

Über die Vorteilhaftigkeit von Copula-GARCH-Modellen im finanzwirtschaftlichen Risikomanagement

Von Gregor N. F. Weiß, Dortmund

I. Einleitung

In den vergangenen Jahren sind im quantitativen Risikomanagement verstärkt Copula-Modelle in den Fokus der Forschung geraten, die eine Modellierung der gesamten (linearen und nichtlinearen) Abhängigkeitsstruktur eines Zufallsvektors ermöglichen (für ein frühes Beispiel der anwendungsorientierten Betrachtung von Copula-Funktionen und eine Kritik an korrelationsbasierten Modellen vgl. z. B. *Embrechts/McNeil/Straumann* (2002)). Eine Copula liefert in bestechend einfacher Form eine Funktionsvorschrift, die höchst unterschiedliche Randverteilungen miteinander zur zugehörigen gemeinsamen Verteilung verknüpft. Erste Anwendungen haben Copula-Funktionen aufgrund dieser Eigenschaft insbesondere im Risikomanagement und in der Versicherungsmathematik gefunden, wo sie zur Generierung der gemeinsamen Verteilung eines Risikoportfolios verwendet wurden (Beispiele hierfür finden sich u. a. bei *Junker/May* (2005) und *Kole/Koedijk/Verbeek* (2007)). Wichtige Fragestellungen der Implementierung eines auf Copula-Funktionen basierenden Gesamtrisikomodells sind jedoch in der Wissenschaft noch nicht hinreichend beantwortet. So sind insb. auf die Fragen, welche parametrische Familie von Copula-Funktionen am besten zur Modellierung bestimmter Risiken geeignet ist und wie ein hochdimensionales Modell mit 20 oder mehr Risikofaktoren effizient geschätzt werden kann, bisher keine zufriedenstellenden Antworten gefunden worden.

Der vorliegende Beitrag verfolgt drei Ziele: Zum einen soll anhand einer umfangreichen Simulationsstudie die Vorteilhaftigkeit von Copula-GARCH-Modellen zur Bestimmung des Value at Risk (VaR) beziehungsweise Expected Shortfall gegenüber einem Varianz-Kovarianz- auf Basis der multivariaten Normalverteilung sowie dem DCC-Modell untersucht werden. Zum anderen soll die Frage geklärt werden, inwieweit das jeweilige Out-of-Sample als optimal identifiziertes Copula-GARCH-Modell

auf Basis des In-Samples hätte ermittelt werden können. Der Mehrzahl der Artikel in der Literatur folgend wird hierfür zunächst ein Copula-Anpassungstest verwendet. Anschließend wird die Frage beantwortet, ob das optimale Copula-GARCH-Modell unter Verwendung von idiosynkratischen Eigenschaften der Portfolio-Zeitreihen identifiziert werden kann. Schließlich soll im Rahmen dieses Beitrags erstmals die Eignung einer vollständig zeitabhängigen Mixture Copula für die VaR-Schätzung empirisch überprüft werden.

Zu diesem Zweck wird zunächst das nötige mathematische Fundament der Theorie der Copula-Funktionen gelegt. Hierauf aufbauend werden die Copula-GARCH-Modelle zur Bestimmung einer gemeinsamen Verlustverteilung erörtert. Durch die Analyse eines aus insgesamt 1275 im DAX vertretenen Aktien, Commodities, Indizes und Währungs-Futures bestehenden Portfolios stellt dieser Beitrag die bislang umfangreichste Untersuchung zur Vorteilhaftigkeit von Copula-Risikomodellen dar.

Der Beitrag untergliedert sich in fünf Abschnitte. Abschnitt II. beinhaltet einen kurzen Literaturüberblick. Abschnitt III. erläutert die univariate Schätzung des Value at Risk mithilfe von GARCH-Prozessen. In Abschnitt IV. werden Methoden zur Bestimmung des Portfolio-Value-at-Risks vorgestellt. Abschnitt V. präsentiert die empirische Untersuchung sowie die Ergebnisse. Eine kurze Zusammenfassung des Beitrags wird in Abschnitt VI. gegeben.

II. Literaturüberblick

Eine der ersten empirischen Studien über die Vorteilhaftigkeit von Copula-Modellen für die Modellierung von Abhängigkeitsstrukturen zwischen verschiedenen Anlageformen stammt von *Malevergne/Sornette* (2003). Die Autoren zeigen für einen Datensatz, bestehend aus sechs Währungskursen, sechs Commodity-Preisen und 22 an der NYSE notierten Aktienkursen, dass für die Mehrzahl der innerhalb einer Anlageklasse gebildeten bivariaten Portfolios die Abhängigkeitsstruktur am besten durch eine Gauß-Copula modelliert werden kann. Gleichzeitig betonen sie, dass die Student's t Copula fälschlicherweise für eine Gauß-Copula gehalten werden kann. Kritisch ist an der Studie von *Malevergne/Sornette* jedoch zu sehen, dass diese keine Schätzung von Risikomaßen für die Portfolios enthält, archimedische Copulas nicht berücksichtigt und keine Copula-spezifischen Anpassungstests verwendet. Die vermutete pauschale Vorteilhaftigkeit einer einzigen parametrischen Co-

pula ist jedoch beispielhaft für die Ergebnisse zahlreicher Arbeiten in den Folgejahren (Beispiele für solche Arbeiten sind u.a. *Fantazzini* (2008) und *Kole/Koedijk/Verbeek* (2007)). Beispielsweise zeigen *Kole/Koedijk/Verbeek* (2007) für ein trivariates Portfolio aus Aktien-, Anleihe- und REITS-Indizes, dass die Abhängigkeitsstruktur dieses Portfolios am besten durch eine Student's t Copula modelliert werden kann. Ein ähnliches Resultat hinsichtlich der Wahl der parametrischen Copula finden *Di Clemente/Romano* (2005).

Junker/May (2005) zeigen in ihrer Studie, dass ein Modell mit GARCH-Prozessen als Randverteilungen und einer speziell transformierten Frank-Copula marginal bessere Value-at-Risk- und Conditional-Value-at-Risk-Schätzungen liefern kann als die Gauß- oder Student's t Copula. Abermals stützen die Autoren dieses Ergebnis jedoch auf die Untersuchung eines einzelnen bivariaten Portfolios aus Hoechst- und Volkswagen-Aktien in einem einzigen Betrachtungszeitraum und verwenden ausschließlich allgemeine (Copula-unspezifische) Anpassungstests. Ein fast identisches Ergebnis unter ähnlichen Einschränkungen finden *Palaro/Hotta* (2006), wobei sie für ein bivariates Portfolio, bestehend aus dem S&P 500- und dem NASDAQ-Index, die Vorteilhaftigkeit eines Copula-GARCH-Modells mit symmetrisierter Joe-Clayton-Copula und GARCH-Randverteilungen finden.

Ebenso zeigt *Fantazzini* (2006) mithilfe einer empirischen Untersuchung von drei bivariaten Portfolios aus Aktienindizes, dass eine konstante beziehungsweise dynamische Gauß-Copula ausreicht, um im Backtesting akzeptable VaR-Schätzungen zu liefern.

Den genannten Studien ist somit gemein, dass alle Autoren auf Basis weniger Portfolios eine klare Vorteilhaftigkeit von Copula-Modellen im Vergleich zu korrelationsbasierten Modellen aufzeigen. Diese unterstellte Vorteilhaftigkeit soll daher auch in dieser Arbeit zunächst untersucht werden. Die genannten Studien suggerieren zudem, dass das Rahmenwerk eines Copula-Modells stets bessere Risikoschätzungen liefert als ein korrelationsbasiertes Modell, solange nur die (ex ante unbekannt) parametrische Copula-Form richtig gewählt wird. Im Rahmen dieser Untersuchung soll daher zunächst überprüft werden, ob auch für eine große Anzahl an Portfolios diese Vorteilhaftigkeit von Copula-Modellen gegenüber einem korrelationsbasierten Modell gegeben ist. Während vergleichbare Untersuchungen wie bspw. *Fantazzini* (2006) und *Kole/Koedijk/Verbeek* (2007) in der Regel nur wenige Portfolios betrachten, verallgemeinern die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung die bestehende Forschung zu Copulas.

Betrachtet man insbesondere die Arbeiten von *Malevergne/Sornette*, *Kole/Koedijk/Verbeek* und *Di Clemente/Romano*, so erkennt man, dass die Autoren dieser Studien eine klare Vorteilhaftigkeit elliptischer Copulas als Ergebnis festhalten. Andererseits zeigen *Junker/May* und *Palaro/Hotta*, dass für die von ihnen betrachteten Portfolios archimedische Copulas optimal sind. Für praktische Zwecke besonders relevant ist somit die Frage, wie die optimale parametrische Copula-Form im Vorfeld der Schätzung identifiziert werden kann. Da sämtliche bisherigen Studien (wenn überhaupt) nur Copula-unspezifische (d. h. für allgemeine Verteilungsfunktionen gültige) Anpassungstests verwendet haben, soll im Rahmen dieser Untersuchung ein spezieller Anpassungstest für Copula-Funktionen verwendet werden, dessen Güte in Simulationsstudien bestätigt wurde. Zudem ist bemerkenswert, dass bislang keine Studie Copula-Modelle sowohl durch ein VaR- beziehungsweise ES-Backtesting als auch gleichzeitig durchgeführte Anpassungstests beurteilt hat. Falls die Ergebnisse bisheriger Simulationsstudien Bestand haben, sollte der Anpassungstest auch mit Blick auf optimale VaR- und ES-Schätzungen stets die optimale parametrische Copula-Form ermitteln können.¹

Jüngste Anstrengungen im Bereich der Copula-Forschung bezwecken insbesondere eine Erhöhung der Flexibilität von Copula-Modellen. Als Beispiele können hier sogenannte Vine Copulas bzw. Pair-Copula Constructions genannt werden, bei denen unterschiedliche parametrische Copulas ineinandergeschachtelt zu einem hoch-dimensionalen Modell zusammengestellt werden können (vgl. hierzu insbesondere die Arbeiten von *Aas/Berg* (2009) und *Cooke/Joe/Aas* (2010)). Eine erhöhte Flexibilität wird ebenfalls mit sogenannten Mixture-Copula-Modellen angestrebt, bei denen mehrere parametrische Copulas als Konvex-Kombination zu einer neuen Copula zusammengestellt werden (vgl. z. B. die Arbeit von *Markwat/Kole/van Dijk* (2010)). Die Eignung dieser Modelle zum Zwecke der Risikomessung ist jedoch bislang noch nicht untersucht worden.

Die genannten Ergebnisse zeigen, dass die Frage nach der optimalen parametrischen Copula in der Literatur nicht abschließend geklärt ist. Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wird versucht, diese Forschungslücke durch einen neuen Ansatz zu schließen, indem die Abhängigkeit der optimalen parametrischen Copula von den idiosynkrati-

¹ Die beiden einzigen umfassenden Simulationsstudien von *Berg* (2009) und *Genest/Rémillard/Beaudoin* (2009) simulieren ausschließlich aus vorgegebenen parametrischen Copula-Funktionen und analysieren keine komplexeren Abhängigkeitsstrukturen sowie Realdaten.

schen Eigenschaften der Portfolio-Zeitreihen untersucht wird. Zusätzlich soll in dieser Untersuchung erstmals die Güte einer VaR- bzw. ES-Schätzung mithilfe eines vollständig zeitabhängigen Mixture-Copula-Modells² überprüft werden. Für einen sehr guten Überblicksartikel über weitere Strömungen innerhalb der Forschung zu Copula-Funktionen sei der interessierte Leser auf *Genest/Gendron/Bourdeau-Brien (2009)* verwiesen.

Im Folgenden werden nun die verschiedenen univariaten und multivariaten Modelle zur Messung des Risikos eines Portfolios besprochen.

III. Univariate VaR-Schätzung mithilfe von GARCH-Prozessen

Die quantitative Messung von Marktpreisrisiken wird in der Praxis regelmäßig mithilfe des Value at Risk vorgenommen. Formal lässt sich der (unbedingte) Value at Risk einer Verlustverteilung L zu einem Konfidenzniveau α schreiben als (*McNeil/Frey/Embrechts (2005)*)

$$(1) \quad \text{VaR}(\alpha) = \inf\{l \in \mathbb{R} \mid F_L(l) \geq \alpha\}.$$

Betrachten wir dagegen die bedingte Verlustverteilung $L|\Omega_t$ (unter der Bedingung der σ -Algebra Ω_t der bis zum Zeitpunkt t verfügbaren Informationen) und somit ein zeitabhängiges Modell, so schreiben wir den Value at Risk für den Tag $t + 1$ als

$$(2) \quad \text{VaR}_{t+1}(\alpha) = \inf\{l \in \mathbb{R} \mid F_{L|\Omega_t}(l) \geq \alpha\}.$$

Da der Value at Risk kein kohärentes Risikomaß darstellt (*Artzner et al. (1999)*) soll in der empirischen Untersuchung zudem der Expected Shortfall (definiert als Erwartungswert der den VaR übertreffenden Verluste) berechnet werden. Formal ist der Expected Shortfall zum Konfidenzniveau α für eine Verlustverteilung L definiert als $ES_\alpha(L) = E[L|\mathbb{1}_{L \geq \text{VaR}_\alpha(L)}]$ (*Wong (2008)*). Für stetige Verteilungen entspricht der ES dem Conditional Value at Risk, der definiert ist als durchschnittlicher VaR für alle Konfidenzniveaus unterhalb von α .

Im Folgenden soll ein Modell X dann als vorteilhafter gegenüber einem zweiten Modell Y angesehen werden, wenn die hiermit ermittelte Anzahl

² Hierunter verstehen wir eine Konvex-Kombination verschiedener parametrischer Copulas, bei der sowohl die Parameter der Konvexkombination als auch der einzelnen Copulas zeitabhängig sind.

an VaR-Überschreitungen ($Exceed_{ModellX}$) näher an der erwarteten Anzahl an Überschreitungen ($Exceed_{Emp}$) liegt als die des zweiten Modells ($Exceed_{ModellY}$), ohne die erwartete Anzahl zu überschreiten. Die so definierte Vorteilhaftigkeit eines Modells bedeutet, dass das Modell X das Risiko adäquater darstellt, als dies Modell Y tut, ohne jedoch das vom Investor eingegangene Risiko zu unterschätzen. Äquivalent hierzu betrachten wir ein Modell als optimal für die Berechnung des Expected Shortfalls (ES), falls der mit diesem Modell berechnete durchschnittliche ES im Testzeitraum die Schätzungen sämtlicher übriger Modelle verbessert, ohne den tatsächlichen durchschnittlichen ES zu überschreiten.

Für die empirische Berechnung des Value at Risk beziehungsweise Expected Shortfalls aus Realdaten sollten in einem ersten Schritt die Daten univariat mithilfe eines parametrischen Verteilungsmodells angepasst werden. Muss in einer vorgelagerten Datenanalyse die Nullhypothese einer bestimmten Verteilungsform (z.B. normal- oder t-verteilte stationäre Daten) abgelehnt werden, wie dies regelmäßig für Kapitalmarktdaten der Fall ist, so erfolgt die univariate Modellierung mithilfe eines GARCH-Prozesses. Wir beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung der Marktpreisveränderung X_t zum Zeitpunkt t der jeweiligen Position, ausgedrückt als Logrendite, als einzigem Risikofaktor. Wird als univariates Modell ein GARCH(1,1)-Prozess gewählt, so ist man auf die Bestimmungsgleichungen

$$(3) \quad X_t = B + \varepsilon_t$$

$$(4) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

geführt. Hierbei stellt X_t die Logrendite zum Zeitpunkt t dar, B ist eine Konstante, ε_t das Residuum zum Zeitpunkt t und σ_t^2 die Varianz zum Zeitpunkt t , wobei die Residuen z.B. als normal- oder t-verteilt angenommen werden (*Bollerslev/Wooldridge* (1992)). Eine Überprüfung der Anpassungsgüte der univariaten Modelle kann z.B. mithilfe des Ljung-Box-, des Jarque-Bera- sowie des Kolmogorow-Smirnow-Tests vorgenommen werden.

Für normal- oder t-verteilte Residuen sind der Value at Risk bzw. Expected Shortfall dann direkt analytisch bestimmbar. Mit F als (bedingter) Verteilungsfunktion der Residuen ε_t und σ_{t+1} als Prognose für die Volatilität gilt dann (vgl. hierzu *Gao/Song* (2008)):

$$(5) \quad VaR_{t+1}(\alpha) = \sigma_{t+1} F^{-1}(\alpha)$$

$$(6) \quad ES_{t+1}(\alpha) = \sigma_{t+1} \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{F^{-1}(\alpha)} x dF(x).$$

Nach der Schätzung der Parameter des GARCH(1,1)-Prozesses und der hierauf basierenden Prognose der Volatilität σ_{t+1} kann dann zusammen mit dem entsprechenden Quantil der Normal- oder t-Verteilung der univariate VaR bestimmt werden. Die auf diese Art bestimmten VaRs können mithilfe von Korrelationen miteinander verknüpft werden. Da die Berechnung des Portfolio-VaRs mithilfe von Copula-Funktionen jedoch sämtliche Ausprägungen der Randverteilungen (und keine univariaten Quantile bzw. VaRs) benötigt, werden zusätzlich zu den analytisch bestimmten VaRs auch Renditen mit den geschätzten GARCH-Prozessen simuliert.

Auf Basis der für einen Schätzzeitraum $[s; t]$ geschätzten univariaten GARCH-Modelle erfolgt somit im zweiten Schritt eine Monte-Carlo-Simulation. Für jede Aktie werden für den auf den Schätzzeitraum folgenden Tag $t + 1$ 10.000 Prognosewerte für die Logrendite aus den univariaten Modellen simuliert. Anschließend werden die Modelle für den Zeitraum $[s + 1; t + 1]$ neu geschätzt und 10.000 simulierte Logrenditen für den Tag $t + 2$ bestimmt usw. Das Ergebnis ist eine Simulationsmatrix der Form

$$(7) \quad X = \begin{pmatrix} \tilde{X}_{t+1}^{(1)} & \tilde{X}_{t+1}^{(2)} & \dots & \tilde{X}_{t+1}^{(10.000)} \\ \tilde{X}_{t+2}^{(1)} & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{X}_{t'}^{(1)} & \tilde{X}_{t'}^{(2)} & \dots & \tilde{X}_{t'}^{(10.000)} \end{pmatrix}$$

Ein Eintrag $\tilde{X}_{t^*}^{(\Psi)}$ in der t^* -ten Zeile und Ψ -ten Spalte der Matrix (7) beschreibt dabei die Ψ -te für einen Tag $t^* \in [t + 1; t']$ im Testzeitraum simulierte Logrendite einer Aktie. Die so simulierten Logrenditen für einen Tag $t^* \in [t + 1; t']$ können im nächsten Schritt zur Schätzung des Portfolio-VaRs mithilfe von Copula-Funktionen verwendet werden.

IV. Vorstellung der korrelationsbasierten Benchmark- und Copula-Modelle

1. Bestimmung des Value at Risk mithilfe von Korrelationen

Wurde für jede Vermögensposition der univariate VaR ermittelt, so stellt sich die Frage, wie die Einzel-VaRs aggregiert werden können, um so den VaR auf Portfolioebene zu bestimmen. Hierfür kann der lineare Gleich- beziehungsweise Gegenlauf der Vermögenspositionen genutzt werden. Der VaR im Zwei-Wertpapier-Fall lässt sich unter der Annahme normalverteilter Renditen mithilfe des linearen Korrelationskoeffizienten ρ_{12} der Verluste bestimmen (für eine Diskussion dieses Varianz-Kovarianz-Modells vgl. Dowd (1998)). Zur Vereinfachung werden die Notationen für das Signifikanzniveau und den Prognosetag $t + 1$ unterdrückt.

$$(8) \quad \text{VaR}^{PF} = \sqrt{\text{VaR}_1^2 + \text{VaR}_2^2 + \rho_{12} \text{VaR}_1 \text{VaR}_2}.$$

Diese Überlegung ist grundsätzlich übertragbar auf die Aggregation vieler Einzel-VaRs (Dowd (1998)):

$$(9) \quad \text{VaR}^{PF} = \sqrt{\mathbf{VaR} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{VaR}^T}.$$

Dabei bezeichnet \mathbf{VaR} den Vektor aller Einzel-VaRs und \mathbf{R} die Korrelationsmatrix. Im Folgenden bezeichnen wir eine mittels der Gleichung (8) stattfindende Aggregation der Einzel- zum Portfolio-VaR als Varianz-Kovarianz-Modell.

Ein Nachteil des vorgestellten Modells ist, dass es eine zeitliche Konstanz der Korrelationen unterstellt. Die Annahme konstanter Korrelation ist jedoch sehr einschränkend und widerspricht der Erkenntnis zahlreicher Untersuchungen (vgl. z.B. Engle (2002)), dass Korrelationen zwischen Kursrenditen in der Regel zeitabhängig sind. Aus diesem Grund wird in dieser Untersuchung das Dynamic-Conditional-Correlation-(DCC-)Modell von Engle als zweite Benchmark zu den Copula-Modellen verwendet. Hierbei handelt es sich um ein multivariates GARCH-Modell, bei dem in einem ersten Schritt univariate GARCH-Modelle für sämtliche Kursreihen geschätzt werden. In einem zweiten Schritt wird dann eine zeitabhängige Korrelationsmatrix auf Basis der standardisierten Residuen aus dem ersten Schritt geschätzt (vgl. hierzu insbesondere Engle (2002) und Engle/Sheppard (2003)).

Im DCC-Modell werden zunächst univariate GARCH-Modelle an die d einzelnen Renditenreihen des Portfolios angepasst, um mittels der geschätzten bedingten Volatilitäten die Renditen zu standardisieren. Der Vektor der standardisierten Renditen wird dann für die Modellierung der dynamischen Korrelationen verwendet. Formal gelten dann im DCC-Modell die folgenden Beziehungen:

$$(10) \quad \mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

mit $\boldsymbol{\mu}_t = (\mu_{1,t}, \dots, \mu_{d,t})' = E(\mathbf{X}_t | \Omega_{t-1})$ als unter den bis zum Zeitpunkt $t - 1$ verfügbaren Informationen Ω_{t-1} bedingten erwarteten Renditen und $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{d,t})'$ als Störtermvektor. Zudem gilt

$$(11) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t | \Omega_{t-1} \sim N(\mathbf{0}; \mathbf{H}_t),$$

d.h., die Störterme sind bedingt multivariat normalverteilt mit Varianz-Kovarianz-Matrix \mathbf{H}_t . Für diese gilt

$$(12) \quad \mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$$

mit einer Diagonalmatrix $\mathbf{D}_t = \text{diag}\{\sqrt{h_{ii,t}}\}$ und $\mathbf{z}_t = \mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$. Hierbei sind $h_{ii,t}$ ($i = 1, \dots, d$) die geschätzten bedingten Varianzen der univariaten GARCH-Modelle, \mathbf{D}_t ist die Diagonalmatrix der bedingten Volatilitäten, \mathbf{R}_t ist die zeitabhängige bedingte Korrelationsmatrix der Renditen und \mathbf{z}_t ist der Vektor der standardisierten Renditen mit Erwartungswert null und Varianz eins. Das DCC-Modell kann dann zweistufig (im ersten Schritt werden die standardisierten Renditen über die univariaten GARCH-Modelle bestimmt, im zweiten Schritt werden die bedingten Korrelationen ermittelt) mittels einer Maximum-Likelihood-Schätzung geschätzt werden. Der Portfolio-Value-at-Risk kann dann unter der Annahme t-verteilter Residuen der univariaten GARCH-Modelle z.B. mittels

$$(13) \quad \text{VaR}_{t+1}^{\text{PF}}(\alpha) = t_{\nu}^{-1}(\alpha) \cdot \sqrt{\mathbf{w}_t' \mathbf{H}_t \mathbf{w}_t}$$

mit $t_{\nu}^{-1}(\alpha)$ als α -Quantil der Standard-t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden, \mathbf{w}_t als Vektor der prozentualen Anteile der einzelnen Anlagen im Portfolio und mit \mathbf{H}_t als mittels des DCC-Modells geschätzter Varianz-Kovarianz-Matrix (für eine ähnliche Vorgehensweise vgl. *Hsu Ku/Wang* (2008)) berechnet werden. Der Expected Shortfall ist für das DCC-Modell mit t-verteilter Residuen gegeben mit

$$(14) \quad ES_{t+1}^{PF}(\alpha) = \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \left(\frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu-1} \right) \cdot \sqrt{\mathbf{w}_t' \mathbf{H}_t \mathbf{w}_t},$$

wobei t_ν^{-1} wieder die Quantilsfunktion und g_ν die Dichtefunktion der Standard-t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden bezeichnen.

Die dargestellten korrelationsbasierten Modelle besitzen jedoch zwei fundamentale Schwächen, die zu erheblichen Fehlern in der Schätzung des Value at Risk führen können. Zum einen stellt die Verknüpfung der Einzel-VaRs mithilfe von Korrelationen nur im Falle multivariat normalverteilter Risikofaktoren eine geeignete Modellierung der Abhängigkeitsstruktur dar. Eine solche Vereinfachung ist jedoch empirisch nicht haltbar. So sind Kapitalmarktdaten in der Regel leptokurtisch und nicht normalverteilt. Zudem weisen Kapitalmarktdaten häufig Heteroskedastie auf (zu diesen und weiteren stilisierten Fakten über Kapitalmarktdaten vgl. *McNeil/Frey/Embrechts* (2005)). Zum anderen ist die rein korrelationsbasierte Aggregation der univariaten Verteilungen für die Modellierung nichtlinearer Abhängigkeiten gänzlich ungeeignet. Im Folgenden soll daher ein Modell vorgestellt werden, das beide Schwachstellen in Ansätzen behebt. In diesem erfolgt die multivariate Modellierung der Zeitreihen mithilfe von Copula-Funktionen, die die Abbildung der gesamten Abhängigkeitsstruktur ermöglichen.³

2. Copula-Modelle zur Ermittlung des Gesamtrisikos

Ziel dieses Kapitels ist die kompakte Darstellung der Grundlagen der Copula-Theorie sowie der Copula-GARCH-Modelle zur Bestimmung der multivariaten Verlustverteilung eines Portfolios.

a) Grundlagen der Copula-Theorie

Sei $F(x_1, \dots, x_d)$ die gemeinsame Verteilungsfunktion einer Menge von Zufallsvariablen (X_1, \dots, X_d) definiert durch:

³ Neben der Copula-Modellierung existieren offensichtlich zahlreiche weitere Verfahren für die Schätzung des Value at Risk bzw. anderer Risikomaße. Beispiele für die VaR-Schätzung mithilfe der Extremwerttheorie finden sich z.B. in *McNeil/Frey* (2000), *Lauridsen* (2001) oder *Gençay/Selçuk* (2004). Einen Überblick über die Prognosegüte verschiedener Verfahren wie z.B. der Quantilsregression bietet *Mittnik/Kuester/Paoletta* (2006).

$$(15) \quad F(x_1, \dots, x_d) = P(X_i \leq x_i; i = 1, \dots, d).$$

Eine d -dimensionale Copula-Funktion, verkürzt auch als Copula bezeichnet, ist eine Funktion C auf dem d -dimensionalen Einheitskubus $[0; 1]^d$ in das Einheitsintervall $[0; 1]$, die eine d -dimensionale Verteilungsfunktion mit d univariaten und auf dem Intervall $[0; 1]$ gleichverteilten Randverteilungen darstellt (Nelsen (2006); McNeil/Frey/Embrechts (2005)). Die zentrale Bedeutung von Copula-Funktionen für die Modellierung von stochastischen Abhängigkeiten wird im Satz von Sklar deutlich (Sklar (1959)):

Sei F eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_d , dann existiert eine Copula-Funktion $C : [0; 1]^d \rightarrow [0; 1]$, sodass für alle $x_1, \dots, x_d \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt:

$$(16) \quad F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Sind die Randverteilungen stetig, so ist C eindeutig, ansonsten ist C eindeutig bestimmbar auf dem kartesischen Produkt der Wertebereiche der Randverteilungen (ein Beweis findet sich bei Nelsen (2006), S. 18).

Beschreibt $F_i^-(u_i) := \inf\{x_i | F_i(x_i) \geq u_i\}$ die verallgemeinerte inverse Verteilungsfunktion und wertet man die linke Seite von Gleichung (16) an den Stellen $x_i = F_i^-(u_i)$ mit $0 \leq u_i \leq 1$ für $i = 1, \dots, d$ aus, so ergibt sich (McNeil/Frey/Embrechts (2005)).

$$(17) \quad C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^-(u_1), \dots, F_d^-(u_d)).$$

Eine Copula ermöglicht somit eine im Vergleich zu herkömmlichen, häufig auf Normalverteilungsannahmen beruhenden Modellen flexiblere Modellierung multivariater Verteilungen.

b) Parametrische Copulas

Die Kalibrierung eines Copula-GARCH-Modells zur Schätzung des Value at Risk erfordert insbesondere die Auswahl einer parametrischen Funktionalform für die (unbekannte) wahre Copula. Im Folgenden sollen nun explizit zwei wichtige Familien von parametrischen Copulas vorgestellt werden: die elliptischen und archimedischen Copulas. Wir beschränken uns dabei auf Copulas, die beliebig in höhere Dimensionen verallgemeinert werden können.

Die Familie der elliptischen Copulas umfasst solche Funktionen, die aus multivariaten elliptischen Verteilungen, wie z.B. der multivariaten Normal- oder Student's-t-Verteilung, resultieren. Die Normal-Copula oder auch Gauß-Copula ist die Copula der multivariaten Normalverteilung. Stellt F die Verteilungsfunktion $\Phi_{\mathbf{R}}$ der multivariaten Normalverteilung mit Korrelationsmatrix \mathbf{R} dar und F_1, \dots, F_d jeweils die Verteilungsfunktion Φ der univariaten Normalverteilung, so folgt aus der allgemeinen Form des Satzes von Sklar die Normal-Copula als (McNeil/Frey/Embrechts (2005)).

$$(18) \quad C_{\mathbf{R}}^N(u_1, \dots, u_d) = \Phi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)).$$

Implizit ausformuliert mittels der Dichtefunktion der Normalverteilung führt dies zu:

$$(19) \quad C_{\mathbf{R}}^N = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right) dx_1 \dots dx_d.$$

Die Normal-Copula $C_{\mathbf{R}}^N$ ist durch die Matrix \mathbf{R} parametrisiert. Im Falle normalverteilter Randverteilungen (und nur in diesem Fall) ist \mathbf{R} identisch zur Korrelationsmatrix der aus der Verknüpfung der Normal-Copula und der Randverteilungen resultierenden d -dimensionalen Normalverteilung (für einen Beweis dieser Aussage vgl. Kinnebrock (2005)). Offensichtlich kann auch nur in diesem Fall die Matrix \mathbf{R} mit der Korrelationsmatrix kalibriert werden.

Wie zur Herleitung der Normal-Copula kann abermals der Satz von Sklar verwendet werden, um die univariaten t-verteilten Randverteilungen zu einer gemeinsamen multivariaten t-Verteilung mit der Korrelationsmatrix \mathbf{R} und der Anzahl an Freiheitsgraden ν zu verbinden (McNeil/Frey/Embrechts (2005)). Die t-Copula kann implizit notiert werden als:

$$(20) \quad C_{\mathbf{R}, \nu}^t = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{(\nu\pi)^{d/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) |\mathbf{R}|^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_d)} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\left(\frac{\nu+d}{2}\right)} dx_1 \dots dx_d,$$

wobei t_{ν} die Verteilungsfunktion der univariaten t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden bezeichnet. Für $\nu \rightarrow \infty$ konvergiert die t-Copula gegen die Normal-Copula.

Die vorgestellten elliptischen Copula-Funktionen zeichnen sich unter anderem durch ihre Symmetrie in den oberen und unteren Randbereichen der gemeinsamen Verteilung aus. Im Finanzbereich tritt jedoch häu-

fig das Phänomen auf, dass große Verluste häufig eine größere Abhängigkeit aufweisen als Gewinne. Im statistischen Sinne liegt in diesen Fällen eine Form der Randabhängigkeit des Zufallsvektors vor. So eignet sich bspw. eine Copula mit unterer Randabhängigkeit (engl.: lower tail dependence) besonders für die Modellierung von Realdaten, für die extreme gleichzeitig auftretende Kursverluste wahrscheinlicher sind als entsprechende extreme Kursgewinne.

Die bisher erläuterten Copula-Funktionen können jedoch ausschließlich symmetrische Formen der Randabhängigkeit abbilden (die Normal-Copula ist randunabhängig, die Student's t Copula ist symmetrisch randabhängig). Daher sollen nun drei Funktionen aus der Familie der archimedischen Copulas erörtert werden, die auch das Modellieren von asymmetrischen Abhängigkeiten in den Randbereichen der gemeinsamen Verteilung ermöglichen.

Die im oberen Bereich der gemeinsamen Verteilung randabhängige (upper tail dependent) Gumbel-Copula ist explizit gegeben durch:

$$(21) \quad C_{\theta}^{Gu}(u_1, \dots, u_d) = \exp \left[- \left(\sum_{i=1}^d -(\ln u_i)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right].$$

Die im unteren Bereich der gemeinsamen Verteilung randabhängige (lower tail dependent) und somit insbesondere für die Modellierung von Kapitalmarktdaten geeignete Clayton-Copula.⁴ (Clayton (1973)) hat die folgende explizite Form:

$$(22) \quad C_{\theta}^{Cl}(u_1, \dots, u_d) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1)^{-1/\theta}.$$

Die Clayton-Copula ist lediglich für $\theta > 0$ definiert und ergibt für $\theta \rightarrow 0$ die Unabhängigkeits-Copula.

Die randunabhängige Frank-Copula besitzt die explizite Form (Cherubini/Luciano/Vecchiato (2004)):

$$(23) \quad C_{\theta}^{Fr}(u_1, \dots, u_d) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^d (\exp(-\theta u_i) - 1)}{(\exp(-\theta) - 1)^{d-1}} \right)$$

mit $\theta > 0$ für $d \geq 2$.

⁴ Die Clayton-Copula wird auch als Cook-Johnson-Copula bezeichnet und wurde ursprünglich von Kimeldorf/Sampson untersucht, vgl. hierzu Cook/Johnson (1981) und Kimeldorf/Sampson (1975).

Die bis hierhin vorgestellten parametrischen Copulas besitzen ausschließlich zeitkonstante Parameter. Empirische Studien z.B. von *Longin/Solnik* (1995) oder *Bekaert/Hodrick/Zhang* (2009) belegen jedoch, dass sich die Abhängigkeitsstrukturen insbesondere von Kapitalmarktzeitreihen im Zeitablauf stark verändern. Ein Value-at-Risk-Modell, das diese zeitliche Variation der Abhängigkeitsstruktur nicht berücksichtigt, kann daher einem erheblichen Modellrisiko ausgesetzt sein. Zur Verringerung dieses Modellrisikos und zur Erhöhung der Flexibilität der zu verwendenden Modelle sollen daher Copulas mit zeitabhängigen Parametern sowie eine vollständig zeitabhängige Mixture Copula verwendet werden (zur Verwendung von zeitabhängigen Copulas vgl. *Patton* (2006), *Bartram/Taylor/Wang* (2007) und *Chen/Poon* (2010)).

Bei den zeitabhängigen (bzw. bedingten) Copulas wird unterstellt, dass die Parameter der Copula nicht konstant sind, sondern sich im Zeitablauf verändern können. Um diese zeitliche Variierbarkeit der Copula-Parameter erreichen zu können, werden die konstanten Copula-Parameter durch die nachfolgend zu besprechenden Entwicklungsgleichungen ersetzt.

Der Parameter für eine bivariate bedingte Gauß-Copula ist dann gegeben als

$$(24) \quad \varrho_t = \Lambda \left(\omega_\varrho + \beta_\varrho \cdot \varrho_{t-1} + \alpha \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(Y_{i,t-j}) \cdot \Phi^{-1}(Y_{2,t-j}) \right),$$

wobei $\Lambda(x) := (1 - e^{-x})(1 + e^{-x})^{-1}$ eine modifizierte logistische Transformation, Φ^{-1} die Inverse der Standardnormalverteilung und $Y_{i,t-j}$ ($i = 1, 2$) die letzten zehn sog. Pseudobeobachtungswerte beschreiben. Die Funktion $\Lambda(x)$ bewirkt hierbei zunächst eine Transformation des inneren Ausdrucks auf das offene Intervall $(-1; 1)$, sodass der resultierende Wert ein zulässiger Korrelationskoeffizient ist. Der innere Klammerausdruck ähnelt dann einem ARMA(1,10)-Prozess. Der zukünftige Wert des Parameters ϱ_t hängt somit zunächst ab von einem konstanten Term ω_ϱ und dem mit β_ϱ gewichteten vorherigen Parameterwert ϱ_{t-1} . Die Werte $Y_{i,t-j}$ stellen dann transformierte Rangdaten dar, die als Beobachtungen der wahren Copula aufgefasst werden können (vgl. *Genest/Rémillard/Beaudoin* (2009) für weitere Eigenschaften rangtransformierter Beobachtungswerte). Sei \mathbf{X} eine $T \times d$ -dimensionale Matrix von T Beobachtungswerten eines d -dimensionalen Zufallsvektors, so wird diese in die ebenfalls $T \times d$ -dimensionale Matrix \mathbf{Y} der Pseudobeobachtungswerte mithilfe folgender Formel überführt:

$$(25) \quad Y_j = (Y_{j1}, \dots, Y_{jd}) = \left(\frac{R_{j1}}{T+1}, \dots, \frac{R_{jd}}{T+1} \right),$$

wobei R_{ji} den Rang von X_{ji} unter (X_{1i}, \dots, X_{Ti}) bezeichnet. Während die Werte X_{ji} somit Beobachtungen der gemeinsamen Verteilung darstellen, können die Pseudobeobachtungswerte Y_{ji} als Stichprobe der wahren Copula und damit der Abhängigkeitsstruktur aufgefasst werden. Durch das Einsetzen dieser Pseudobeobachtungswerte in die Quantilsfunktion Φ^{-1} erhalten wir schließlich wieder Beobachtungswerte der gemeinsamen Verteilung unter der Annahme normalverteilter Ränder. Die gemittelten letzten 10 transformierten und miteinander multiplizierten Pseudobeobachtungswerte der Copula werden schließlich zusätzlich zum autoregressiven Teil der Entwicklungsgleichung (24) für den zeitabhängigen Copula-Parameter beigemischt. Hiermit soll eine mögliche Abhängigkeit (zum Lag 10) des Parameters von den vorherigen Pseudobeobachtungswerten der Copula modelliert werden. Die genaue Ausgestaltung des ARMA-ähnlichen Prozesses für den Copula-Parameter scheint jedoch von untergeordneter Bedeutung zu sein (*Patton (2006)*). So könnten bspw. auch andere Lags oder Absolutbeträge der ursprünglichen Pseudobeobachtungswerte bzw. vollkommen andere Entwicklungsgleichungen verwendet werden.

Für die t-Copula kann mit der Inversen der standardisierten t-Verteilung eine analoge Spezifikation für die Parameter aufgestellt werden (*Chen/Poon (2010)*). Für die drei archimedischen Copulas mit Parameter θ soll die folgende Entwicklung angenommen werden:

$$(26) \quad \theta_t = \omega_\theta + \beta_\theta \cdot \theta_{t-1} + \alpha \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |Y_{t,t-j} \cdot Y_{2,t-j}|.$$

Wieder wird für die zeitliche Entwicklung der Copula-Parameter ein ARMA(1,10)-ähnlicher Prozess angenommen, der neben einem autoregressiven Teil ebenfalls gemittelte vorherige Pseudobeobachtungen der Copula enthält. Die Einhaltung des Definitionsbereichs des Parameters θ wird nun jedoch innerhalb der Optimierungssoftware gewährleistet.

Zu beachten ist, dass bisherige Studien ausschließlich zeitabhängige Copula-Parameter berücksichtigen, die parametrische Form der Copula jedoch über die Zeit konstant halten (Beispiele hierfür sind die Arbeiten von *Patton (2006)* und *Fantazzini (2008)*). Zur weiteren Erhöhung der Modellflexibilität soll daher der Arbeit von *Markwat/Kole/van Dijk*

(2010) folgend zusätzlich ein vollständig zeitabhängiges Mixture-Copula-Modell verwendet werden. Unter einer Mixture Copula verstehen wir dabei eine Konvex-Kombination bspw. der Student's t, Clayton-, Frank- und Gumbel-Copula.

Die verwendete Mixture Copula aus bivariaten parametrischen Copulas mit zeitabhängigen Copulas (zur besseren Übersichtlichkeit wird der Zeitindex der einzelnen Copulas in der folgenden Definition unterdrückt) ist dann definiert durch

$$(27) \quad \begin{aligned} C(u_1, u_2) &= \omega_T C^T(u_1, u_2) \\ &+ \omega_C C^C(u_1, u_2) \\ &+ \omega_F C^F(u_1, u_2) \\ &+ (1 - \omega_T - \omega_C - \omega_F) C^G(u_1, u_2), \end{aligned}$$

mit $\omega_T, \omega_C, \omega_F \in [0; 1]$ und $\omega_T + \omega_C + \omega_F \leq 1$.

Um zusätzlich zu den zeitabhängigen Copula-Parametern auch die Parameter der Konvex-Kombination als zeitabhängig modellieren zu können, werden die Mixture-Parameter $\omega_T, \omega_C, \omega_F$ täglich aktualisiert (vgl. *Markwat/Kole/van Dijk* (2010) für eine ähnliche Vorgehensweise).

c) Parameterschätzung

Die dargestellten Copula-Funktionen sind sämtlich durch einen endlich-dimensionalen Vektor θ parametrisiert. Für die Schätzung des Value at Risk mithilfe eines Copula-GARCH-Modells ist somit die Schätzung der Copula-Parameter mithilfe vorliegender Vergangenheitsdaten notwendig. Die bekanntesten Verfahren hierfür bauen auf dem Maximum-Likelihood-Prinzip auf.

Sollen die Parameter der Randverteilungen sowie der Copula in einem Schritt geschätzt werden, so ist man auf die Exakte-Maximum-Likelihood-Schätzung (EML) geführt (*Kinnebrock* (2005)).

Da die Exakte-Maximum-Likelihood-Methode die simultane numerische Optimierung aller Parametervektoren durchführt, ist sie sehr rechenintensiv (*Joe/Xu* (1996)). Um dieses Problem zu beheben, wird in der nachfolgenden empirischen Untersuchung eine Abwandlung, die sogenannte *Kanonische-Maximum-Likelihood-* (*Bouyé et al.* (2000)) oder *Pseudo-Maximum-Likelihood-Methode* (vgl. *Genest/Rivist* (1993) für eine alternative Darstellung des Verfahrens) verwendet.

Diese ersetzt in einem ersten Schritt die parametrische Modellierung der Randverteilungen durch eine nichtparametrische mithilfe der empirischen Verteilungsfunktion. In einem zweiten Schritt wird die Log-Likelihood-Funktion

$$(28) \quad \ln L(\xi|x_{it}) = \sum_{t=1}^T \ln c_{\xi}(\hat{F}_1(x_{t1}), \dots, \hat{F}_d(x_{td})|\xi)$$

maximiert, wobei mit $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_d$ die empirischen Randverteilungen der Beobachtungswerte bezeichnet werden. Da bei dieser Methode keinerlei Annahmen über die parametrische Form der Randverteilungen zu treffen sind, kann dieses Schätzverfahren gerade dann wertvolle Ergebnisse liefern, wenn das Hauptaugenmerk auf der Untersuchung der Abhängigkeitsstruktur von Zufallsvariablen liegt.

d) Anpassungstests zur Prüfung der Güte einer Copula-Schätzung

Sind die Parameter der Copula-Funktionen geschätzt, stellt sich das Problem, die Güte der Schätzung zu beurteilen. Sei C die tatsächliche Copula-Funktion, so liegen folgende Hypothese und Alternative im Mittelpunkt des Interesses:

$$(29) \quad H_0 : C \in \Lambda = \{C_{\theta}|\theta \in \Theta\} \text{ gegen } H_1 : C \notin \Lambda = \{C_{\theta}|\theta \in \Theta\},$$

mit Λ als Familie von Copula-Funktionen und Θ als möglichem Parameterraum. Während für den univariaten Fall einfacher Verteilungsannahmen Anpassungstests oder auch *Goodness-of-fit-Tests* gut erforscht sind, wird die Thematik für Copula-Funktionen zurzeit recht kontrovers diskutiert (Beispiele für zentrale Arbeiten in diesem Gebiet sind z.B. *Genest/Rivest* (1993); *Breymann/Dias/Embrechts* (2003); *Fermanian* (2005); *Scaillet* (2005); *Genest/Quessy/Rémillard* (2006); *Genest/Rémillard* (2008)).

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf die Darstellung eines einfachen Anpassungstests, der jedoch trotz seines simplen Aufbaus in Simulationsstudien sehr gute Ergebnisse geliefert hat (vgl. z.B. *Berg* (2009)). Dort findet sich ebenso eine Übersicht weiterer Copula-Anpassungstests.

Typischerweise soll in den Anpassungstests keine Überprüfung der Randverteilungen erfolgen. Das Interesse liegt allein auf der Anpas-

sungsgüte der Copula. Anstelle der tatsächlichen Beobachtungswerte werden daher für die Schätzung der Teststatistik wieder Rangdaten verwendet werden.

Der hier vorzustellende Anpassungstest basiert auf einem Vergleich der empirischen Copula nach Deheuvels mit der in der Hypothese unterstellten Copula-Funktion (vgl. *Genest/Rémillard (2008)* für eine ausführliche Diskussion des Testverfahrens). Dabei sei Deheuvels empirische Copula-Funktion gegeben durch (*Deheuvels (1979)*)

$$(30) \quad \hat{C}(u) = \frac{1}{T+1} \sum_{j=1}^T \mathbf{1}\{Y_{j1} \leq u_1, \dots, Y_{jd} \leq u_d\},$$

wobei $Y_j(Y_{j1} \leq u_1, \dots, Y_{jd})$ gegeben ist durch Gleichung (25) $u = (u_1, \dots, u_d) \in [0; 1]^d$ und $\mathbf{1}$ die Indikatorfunktion bezeichne. Die empirische Copula-Funktion kann somit als nichtparametrische Approximation der wahren Copula auf Basis einer i.i.d.-Stichprobe angesehen werden.

Eine Cramér-von-Mises-Teststatistik⁵ ist dann gegeben durch (vgl. *Genest/Rémillard/Beaudoin (2009)*):

$$(31) \quad C_{vM} = T \int_{[0,1]^d} \{\hat{C}(Y) - C_{\hat{\theta}}(Y)\}^2 d\hat{C}(Y) = \sum_{j=1}^T \{\hat{C}(Y_j) - C_{\hat{\theta}}(Y_j)\}^2,$$

mit $Y = (Y_1, \dots, Y_T)$, wobei $\hat{C}(Y)$ die Funktionswerte der empirischen Copula und $C_{\hat{\theta}}(Y)$ die Funktionswerte der in der Hypothese unterstellten und geschätzten Copula an den rangtransformierten Daten Y darstellen. Da die Verteilung der Teststatistik unbekannt ist, muss eine Testentscheidung mithilfe einer approximativen Bootstrap-Testverteilung erfolgen. Auf die Darstellung der Verfahren zur Ermittlung approximativer p-Werte für die Testentscheidung soll an dieser Stelle verzichtet werden. Eine umfangreiche Beschreibung dieser Verfahren findet sich in *Genest/Rémillard/Beaudoin (2009)*.

e) Bestimmung des Portfolio-Value-at-Risk

Die Bestimmung des Portfolio-VaR erfordert im nächsten Schritt zunächst die Schätzung einer parametrischen Copula aus historischen Da-

⁵ Ebenso denkbar wären Kolmogorow-Smirnow-Teststatistiken.

ten. Die Auswahl der parametrischen Form der Copula sollte mithilfe des dargestellten Anpassungstests überprüft werden. Aus der für einen Zeitraum $[s + l; t + l]$ ($l = 0, \dots, 749$) geschätzten d -dimensionalen Copula-Funktion wird anschließend für den auf $t + l$ folgenden Handelstag eine Realisationsmatrix

$$(32) \quad \tilde{\mathbf{u}}_{l+1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{1;l+1}^{(1)} & \tilde{\mathbf{u}}_{2;l+1}^{(1)} & \cdots & \tilde{\mathbf{u}}_{d;l+1}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{1;l+1}^{(2)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}_{1;l+1}^{(10.000)} & \tilde{\mathbf{u}}_{2;l+1}^{(10.000)} & \cdots & \tilde{\mathbf{u}}_{d;l+1}^{(10.000)} \end{pmatrix}$$

mit 10.000 Ausprägungen der Copula simuliert.

Unter Ausnutzung des Zusammenhangs $x_i = F_i^-(u_i)$ werden diese simulierten Realisationen der jeweiligen Copula-Funktion durch Einsetzen in die aus den simulierten Logrenditen geschätzten empirischen Randverteilungen in simulierte Logrenditen der einzelnen Anlageformen transformiert.

Die simulierten Logrenditen im Portfolio unter der durch die Copula dargestellten Abhängigkeitsstruktur ergeben sich dann zu $\tilde{\mathbf{x}}_{i;l+1}^{(m)} = \tilde{F}_{i;l+1}^-(\tilde{\mathbf{u}}_{i;l+1}^{(m)})$ für jedes $i = 1, \dots, d$ und $m = 1, \dots, 10.000$ (für vergleichbare Möglichkeiten zur Berechnung des VaR mittels Copula-Funktionen vgl. *Rosenberg/Schuermann* (2004); *Franke/Härdle/Hafner* (2007)). Durch die Durchschnittsbildung $\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \tilde{\mathbf{x}}_i^{(m)}$ für jedes $m = 1, \dots, 10.000$, erhält man 10.000 simulierte Logrenditen des gleichgewichteten Portfolios zum Zeitpunkt $t + l + 1$ ($l = 0, \dots, 749$). Der Portfolio-VaR entspricht dann dem α -Quantil dieser simulierten Verteilung.

V. Empirische Untersuchung

Im Rahmen der empirischen Untersuchung soll überprüft werden, inwiefern sich die theoretischen Vorzüge der Copula-GARCH-Modelle empirisch bestätigen lassen. Sämtliche Berechnungen wurden mithilfe der freien Statistiksoftware R Version 2.6.0 durchgeführt.

1. Datenbasis

Ausgangspunkt der empirischen Untersuchung ist eine Datenbasis bestehend aus den täglichen Schlusskursen von 18 Werten des DAX 30, 24 an der Chicago Mercantile Exchange gehandelten Rohstoffwerten, 5 Aktienindizes sowie 4 Futures auf Wechselkurse wichtiger Währungen zum Euro im Zeitraum 18. September 2001 bis 2. Juni 2008. Aus den insgesamt 51 Kursen werden anschließend 1.275 bivariate gleichgewichtete Portfolios jeweils zweier Kurse bestimmt. Für jede Kombinationsmöglichkeit der verschiedenen Kurse wird somit ein bivariates Portfolio ermittelt. Für jedes dieser Portfolios werden anschließend auf Basis von 1000 Beobachtungswerten der Value at Risk sowie der ES für den darauffolgenden Handelstag geschätzt und im Backtesting mit dem tatsächlich erlittenen Verlust verglichen. Die beschriebene Vorgehensweise wird für einen Schätzzeitraum von 750 Handelstagen wiederholt.

Aus den Tageskursen der Anlagen werden in einem ersten Schritt Logrenditen auf Tagesbasis berechnet. Die Logrenditen werden im nächsten Schritt mithilfe des Jarque-Bera- und des Ljung-Box-Tests zu den Lags 1 und 10 auf Normalverteilung beziehungsweise Autokorrelation getestet. Zudem wird mit Engles LM-Test die Hypothese überprüft, dass die vorliegenden Zeitreihen einem ARCH-Prozess folgen.

Die an dieser Stelle unterdrückten deskriptiven Daten weisen die üblichen bei Kapitalmarktdaten beobachtbaren stilisierten Fakten auf. Neben einer vernachlässigbaren mittleren Rendite weisen sämtliche Kursreihen eine starke Wölbung und Schiefe der Verteilung auf. Folglich verwirft auch der Jarque-Bera-Test für jede Zeitreihe die Hypothese normalverteilter Logrenditen. Außerdem zeigt der LM-Test für jeden Kurs das Vorhandensein bedingter Heteroskedastizität der Daten an, sodass für jeden Kurs im nächsten Schritt ein GARCH(1,1)-Prozess als univariates Prognosemodell verwendet werden soll.

2. Univariate Schätzung

Aufgrund der Testergebnisse der vorgelagerten Datenanalyse werden für die Anpassung der Logrenditen jeder Anlageform GARCH(1,1)-Prozesse mit t-verteiltern Residuen verwendet (die Verwendung der t-Verteilung für die Residuen wird bspw. von *Bollerslev/Wooldridge* (1992) propagiert). Man beachte, dass das in dieser Arbeit verwendete und durch die Gleichung *varkovmod* gegebene Varianz-Kovarianz-Modell eine mul-

tivariate Normalverteilung der Renditen unterstellt. Werden für die Randverteilungen stattdessen univariate t-Verteilungen angenommen, so ist der Portfolio-Value-at-Risk nur approximativ durch Gleichung varkovmod gegeben (im Falle, dass die multivariate t-Verteilung gegen die multivariate Normalverteilung konvergiert). Obwohl die Annahme normalverteilter Renditen bei der Verwendung t-verteilter Residuen für die univariaten GARCH-Modelle offensichtlich verletzt ist, werden die univariaten VaRs der t-verteilter Aktienkurse trotzdem über die linearen Korrelationskoeffizienten mittels Gleichung varkovmod aggregiert. Zum einen kann diese Vorgehensweise mit der oben genannten Konvergenz der t- gegen die Normalverteilung für steigende Freiheitsgrade begründet werden. Zum anderen folgen wir mit dieser Vorgehensweise gängigen Verfahren in der Praxis zur Berechnung des Portfolio-Value-at-Risk (vgl. z.B. Dowd (1998) für eine ausführliche Beschreibung verschiedener in der Praxis eingesetzter Verfahren). Auf Basis dieser univariaten Modellierung erfolgt die beschriebene Monte-Carlo-Simulation: Für jede Anlage werden 10.000 Prognosewerte für die 750 Zeitpunkte des Testzeitraums simuliert.

Aus den empirischen Verteilungen dieser simulierten Logrenditen wird im nächsten Schritt der jeweilige Einzel-VaR beziehungsweise Einzel-ES zum Signifikanzniveau von einem Prozent für jeden Zeitpunkt $t + l$ mit $l = 1, \dots, 750$ wie zuvor beschrieben berechnet.

3. Multivariate Schätzung

Als Benchmark der Untersuchung sollen die mittels des beschriebenen Varianz-Kovarianz-Ansatzes bzw. des DCC-Modells ermittelten Portfolio-VaRs und Portfolio-ES dienen.

Im nächsten Schritt werden die (zeitabhängigen) Gauß-, Student's t, Clayton-, Frank- und Gumbel-Copula sowie die Mixture Copula mithilfe des *Kanonischen-Maximum-Likelihood-Schätzers* an die Daten des Schätzzeitraumes angepasst. Mithilfe jeder dieser angepassten Copulas wird dann für jeden Zeitpunkt des Testzeitraumes ein Portfolio-VaR und Portfolio-ES berechnet.

Die so bestimmten Schätzungen für den Value at Risk beziehungsweise Expected Shortfall des Portfolios zum Signifikanzniveau von einem Prozent werden anschließend im Backtesting mit der tatsächlichen Logrendite des Portfolios verglichen. Im Falle des Value at Risk werden über den gesamten Testzeitraum die tatsächlichen Überschreitungen des Value

at Risk gezählt, die im Falle einer korrekten Schätzung genau acht beitragen. Für die Beurteilung der Schätzgüte des Expected Shortfall wird jeweils das über den gesamten Testzeitraum bestimmte arithmetische Mittel der tatsächlichen ES mit dem analog berechneten Mittel der geschätzten ES verglichen. Im Falle einer korrekten Schätzung sollten sich diese beiden Mittel entsprechen.

4. *Ergebnisse zur Vorteilhaftigkeit von Copula-GARCH-Modellen*

In einem ersten Schritt soll untersucht werden, ob auf Basis der betrachteten Portfolios die in der Literatur geäußerte generelle Vorteilhaftigkeit von Copula-GARCH-Modellen bestätigt werden kann. Zu diesem Zweck werden für alle 1275 simulierten Portfolios die VaR-Überschreitungen beziehungsweise durchschnittlichen ES-Schätzungen sämtlicher Modelle miteinander verglichen und das jeweilig optimale Modell ermittelt. In der folgenden *Tabelle 1* wird die Anzahl der Fälle, in denen mind. eines der fünf parametrischen Copula-GARCH-Modelle bessere Risikoschätzungen als eine Benchmark liefert, in Relation zur Gesamtzahl an Simulationen (1275) gesetzt. Wir unterscheiden zudem zwischen den Fällen, in denen das Copula-Modell eindeutig besser ist, und den Fällen, in denen das Copula-Modell gegebenenfalls genauso gute Ergebnisse liefert wie das gewählte Varianz-Kovarianz-Modell (bzw. das DCC-Modell).

Die in *Tabelle 1* angegebenen Anteile zeigen, dass in über 67% aller Simulationen eine parametrische Copula-Form existiert, sodass das Copula-GARCH-Modell im Vergleich zum Varianz-Kovarianz-Modell eine bessere oder zumindest eine genauso gute VaR-Schätzung ermöglicht. Für knapp die Hälfte der simulierten Portfolios (44,86%) liefert eines der Copula-GARCH-Modelle zudem eine eindeutig bessere VaR-Schätzung als das Varianz-Kovarianz-Modell. Verwenden wir als Benchmark jedoch das DCC-Modell, so ist nur noch für 34,82% aller Portfolios ein Copula-GARCH-Modell eindeutig besser als die Benchmark. Ein nochmals schlechteres Bild zeigt sich für die Bestimmung des ES: In gerade einmal 28% aller Simulationen verbessert ein Copula-GARCH-Modell (mit der optimal gewählten, aber ex ante unbekanntem parametrischen Copula-Form) die ES-Schätzung des Varianz-Kovarianz-Modells, ohne das tatsächliche Risiko zu unterschätzen. Betrachten wir wiederum das DCC-Modell als Benchmark, so kann die Risikoschätzung in gerade einmal 24,47% aller Simulationen durch ein Copula-GARCH-Modell verbessert werden.

Tabelle 1

**Überprüfung der generellen Vorteilhaftigkeit
der Copula-GARCH-Modelle**

<i>Fälle unterschiedlicher Vorteilhaftigkeit der Modelle für ein beliebig vorgegebenes Portfolio:</i>	Anteil an der Gesamtzahl an Simulationen (in % von 1275)	
	VaR	ES
Es existiert ein Copula-GARCH-Modell, das eine bessere Risiko-Schätzung, zumindest aber das gleiche Ergebnis wie das korrelationsbasierte (DCC-)Modell, liefert.	67,76 (37,02)	28,63 (24,47)
Hierin enthalten: Es existiert ein Copula-GARCH-Modell, das eine eindeutig bessere Risiko-Schätzung liefert als das korrelationsbasierte (DCC-) Modell.	44,86 (34,82)	28,63 (24,47)
Es existiert ein Copula-GARCH-Modell, das das gleiche Ergebnis wie das korrelationsbasierte (DCC-)Modell liefert und das in der Menge der Copula-GARCH-Modelle optimal ist.	22,90 (2,20)	0,00 (0,00)
Sämtliche Copula-GARCH-Modelle sind nicht vorteilhaft.	32,24 (62,98)	71,37 (75,53)

Diese ersten Ergebnisse zeigen, dass Copula-GARCH-Modelle die Schätzung des VaR im Vergleich zum Varianz-Kovarianz-Modell für fast jedes zweite Portfolio eindeutig verbessern können. Gleichzeitig stellten sich jedoch die Copula-Modelle im Vergleich zum einfachen Benchmark-Modell in über 32% als nicht geeignet für die VaR-Schätzung heraus. Wird als Benchmark das DCC-Modell verwendet, so liefern die vorgestellten Copula-GARCH-Modelle für weniger als 40% aller Portfolios eine Verbesserung der Risikoschätzung, sodass eine generelle Vorteilhaftigkeit dieser Modelle nicht bestätigt werden kann. Für die Schätzung des ES zeigt sich ein nochmals schlechteres Bild: Die verwendeten Copula-GARCH-Modelle konnten nur für jedes vierte Portfolio die ES-Schätzungen des DCC-Modells verbessern.

Tabelle 2

**Überprüfung der generellen Vorteilhaftigkeit sämtlicher
parametrischer Copula-Formen**

<i>Parametrische Copula:</i>	Anteil der Fälle an der Gesamtzahl an Simulationen (in % von 1275), in denen das jeweilige Copula- GARCH-Modell ggf. mit anderen Copula-Modellen die beste Risikoschätzung geliefert hat. (Ergebnisse mit dem DCC-Modell als Benchmark sind in Klammern angegeben.)	
	VaR	ES
Gauß	11,22 (7,06)	0,00 (0,00)
Student's t	9,49 (5,29)	1,33 (0,00)
Clayton	24,78 (13,73)	23,61 (20,39)
Frank	11,06 (3,14)	2,12 (2,35)
Gumbel	9,41 (6,98)	1,57 (1,73)
Mixture	1,80 (0,63)	0,00 (0,00)

5. Ergebnisse zur optimalen parametrischen Copula

Die durchaus gemischten Ergebnisse der vorherigen Analyse haben gezeigt, dass von einer generellen Vorteilhaftigkeit von Copula-GARCH-Modellen nicht ausgegangen werden kann. Vielmehr ist für den Anwender die Klärung zweier Fragen von zentraler Bedeutung: Wann sollte anstelle des Benchmark-Modells (z.B. dem DCC-Modell) ein Copula-GARCH-Modell verwendet werden, und welche parametrische Copula sollte in diesem Fall gewählt werden?

Im nächsten Schritt der Analyse soll daher untersucht werden, welche parametrische Copula-Form über alle 1275 Simulationen gesehen die besten Risikoschätzungen leistet. Hierfür werden in *Tabelle 2* die Anteile der Fälle gezeigt, in denen ein vorgegebenes parametrisches Copula-GARCH-Modell das Risiko optimal beziehungsweise gegebenenfalls gleich gut wie weitere Modelle schätzt, ohne das Risiko zu unterschätzen.

Im Falle der VaR-Berechnung zeigt sich ein gemischtes Bild: Während für knapp ein Viertel aller Portfolios (24,78 %) eine Clayton-Copula die beste Schätzung der VaR-Überschreitungen vornimmt, liefern ebenfalls die elliptischen und die übrigen archimedischen Copulas für jeweils 10 % der Portfolios akzeptable Ergebnisse. Eine ähnliche Verteilung auf leicht

schlechterem Niveau erhalten wir ebenfalls für das DCC-Modell als Benchmark. In diesem Fall liefert wiederum die Clayton-Copula für ca. 13 % aller Portfolios die besten VaR-Schätzungen. Interessanterweise kann die Mixture Copula aus den fünf übrigen parametrischen Copulas nur für knapp 2 % (Varianz-Kovarianz-Modell) bzw. 0,6 % (DCC-Modell) der Portfolios die optimale VaR-Prognose liefern.

Ein noch deutlicheres Ergebnis zeigt sich im Falle der ES-Berechnung: In fast sämtlichen Fällen, in denen ein Copula-GARCH-Modell die Benchmark verbessern konnte, wurde dies durch eine Clayton-Copula erreicht. Absolut betrachtet war dies in 23,61 % (20,39 % für das DCC-Modell) aller Portfolios der Fall. Es zeigt sich somit, dass bei der Schätzung des extremen linken Randes der Gewinn- und Verlustverteilung die untere Randabhängigkeit der Clayton-Copula einen noch größeren Einfluss auf die Prognosegüte besitzt als bei der Schätzung des VaR. Als Ergebnis lässt sich somit festhalten, dass eine Schätzung des ES mithilfe eines Copula-GARCH-Modells unter Rückgriff auf die Clayton-Copula vorgenommen werden sollte. Für die VaR-Schätzung lässt sich eine derartige allgemeine Aussage bzgl. der Optimalität einer einzelnen parametrischen Copula hingegen nicht treffen.

6. Ergebnisse zur Identifikation der optimalen Copula mittels GoF-Tests

Im nächsten Schritt soll die Frage geklärt werden, wie das jeweilige Out-of-Sample optimale Copula-Modell auf Basis der Daten des In-Samples ermittelt werden kann. Zu diesem Zweck wird die Anpassungsgüte jedes Copula-Modells mithilfe des zuvor beschriebenen, auf der empirischen Copula basierenden GoF-Tests beurteilt. Die für alle Simulationen zusammengefassten Ergebnisse werden in *Tabelle 3* gezeigt.

Die Ergebnisse zeigen ein erstaunlich schlechtes Bild: Für lediglich 7,84 % (VaR-Schätzung) beziehungsweise 11,54 % (ES-Schätzung) aller Portfolios, für die mind. ein Copula-Modell optimal ist, wird die optimale parametrische Copula-Familie als einzige vom GoF-Test nicht abgelehnt. In weiteren 36,02 % (VaR-Schätzung) beziehungsweise 21,47 % (ES-Schätzung) werden weitere (suboptimale) Copula-Modelle ebenfalls nicht abgelehnt, sodass eine eindeutige Entscheidung nicht mehr möglich ist. Viel schwerwiegender ist jedoch, dass das bzgl. der VaR-Schätzung optimale Copula-Modell in mehr als jedem zweiten Fall, in dem mind. ein Copula-Modell optimal ist, vom GoF-Test abgelehnt wird und

Tabelle 3

**Ergebnisse der Anpassungstests für die VaR-Schätzung
(die entsprechenden Ergebnisse für die ES-Schätzung sind in Klammern
angegeben; die Benchmark ist das DCC-Modell)**

<i>Testentscheidung</i>	Anteil an der Gesamtzahl an Simulationen, in denen mindestens ein Copula-Modell bzgl. der VaR- bzw. ES-Schätzung optimal ist (in %):					
	Gauß	t	Clayton	Frank	Gumbel	Mixture
Optimales Modell wurde als einziges durch GoF-Test nicht abgelehnt.	1,48 (0,00)	0,42 (0,00)	3,18 (9,62)	0,85 (0,64)	1,91 (1,28)	0,00 (0,00)
Optimales Modell wurde durch GoF-Test abgelehnt.	10,81 (0,00)	12,29 (0,00)	22,25 (60,26)	4,87 (3,53)	3,18 (3,21)	2,75 (0,00)
Optimales Modell wurde zusammen mit weiteren suboptimalen Modellen durch GoF-Test nicht abgelehnt.	12,92 (0,00)	13,77 (0,00)	4,66 (13,46)	1,48 (6,09)	2,75 (1,92)	0,42 (0,00)

somit eine falsche Wahl der parametrischen Copula-Familie empfohlen wird.

Zudem zeigt sich, dass der GoF-Test überproportional häufig eine optimale Clayton-Copula ablehnt. Für die Schätzung des ES zeigt sich ein noch deutlicheres Bild: Die in der Mehrzahl der Simulationen optimale Clayton-Copula wird regelmäßig zugunsten eines suboptimalen elliptischen Modells abgelehnt. Das Vertrauen auf einen Copula-Anpassungstest wird somit in zahlreichen Fällen zu erheblichen Fehleinschätzungen des tatsächlichen Risikos führen.

7. Ergebnisse zur Identifikation der optimalen Copula mittels deskriptiver Statistiken

Die Ergebnisse bzgl. des Copula-Anpassungstests haben gezeigt, dass mit einem solchen Test nur in Ausnahmefällen eine optimale Entscheidung zugunsten oder gegen ein Copula-Modell getroffen werden kann. Im letzten Schritt der empirischen Untersuchung soll daher die Frage be-

Tabelle 4

**Durchschnittliche deskriptive Kennzahlen der Portfolios
unterteilt nach der Optimalität der verschiedenen Modelle**

Deskriptive Statistiken	Arith. Mittel der jew. Kennzahl über sämtliche Portfolios, für die ein Copula- bzw. das DCC-Modell optimale VaR-Schätzwerte lieferte.						
	Gauß	t	Clayton	Frank	Gumbel	Mixture	DCC
$ E(r_1) - E(r_2) \times 10^{-4}$	4,7372	4,5848	4,9550	4,6636	4,7633	6,1134	4,8489
$ \sigma(r_1) - \sigma(r_2) $	0,0148	0,0146	0,0092	0,0111	0,0081	0,0113	0,0065
$\sigma(r_1) + \sigma(r_2)$	0,0494	0,0491	0,0357	0,0396	0,0347	0,0363	0,0306
$ Schiefe(r_1) - Schiefe(r_2) $	0,2346	0,2258	0,4035	0,4215	0,3965	0,4393	0,3887
Schiefe(r_1) +Schiefe(r_2)	-0,4235	-0,4465	-0,5438	-0,6260	-0,5608	-0,5654	-0,3717
$ Exzess(r_1) - Exzess(r_2) $	2,9917	3,0019	3,1268	2,9343	3,1598	3,7145	3,0431
Exzess(r_1) +Exzess(r_2)	7,6036	7,7557	8,1171	7,6452	8,0845	7,8867	8,2271
$\varrho(r_1, r_2)$	0,1031	0,1082	0,0941	0,0990	0,1281	0,0543	0,1465
Kendalls Tau (r_1, r_2)	0,0688	0,0717	0,0612	0,0663	0,0840	0,0352	0,0973
$ \max(r_1) - \max(r_2) $	0,0570	0,0564	0,0499	0,0600	0,0439	0,0564	0,0389
$ \min(r_1) - \min(r_2) $	0,0679	0,0666	0,0575	0,0688	0,0552	0,0782	0,0440
$ (\max(r_1) - \min(r_1)) - (\max(r_2) - \min(r_2)) $	0,1218	0,1200	0,1048	0,1263	0,0963	0,1344	0,0801

antwortet werden, ob die Auswahl eines Copula-GARCH-Modells durch die Analyse idiosynkratischer Eigenschaften der Portfolio-Zeitreihen unterstützt werden kann. Zu diesem Zweck wurden zunächst für die Daten des Schätzzeitraumes sämtlicher 1.275 Portfolios zahlreiche statistische Kennzahlen berechnet, die insbesondere die Form bzw. die Lage der jeweiligen Verteilung charakterisieren. Anschließend wurden sämtliche Portfolios anhand der jeweils optimalen Copula- bzw. Benchmark-Modelle in Gruppen aufgeteilt, für die jeweils die arithmetischen Mittel der genannten Kennzahlen bestimmt wurden. Die Ergebnisse dieser Analyse werden in *Tabelle 4* gezeigt.

Die in *Tabelle 4* gezeigten Ergebnisse zeigen deutlich, dass bereits mithilfe einfacher deskriptiver Statistiken eine Entscheidung für ein Copula-GARCH-Modell (und somit gegen das DCC-Modell als Benchmark)

getroffen werden kann. So waren die Portfolios, in denen das DCC-Modell die besten VaR-Schätzungen lieferte, im Durchschnitt durch eine geringe absolute Differenz der Varianzen der Portfolio-Zeitreihen gekennzeichnet (0,0065). Gleichzeitig war die Abhängigkeit zwischen den beiden Portfoliobestandteilen ausgedrückt durch die Portfolio-Korrelation sowie Kendalls Tau vergleichsweise stark. Schließlich weisen die Portfolios, für die sämtliche Copula-Modelle die Benchmark nicht verbessern konnten, die höchste durchschnittliche Leptokurtosis auf (ausgedrückt durch die Summe der Exzess-Kennzahlen beider Zeitreihen). Zusammengefasst bedeutet dies, dass eine besonders starke Korrelation zusammen mit einer hohen Leptokurtosis sowie einer geringen insgesamten Variabilität der Daten ein Indiz für die Optimalität des DCC-Modells sein kann.

Außerdem zeigen die Ergebnisse in *Tabelle 4*, dass umgekehrt eine hohe Variabilität beider Zeitreihen gepaart mit einer vergleichsweise geringen Leptokurtosis sowie einer geringen Schiefe beider Verteilungen als Indiz für die Optimalität einer elliptischen Copula gewertet werden kann. Zusätzlich kann ein geringer (starker) Unterschied zwischen den Schwankungsbreiten beider Zeitreihen ein Indiz für die Optimalität der elliptischen Copula-Modelle (des DCC-Modells) sein.

Hinsichtlich der Copula-GARCH-Modelle mit archimedischen Copulas lassen sich keine eindeutigen Handlungsanleitungen aus den durchschnittlichen deskriptiven Statistiken ableiten. Die vorherigen Analysen haben jedoch gezeigt, dass regelmäßig die Clayton-Copula den übrigen archimedischen Copulas vorzuziehen ist.

Schließlich zeichneten sich die Portfolios, deren optimale VaR-Schätzungen durch das Mixture-Copula-GARCH-Modell gegeben waren, durch die geringste Korrelation und die größte Differenz der Schwankungsbreiten aus. Da die Anzahl dieser Portfolios jedoch relativ gering war (unter 2% aller Portfolios), kann dieses letzte Ergebnis nicht verallgemeinert werden.

8. Diskussion der Ergebnisse

Die gefundenen Ergebnisse der vorherigen Unterkapitel sollen nun detailliert diskutiert werden. Zunächst fällt auf, dass die Prognosegüte der verwendeten Modelle für die Schätzung des ES vergleichsweise schlecht war. Dieses Ergebnis einer schlechteren Prognosegüte für den ES verwundert umso mehr, da gerade Copulas theoretisch besser für die Modellierung der extremen Ränder multivariater Verteilungen geeignet sind,

als dies bspw. mit Korrelationen möglich ist. Folglich sollte auch die Schätzung quantilsbasierter Risikomaße, die insbesondere den extremen linken Rand der Gewinn- und Verlustverteilung abbilden, entsprechend genauer sein als die Schätzung mithilfe korrelationsbasierter Modelle.

Ein möglicher Grund für diese schlechte Prognosegüte der Copula-GARCH-Modelle könnte daher in der unzureichenden Modellierung von Randabhängigkeiten in den Daten durch bestimmte parametrische Copulas bestehen. Während Kapitalmarktdaten in der Regel durch untere Randabhängigkeit charakterisiert sind (d.h. eine erhöhte Wahrscheinlichkeit gleichzeitig eintretender extremer Kursverluste), kann diese Form der Abhängigkeit im extremen linken Verteilungsrand ausschließlich von der Clayton-Copula sowie der sie enthaltenden Mixture Copula modelliert werden. Die Ergebnisse der Schätzungen zeigen, dass die Verbesserungen der ES-Schätzungen des Varianz-Kovarianz-Modells überproportional oft (genauer: für ca. 25% aller Portfolios) durch eine Clayton-Copula gelingt. Die fehlende Eignung der übrigen parametrischen Copulas, eine untere Randabhängigkeit der Daten zu modellieren, scheint somit insbesondere bei der Schätzung des Expected Shortfalls zu einer schlechten Prognosegüte dieser Modelle im Vergleich zum Varianz-Kovarianz-Modell zu führen.

Insgesamt zeigt sich jedoch auch, dass selbst die Clayton- bzw. Mixture Copula nicht in der Lage sind, die VaR- bzw. ES-Schätzungen des DCC-Modells zu verbessern. Ein möglicher Grund hierfür könnte die Tatsache sein, dass in den extremen Randbereichen der Verteilungen nur wenige Datenpunkte vorliegen. Die schlechte Prognosegüte der Copula-GARCH-Modelle könnte somit der geringen Datenmenge jenseits des VaRs geschuldet sein. Das Ergebnis einer schlechteren Prognosegüte des ES bei einer zu geringen Stichprobengröße wurde ebenfalls von *Yamai/Yoshida* (2005) gefunden. Die angesprochene Problematik wird zudem durch die Tatsache verstärkt, dass aufgrund des Fluchs der Dimensionen für die Schätzung bivariater Copulas generell mehr Datenpunkte benötigt werden.

Die festgestellte Unzulänglichkeit des verwendeten Anpassungstests soll an dieser Stelle ebenfalls ausführlich diskutiert werden, stellt sie doch ein vollständig konträres Ergebnis zu den Befunden der bislang veröffentlichten Simulationsstudien von *Genest/Rémillard/Beaudoin* und *Berg* zu Copula-GoF-Tests dar. In diesen wurde insbesondere für den in dieser Arbeit verwendeten Anpassungstest eine hohe Teststärke festgestellt, die sich jedoch nicht in den VaR- bzw. ES-Schätzungen wider-

spiegelte. Ein Grund hierfür mag sein, dass bisherige Arbeiten die Teststärke der Copula-Anpassungstests ausschließlich auf Basis von Daten, die aus einer eindeutig vorgegebenen parametrischen Copula simuliert wurden, getestet haben. Diese Laborbedingungen ungestörter Daten unter einer klar definierten Abhängigkeitsstruktur könnten daher die Ergebnisse der Simulationsstudien verzerrt haben.

Ein weiterer Grund für die gefundene Schwäche der Testverfahren mag sein, dass sämtliche bislang vorgeschlagenen Copula-GoF-Tests die Güte der Anpassung auf Basis sämtlicher Beobachtungswerte und somit auf Basis der gesamten gemeinsamen Verteilung beurteilen, die Risikoschätzung mithilfe des VaR beziehungsweise ES jedoch lediglich die Randbereiche der Verteilung betreffen. Somit sollten zukünftige Arbeiten sich mit der Frage beschäftigen, wie insbesondere die Anpassungsgüte eines Copula-Modells im für die VaR-Bestimmung interessierenden Randbereich der gemeinsamen Verteilung beurteilt werden kann und wie gegebenenfalls existierende Anpassungstests hierfür angepasst werden müssten. Schließlich könnte die gefundene Schwäche des Anpassungstests ebenfalls der allgemeinen Schwierigkeit geschuldet sein, Out-of-Sample-Prognosen auf Basis eines In-Samples zu treffen. Dieses Problem könnte insbesondere dann gegeben sein, falls sich die optimale Copula im Zeitablauf verändern sollte. Da in der empirischen Untersuchung jedoch bedingte Copulas mit zeitabhängigen Parametern verwendet wurden, könnte lediglich eine zeitliche Variation in der parametrischen Form der Copula die geringe Out-of-Sample-Prognosegüte der Modelle erklären. Dies unterstreicht die Bedeutung einer weiteren Erforschung von Mixture Copulas, bei denen neben den Parametern auch die parametrische Form im Zeitablauf variieren kann.

Schließlich können die gefundenen Zusammenhänge zwischen den deskriptiven Statistiken der bivariaten Portfolios sowie der Optimalität der verschiedenen Modelle bei einer genaueren Betrachtung ebenfalls theoretisch erklärt werden. Wie bereits zuvor kann festgehalten werden, dass eine starke Wölbung bzw. die *fat tails* der Verteilungen gegen eine Modellierung mit Copula-Modellen spricht (möglicherweise hervorgerufen durch eine zu geringe Stichprobengröße bzw. die falsche Modellierung der unteren Randabhängigkeit). Umgekehrt kann eine geringe Leptokurtosis (und damit eine größere Nähe zur elliptischen Normalverteilung) durch die Wahl einer elliptischen Copula besser modelliert werden, als dies mit den übrigen Modellen möglich ist. Sollten die Statistiken gegen eine Benutzung der elliptischen bzw. korrelationsbasierten Modelle spre-

chen, so sollte die Clayton-Copula aufgrund ihrer Fähigkeit zur Modellierung der unteren Randabhängigkeit gewählt werden.

Für die Mixture Copula lässt sich abschließend feststellen, dass diese faktisch nicht für die VaR-Schätzung im beschriebenen Copula-GARCH-Modell geeignet ist. Als Hauptgrund für diese eklatant schlechte Prognosegüte muss insbesondere die numerische Instabilität der Schätzung der Parameter und Gewichte der Mixture Copula angesehen werden. In der empirischen Untersuchung wurden die Parameter und Gewichte mit unterschiedlichen Optimierungsalgorithmen geschätzt, wobei regelmäßig die Problematik lokaler Maxima der Likelihood-Funktion auftrat. Trotz Polierens der gefundenen Maxima mit unterschiedlichen Algorithmen konnte diese Problematik letztlich nicht vollständig gelöst werden. Die höhere Flexibilität dieser Modelle scheint somit durch die numerische Instabilität der Parameterschätzung erkauft zu werden, wobei Letzgenannte bereits im bivariaten Fall überwiegt.

VI. Zusammenfassung

Im Rahmen des vorliegenden Beitrags wurde zunächst der Aufbau eines Copula-GARCH-Modells zur Schätzung des Gesamtrisikos eines Marktportfolios erläutert. Anschließend wurden der Value at Risk und Expected Shortfall für insgesamt 1275 Portfolios berechnet und die Frage erörtert, wie das VaR- bzw. ES-optimale Modell in-sample bestimmt werden kann.

Die durchgeführten Simulationen zeigen, dass für knapp die Hälfte der simulierten Portfolios eine Copula existiert, sodass das zugehörige Copula-GARCH-Modell eine eindeutig bessere VaR-Schätzung als das Varianz-Kovarianz-Modell liefert. Verwenden wir stattdessen als Benchmark jedoch das DCC-Modell, so ist nur noch für knapp ein Drittel aller betrachteten Portfolios ein Copula-GARCH-Modell eindeutig besser als die Benchmark. Im Vergleich hierzu zeigt sich für die Bestimmung des Expected Shortfall ein nochmals schlechteres Bild: Für gerade einmal 24% aller Portfolios verbesserte ein Copula-GARCH-Modell die Ergebnisse des DCC-Modells als korrelationsbasierte Benchmark. Eine generelle Vorteilhaftigkeit von Copula-Modellen gegenüber korrelationsbasierten Modellen konnte in dieser Studie somit nicht festgestellt werden.

Neben der generellen Vorteilhaftigkeit des Copula-GARCH-Modells stand insbesondere die Modellwahl im Fokus der empirischen Unter-

suchung. Der in diesem Beitrag verwendete, auf der empirischen Copula basierende Anpassungstest erwies sich jedoch als vergleichsweise schwach in seiner Fähigkeit zur Wahl des optimalen Modells. In fast allen Fällen lieferte der GoF-Test entweder eine mehrdeutige oder eine falsche Empfehlung. Dieses Ergebnis ist umso verblüffender, wenn man bedenkt, dass gerade dieser Teststatistik in Simulationsstudien eine besondere Güte bescheinigt wurde. Gleichzeitig konnte gezeigt werden, dass bestimmte deskriptive Statistiken zur Lage und Gestalt der gemeinsamen Verteilung des Portfolios für die Entscheidung für ein Copula-GARCH-Modell bzw. das DCC-Modell genutzt werden können. So zeigte sich in der empirischen Untersuchung, dass insbesondere die Portfolios mit geringer Variabilität, hoher Wölbung und hoher Korrelation mithilfe des DCC-Modells anstelle eines Copula-Modells modelliert werden sollten.

Die in dieser Studie erstmals für die VaR- und ES-Schätzung eingesetzten vollständig zeitabhängigen Mixture Copulas erwiesen sich trotz ihrer hohen Flexibilität als nicht geeignet, die Ergebnisse des DCC-Modells zu verbessern. Als Grund hierfür muss die numerische Instabilität der Parameterschätzung angesehen werden. Erheblicher Forschungsbedarf besteht somit insbesondere hinsichtlich der Frage, wie flexible Copula-Modelle wie z.B. die genannten Mixture Copulas oder auch Vine Copulas sinnvoll im quantitativen Risikomanagement eingesetzt werden können.

Literatur

Aas, Kjersti/Berg, Daniel (2009): Models for construction of multivariate dependence, in: *European Journal of Finance*, Vol. 15. S. 639–659. – Artzner, Philippe/Delbaen, Freddy/Eber, Jean-Marc/Heath, David (1999): Coherent Measures of Risk, in: *Mathematical Finance*, Vol. 9. S. 203–228. – Bartram, Söhnke/Taylor, Stephen/Wang, Yaw-Huei (2007): The Euro and European Financial Market Dependence, in: *Journal of Banking & Finance*, Vol. 51. S. 1461–1481. – Bekaert, Geert/Hodrick, Robert/Zhang, Xiaoyan (2009): International stock return comovements, in: *Journal of Finance*, Vol. 64, S. 2591–2626. – Berg, Daniel (2009): Copula Goodness-of-fit Testing: An Overview and Power Comparison, in: *European Journal of Finance*, Vol. 15, S. 675–701. – Bollerslev, Tim/Wooldridge, Jeffrey M. (1992): Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances, in: *Econometric Reviews*, Vol. 11. S. 143–172. – Bouyé, Eric/Durrleman, Valdo/Nikeghbali, Ashkan/Riboulet, Gaël/Roncalli, Thierry (2000): Copulas for Finance – A Reading Guide and Some Applications, http://papers.ssrn.com/sol3/Delivery.cfm/SSRN_ID1032533_code903940.pdf?abstractid=1032533&mirid=1, abgerufen am 01.11.2010. – Breymann, Wolfgang/Dias, Alexandra/Embrechts, Paul (2003): Dependence structures for multivariate high-fre-

quency data in finance, in: *Quantitative Finance*, Vol. 1. S. 1–14. – *Chen, Sichong/Poon, Ser-Huang* (2010): Modelling International Stock Market Contagion Using Copula and Risk Appetite, erscheint in: Robert Kolb ed. „Financial Contagion: The Viral Threat to the Wealth of Nations“, Wiley. – *Cherubini, Umberto/Luciano, Elisa/Vecchiato, Walter* (2004): *Copula Methods in Finance*, New York. – *Clayton, David G.* (1978): A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, in: *Biometrika*, Vol. 65. S. 141–151. – *Cooke, Roger/Joe, Harry/Aas, Kjersti* (2010): Vine Arise, erscheint in: *Dependence Modeling: Handbook on Vine Copulae*, D. Kurowicka and Harry Joe (Hrsg.), World Scientific Publishing Co. – *Cook, Dennis R./Johnson, Mark E.* (1981): A family of distributions for modelling non-elliptically symmetric multivariate data, in: *Journal of Royal Statistical Society B*, Vol. 43. S. 210–218. – *Deheuvels, Paul* (1979): La fonction de dépendance empirique et ses propriétés: Un test non paramétrique d'indépendance, in: *Bulletins de la Classe des Sciences*, Vol. 5. S. 274–292. – *Di Clemente, Annalisa/Romano, Claudio* (2005): Measuring Portfolio Value at Risk by a Copula-EVT based approach, in: *Studi Economici*, Vol. 85. S. 29–57. – *Dowd, Kevin* (1998): *Beyond Value at Risk – The New Science of Risk Management*, Chichester & New York. – *Embrechts, Paul/McNeil, Alexander/Straumann, Daniel* (2002): Correlation and dependency in risk management: Properties and pitfalls, in: *Dempster, Michael* (Hrsg.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, University Press, Cambridge, S. 176–223. – *Engle, Robert* (2002): Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models. *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 339–350. – *Engle, Robert/Sheppard, Kevin* (2003): Theoretical and Empirical properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH, Working Paper. – *Fantazzini, Dean* (2008): Dynamic copulas for Value at Risk, in: *Frontiers in Finance and Economics*, Vol. 31. S. 161–180. – *Fermanian, Jean-David* (2005): Goodness of fit tests for copulas, in: *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 95. S. 119–152. – *Franke, Jürgen/Härdle, Wolfgang K./Hafner, Christian M.* (2007): *Statistics of Financial Markets – An Introduction*, 2. Aufl., Berlin/Heidelberg. – *Gao, Feng/Song, Fengming* (2008): Estimation risk in GARCH VaR and ES estimates, in: *Econometric Theory*, Vol. 24. S. 1404–1424. – *Gençay, Ramazan/Selçuk, Faruk* (2004): Extreme value theory and Value at Risk: Relative performance in emerging markets, in: *International Journal of Forecasting*, Vol. 20. S. 287–303. – *Genest, Christian/Gendron, Michel/Bourdeau-Brien, Michaël* (2009): The advent of copulas in finance, in: *European Journal of Finance*, Vol. 15. S. 609–618. – *Genest, Christian/Quessy, Jean-François/Rémillard, Bruno* (2006): Goodness-of-fit procedures for copula models based on the probability integral transform, in: *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 33. S. 337–366. – *Genest, Christian/Rémillard, Bruno/Beaudoin, David* (2009): Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 44. S. 199–213. – *Genest, Christian/Rémillard, Bruno* (2008): Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in semiparametric models, in: *Annales de l'Institut Henri Poincaré: Probabilités et statistiques*, Vol. 44. S. 1096–1127. – *Genest, Christian/Rivest, Louis-Paul* (1993): Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas, in: *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 88. S. 1034–1043. – *Hsu Ku, Yuan-Hung/Wang, Jai Jen* (2008): Estimating portfolio value at risk via dynamic conditional correlation

MGARCH model – an empirical study on foreign exchange rates, in: *Applied Economics Letters*, Vol. 15. S. 533–538. – Joe, Harry/Xu, James J. (1996): Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas, in: Technical report no. 166, Department of Statistics, University of British Columbia. – Junker, Markus/May, Angelika (2005): Measurement of aggregate risk with copulas, in: *Econometrics Journal*, Vol. 8. S. 428–454. – Kimeldorf, George/Sampson, Allan R. (1975): Uniform representations of bivariate distributions, in: *Communications in Statistics*, Vol. 4. S. 617–627. – Kinnebrock, Silja (2005): *Modelling Dependence Risk with Copulas and Applications to Pricing of Credit Derivates*, Diplomarbeit TU Kaiserslautern. – Kole, Erik/Koedijk, Kees/Verbeek, Marno (2007): Selecting Copulas for Risk Management, in: *Journal of Banking & Finance*, Vol. 31. S. 2405–2423. – Lauridsen, Sarah (2001): Estimation of Value at Risk by Extreme Value Methods, in: *Extremes*, Vol. 3. S. 107–144. – Longin, François/Solnik, Bruno (1995): Is the correlation in international equity returns constant: 1960–1990?, in: *Journal of International Money and Finance*, Vol. 14. S. 13–26. – Malevergne, Yannick/Sornette, Didier (2003): Testing the Gaussian Copula Hypothesis for Financial Assets Dependencies, in: *Quantitative Finance*, Vol. 3. S. 231–250. – Markwat, T./Kole, E./van Dijk, D. (2010): *Time Variation in Asset Return Dependence: Strength or Structure?* Working paper, Erasmus University Rotterdam. – McNeil, Alexander/Frey, Rüdiger (2000): Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach, in: *Journal of Empirical Finance*, Vol. 7. S. 271–300. – McNeil, Alexander/Frey, Rüdiger/Embrechts, Paul (2005): *Quantitative Risk Management – Concepts, Techniques and Tools*, Princeton. – Mittnik, Stefan/Kuester, Keith/Paoletta, Marc (2006): Value at Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies, in: *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4. S. 53–89. – Nelsen, Roger B. (2006): *An Introduction to Copulas*, 2. Aufl., in: *Lecture Notes in Statistics*, Vol. 139. – Palaro, Helder Parra/Hotta, Luiz Koodi (2006): Using Conditional Copula to Estimate Value at Risk, in: *Journal of Data Science*, Vol. 4. S. 93–115. – Patton, Andrew (2006): Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence, in: *International Economic Review*. Vol. 47. S. 527–556. – Rosenberg, Joshua/Schuermann, Til (2006): A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-tailed Risks, in: *Journal of Financial Economics*, Vol. 79. S. 569–614. – Scaillet, Olivier (2006): Kernel-based goodness-of-fit tests for copulas with fixed smoothing parameters, in: *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 98. S. 533–543. – Schweizer, Berthold/Sklar, Abe (1983): *Probabilistic Metric Spaces*, New York. – Sklar, Abe (1959): Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, in: *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, Vol. 8. S. 229–231. – Wong, W. K. (2008): Backtesting trading risk of commercial banks using expected shortfall, in: *Journal of Banking & Finance* 32. S. 1404–1415. – Yamai, Yasuhiro/Yoshida, Toshinao (2005): Value at Risk versus Expected Shortfall: A practical perspective, in: *Journal of Banking & Finance* 29. S. 997–1015.

Zusammenfassung

Über die Vorteilhaftigkeit von Copula-GARCH-Modellen im finanzwirtschaftlichen Risikomanagement

Im Fokus des vorliegenden Beitrages stehen zwei Fragen: Wann sollte ein Copula-GARCH-Modell einem korrelationsbasierten Modell vorgezogen werden? Und welche parametrische Copula-Form sollte in diesem Fall verwendet werden? Zur Beantwortung dieser Fragen werden in der empirischen Studie der Value at Risk und Expected Shortfall für insgesamt 1.275 bivariate Portfolios, bestehend aus den Logrenditen verschiedener Anlageformen, berechnet. Die durchgeführten Simulationen zeigen, dass für gerade einmal ein Drittel der betrachteten Portfolios ein Copula-GARCH-Modell die VaR-Schätzungen des DCC-Modells als korrelationsbasierte Benchmark verbessern konnte. Eine generelle Vorteilhaftigkeit von Copula-Modellen gegenüber korrelationsbasierten Modellen konnte in dieser Studie somit nicht festgestellt werden. Gleichzeitig erwies sich der in diesem Beitrag verwendete, auf der empirischen Copula basierende Anpassungstest als vergleichsweise schwach in seiner Fähigkeit zur Wahl des optimalen Modells. In fast allen Fällen lieferte der GoF-Test entweder eine mehrdeutige oder eine falsche Empfehlung. Gleichzeitig konnte gezeigt werden, dass bestimmte deskriptive Statistiken für die Entscheidung für ein Copula-GARCH-Modell bzw. das DCC-Modell genutzt werden können. Schließlich wiesen die in dieser Studie erstmals eingesetzten vollständig zeitabhängigen Mixture Copulas lediglich eine geringe Prognosegüte auf. (JEL G32, G11, C12, C14)

Summary

The Advantageousness of Copula-GARCH Models in Financial and Economic Risk Management

This article focuses on two questions: In what circumstances should a Copula-GARCH model be preferred to a correlation-based model? And, where appropriate, what Copula-model parameters should be used? In answer to these two questions, the empirical value at risk and expected shortfall study calculates various forms of investment from a total of 1275 bivariate portfolios composed of the log returns of such forms of investment. The simulations made show that for just one-third of the examined portfolios a Copula-GARCH model could help improve the VaR estimates of the DCC model as a correlation-based benchmark. This proves that this study has not been able to show that Copula models are more advantageous in general over correlation-based ones. At the same time, the empirical Copula-based adjustment test, which has been used in this study, has been weak by comparison as regards its ability to select the optimal model. In almost all cases, the GoF test has produced either an ambivalent or a false recommendation. At the same time, it has been demonstrated that certain descriptive statistics may well be used as decision-making aid in favour of a Copula-GARCH model and, respectively, the DCC model. Finally, this study shows that the completely time-dependent mixture of Copulas used in this study for the first time have been of an only low prognosticating quality.