n \end{aligned}$$

falls

$$\eta_j - 1 \leq 0 \quad \text{mit} \quad \eta_j > 0 \quad j = 2, \dots, n$$

die Preisänderungsraten sind. Da (4) auch für:

$$\eta_j \neq \eta_{j+1}$$

<sup>1</sup> Siehe hierzu etwa Martin J. Beckmann: Lineare Planungsrechnung. Ludwigshafen 1959. S. 76 ff.

gilt, folgt die obige Behauptung. Insofern ist der Geltungsbereich von (2) relativ weit.

Nun reagieren Firmen oft auf eine relative Kostenänderung  $\eta-1$  mit der gleichen Absatzpreisänderung  $\eta-1$ . Sortimentsvariationen — hier genauer: ein Wechsel der hergestellten Produktart — werden i. d. R. nicht durch Änderungen der  $\delta_j, \kappa_j$  hervorgerufen, wenn sich die Firma ansonsten rational verhält. Anders gewendet: Will die Firma Sortimentsänderungen vermeiden — diese sind meist mit erheblichen Umstellungskosten verbunden —, so ist diese Art der Kostenüberwälzung, vorausgesetzt sie läßt sich auf dem Markt realisieren, vernünftig.

#### 4. Wir betrachten das zu (2) duale Problem:

$$(5) \quad \begin{aligned} K &= q\beta \rightarrow \text{Min.} \\ q\kappa_j &\geq \delta_j & j = 1, \dots, n \\ q &\geq 0 \end{aligned}$$

Wegen der Eigenschaften von (2) und (5) nach 1. haben offenbar beide lineare Programme zulässige Lösungen. Daher haben sie auch optimale Lösungen mit

$$\min K = \max G,$$

wie das Fundamentaltheorem der linearen Programmierung besagt. Damit ist die Aussage in 2. vollständig bewiesen.

(5) läßt sich sinnvoll ökonomisch interpretieren: Es möge eine weitere Firma B existieren, die für ihre Produktion von der Firma A den Betrag  $\beta$  ausleihen will. B ist natürlich bestrebt, den Betrag aus Rückzahlung und Zinsen:

$$(1 + p)\beta = q\beta \quad \text{mit } p \text{ als Zinsrate}$$

so niedrig als möglich zu machen. Das entspricht der Zielfunktion in (5). Andererseits muß  $p$  jedoch so groß sein, daß es für die Firma A nicht interessanter ist,  $\beta$  der eigenen Produktion zuzuführen. Es muß also gelten:

$$q\kappa_j \geq \delta_j \quad j = 1, \dots, n;$$

d. h. wird der Betrag  $\kappa_j$  nicht in den Prozeß  $\alpha^j$  mit dem Rückfluß (Überschuß)  $\delta_j$  geleitet, sondern der Firma B ausgeliehen, so muß der Rückfluß  $q\kappa_j$  mindestens gleich dem des Prozesses  $\alpha^j$  sein.

Offenbar ist die optimale Lösung von (5):

$$q = \max_j \frac{\delta_j}{\kappa_j}$$



Der Vergleich mit (3) zeigt, daß die Dualvariable im Optimum der Gewinn-Kosten-Rate des produzierten Gutes entspricht.

5. Es kann sein, daß mehrere Prozesse  $\alpha^j$  physisch oder von der Absatzseite her gesehen das gleiche Produkt herstellen, also etwa:

$$\pi_j = \pi_{j+1} \quad \text{aber} \quad \kappa_j \neq \kappa_{j+1}$$

gilt. Die vorstehenden Überlegungen bleiben davon unberührt, außer daß jetzt der Begriff Monoproduktion das Betreiben genau eines Prozesses (Fertigungsverfahren) meint.

Behält man diese Interpretation bei, so lassen sich die obigen Überlegungen auch auf die starre Kuppelproduktion übertragen: Die Outputs der Prozesse  $\alpha^j$  sind Produktpakete mit starren Mengenrelationen, die  $\pi_j$  Erlöse je Produktpaket  $j$  und  $\kappa_j$  die Kosten. Die Firma stellt zwar mehrere Produkte her, betreibt hierfür aber nur einen Prozeß.

Natürlich gelten alle Überlegungen entsprechend, wenn man die finanzielle Nebenbedingung in (1) austauscht gegen eine andere. So kann sein, daß nicht Geld begrenzt verfügbar ist, sondern Arbeitskraft.

6. An anderer Stelle habe ich gezeigt, daß bei sonst gleichen Annahmen auch dann Monoproduktion optimal ist, wenn ein vorgegebener Bruttogewinn mit minimalem Aufwand für Potentialfaktoren i. S. *Gutenbergs* erreicht werden soll<sup>2</sup>. Die Forderung nach Kapazitäts-harmonisierung bei einer bestimmten Betriebsgröße — diese etwa gemessen am Bruttogewinn — läßt sich nun sinnvoll präzisieren: Nicht jede Harmonisierung ist erwünscht, sondern nur jene, die kostenminimal ist. Diese Harmonisierung führt dazu, daß die Monoproduktion besonders ausgezeichnet wird.

## Summary

### A Remark on the Tendency of Mono-Production

This paper is formulating and discussing a linear program for a multi-product-enterprise, based on variability of all productive factors except financial means. By consequence of this approach firms really better operate as mono-product-enterprises. This is relativating the very frequent demand for diversification; moreover the tendency of mono-production is corroborated empirically. It is shown that these consequences are valuable even when prices are changing — changing under conditions which are empirically relevant. At the end the dual problem is discussed and the problem of capacity harmonization is briefly worked out.

<sup>2</sup> Ferdinand Meinen: Ein Modell des optimalen Unternehmenswachstums. Zeitschr. für betriebsw. Forschung u. Praxis, 21. Jg. (1969), S. 141 - 154.